<u>Συντελεστής Συσχέτισης</u>

Σε όσα ακολουθούν, θεωρώντας γνωστούς τους ορισμούς και τη θεωρία που αφορούν τη συνδιακύμανση (covariance) δύο τυχαίων μεταβλητών και όσα προηγούνται αυτής (μέση τιμή, διασπορά, ροπές κ.λπ.), παραθέτουμε τη θεωρία που αφορά το συντελεστή συσχέτισης (correlation coefficient) δύο τυχαίων μεταβλητών. Ξεκινάμε αποδεικνύοντας την *ανισότητα Cauchy-Schwartz* (στο εξής C-S).

<u>Θεώρημα:</u> *Έστω ότι οι τυχαίες μεταβλητές U και W έχουν πεπερασμένες ροπές 2ας τάξεως, δηλ.* $EU^2 < \infty$, $EW^2 < \infty$*. Τότε, ισχύει η ανισότητα C-S, δηλαδή*

$$(E[UW])^2 \le EU^2 EW^2$$

Επιπλέον, η ισότητα στην C-S ισχύει τότε και μόνον τότε όταν είτε (i) $P(W=0)=1$ *είτε (ii) υπάρχει* $a \in \Re$ *τ.ω.* $P(U=aW)=1$.

<u>Απόδειξη:</u> Ξεκινάμε αποδεικνύοντας την ισχύ της C-S.

Περίπτωση 1: $P(W=0)=1$. Τότε, $P(UW=0)=1 \Rightarrow E[UW]=0$ και $P(W^2=0)=1 \Rightarrow EW^2=0$. Άρα τότε η C-S ισχύει, και μάλιστα με ισότητα.

Περίπτωση 2: $P(W=0)<1$. Τότε $EW^2>0$ (πραγματικά, αν ήταν $EW^2=0$, θα είχαμε $W^2=0$ με πιθανότητα 1, δηλαδή $W=0$ με πιθανότητα 1 που είναι αντίφαση). Επομένως, το πολυώνυμο $f(\lambda) := EW^2\lambda^2 - 2E[UW]\lambda + EU^2$ είναι δευτέρου βαθμού και θα παίρνει ελάχιστο στο $\lambda_0 = \dfrac{E[UW]}{EW^2}$. Αλλά, $f(\lambda) = E(U-\lambda W)^2 \ge 0$. Άρα και $f(\lambda_0) \ge 0$, δηλαδή $\dfrac{\{E[UW]\}^2}{EW^2} - 2\dfrac{\{E[UW]\}^2}{EW^2} + EU^2 \ge 0$, που συνεπάγεται την ανισότητα C-S, δηλαδή ότι $(E[UW])^2 \le EU^2EW^2$.

Απομένει να αποδειχθεί το «επιπλέον» της εκφώνησης.

Πρώτα δείχνουμε ότι τα (*i*) και (*ii*) συνεπάγονται την ισότητα στην C-S. Για το (*i*) αυτό έχει ήδη δειχτεί. Για το (*ii*), αν υπάρχει $a \in \Re$ *τ.ω.* $P(U=aW)=1$, τότε αφενός $E[UW]=E[aW^2]=aEW^2$ και αφετέρου $EU^2 = a^2EW^2$. Άρα, $\{E[UW]\}^2 = a^2\{EW^2\}^2 = EU^2EW^2$.

Τέλος, δείχνουμε ότι αν η C-S ισχύει με ισότητα, τότε υποχρεωτικά θα ισχύει είτε το (*i*) είτε το (*ii*). Αν ισχύει το (*i*), τότε έχει καλώς. Αν δεν ισχύει το (*i*), τότε θα βρισκόμαστε στην Περίπτωση (2) παραπάνω, και αφού στην C-S έχουμε ισότητα, θα πρέπει $f(\lambda_0)=0$, δηλαδή $E(U-\lambda_0W)^2=0$ που συνεπάγεται $P((U-\lambda_0W)^2=0)=1$, δηλαδή $P(U=\lambda_0W)=1$. □

Η ανισότητα C-S συνεπάγεται το εξής βασικό για όσα ακολουθούν πόρισμα:

Created with Print2PDF. To remove this line, buy a license at: http://www.binarynow.com/

Πόρισμα: Αν δύο τυχαίες μεταβλητές X *και* Y έχουν πεπερασμένες ροπές δευτέρας τάξεως, τότε $|\sigma_{XY}| \le \sigma_X \sigma_Y$. Επιπλέον, $|\sigma_{XY}| = \sigma_X \sigma_Y$ τότε και μόνον τότε όταν είτε η Y είναι σταθερά με πιθανότητα 1 είτε όταν υπάρχει $a \in \Re$ *τ.ω.* $X - EX = a(Y - EY)$ *με πιθανότητα 1.*

Απόδειξη: Έστω $U := X - EX$ και $W := Y - EY$. Από την C-S παίρνουμε $(E[UW])^2 \le EU^2 EW^2$, δηλαδή $(E[(X-EX)(Y-EY)])^2 \le E(X-EX)^2 E(Y-EY)^2$, που συνεπάγεται το συμπέρασμα. Το «επιπλέον» παίρνεται αμέσως από το «επιπλέον» της C-S. □

Στη συνέχεια ορίζουμε το *συντελεστή συσχέτισης*.

Ορισμός: *Έστω ότι οι τυχαίες μεταβλητές* X *και* Y *έχουν συνδιακύμανση* σ_{XY} *και διασπορές* σ_X^2 *και* σ_Y^2*, με* $0 < \sigma_X^2 < \infty$, $0 < \sigma_Y^2 < \infty$. *Τότε, ορίζουμε ως συντελεστή συσχέτισης* $\rho(X,Y)$ *των* X *και* Y *το πηλίκο* $\sigma_{XY}/(\sigma_X \sigma_Y)$, *δηλαδή*

$$\rho(X,Y) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Σημαντικές Παρατηρήσεις: Αν $c \in \Re$, τότε

(1) $\rho(cX,Y) = \dfrac{Cov(cX,Y)}{\sqrt{Var(cX)}\sqrt{Var(Y)}} = \dfrac{c\,Cov(X,Y)}{|c|\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \operatorname{sgn}(c)\rho(X,Y)$.

(2) $\rho(X+c,Y) = \dfrac{Cov(X+c,Y)}{\sqrt{Var(X+c)}\sqrt{Var(Y)}} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \rho(X,Y)$.

(3) Συνδυάζοντας τον Ορισμό και το Πόρισμα, συμπεραίνουμε ότι $\rho(X,Y) \in [-1,1]$ και μάλιστα $\rho(X,Y) = \pm 1$, τότε και μόνον τότε όταν υπάρχει $a \in \Re$ *τ.ω.* $X - EX = a(Y - EY)$ με πιθανότητα 1, δηλαδή η σχέση των X και Y είναι γραμμική.

Μπορούμε άραγε να υπολογίσουμε το a όταν ο συντελεστής συσχέτισης είναι ± 1;

<u>Ισχυρισμός 1:</u> Αν $\rho(X,Y) = \pm 1$, τότε το πρόσημο του a συμπίπτει με το πρόσημο της συνδιακύμανσης σ_{XY}.

<u>Απόδειξη:</u> $\sigma_{XY} = E(X-EX)(Y-EY) = E[a(Y-EY)^2] = a\sigma_Y^2$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

<u>Ισχυρισμός 2:</u> Αν $\rho(X,Y) = \pm 1$, τότε $|a| = \dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}$.

<u>Απόδειξη:</u> $\sigma_X^2 = E(X-EX)^2 = a^2 E(Y-EY)^2 = a^2 \sigma_Y^2$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Επομένως,

Created with Print2PDF. To remove this line, buy a license at: http://www.binarynow.com/

(4) Αν $\rho(X,Y)=+1$, από τον ορισμό του συντελεστή συσχέτισης προκύπτει ότι $\sigma_{XY}>0$ και συνδυάζοντας τότε τους Ισχυρισμούς 1 και 2, παίρνουμε $a=\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$. Ενώ, αν $\rho(X,Y)=-1$, με αντίστοιχους συλλογισμούς συμπεραίνουμε ότι $a=-\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$.

Συνοψίζουμε τη συζήτησή μας στην εξής Πρόταση.

<u>Πρόταση:</u> *Για δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y με πεπερασμένες και θετικές ροπές δευτέρας τάξεως, ισχύει πάντα ότι* $-1\le\rho(X,Y)\le+1$. *Επιπλέον,* $\rho(X,Y)=+1$ *τότε και μόνον τότε όταν* $Y=\mu_Y+\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mu_X)$ *και* $\rho(X,Y)=-1$ *τότε και μόνον τότε όταν* $Y=\mu_Y-\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mu_X)$.

<u>Απόδειξη:</u> Το πρώτο μέρος της Πρότασης προκύπτει αμέσως από την Παρατήρηση (3), ενώ η Παρατήρηση (4), μετά από πράξεις στον τύπο της Παρατήρησης (3), δίνει το δεύτερο μέρος. □

Created with Print2PDF. To remove this line, buy a license at: http://www.binarynow.com/