Πλήθος διαγων ως την 1η επιτ.

Διαγώνισμα $\xrightarrow{p}$ περνάει, $\xrightarrow{1-p}$ αποτυχη

$X = \#$ διαγων. μέχρι να περάσει

$$p_X(x) = (1-p)^{x-1} p \ , \quad x = 1, 2, \ldots$$

A : περνάει μέχρι την n-οστή φορά $= \{X \leq n\}$

$$\boxed{p_{X|A}(x) = \frac{P(\{X=x\} \cap A)}{P(A)} = \begin{cases} \dfrac{(1-p)^{x-1} p}{1-(1-p)^n}, & 1 \leq x \leq n \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases}}$$

$$P(\{X=x\} \cap A) = P(X=x, X \leq n) = \begin{cases} (1-p)^{x-1} p, & x \leq n \\ 0, & x > n \end{cases}$$

$$P(A) = P(X \leq n) = \sum_{x=1}^{n} p_X(x) = 1 - P(X > n) = 1 - (1-p)^n$$

$P_{X|A^c}(x) = ;$ $A^c = \{X > n\}$

Προσοχή! $P_{X|A}(x) + P_{X|A^c}(x) \neq 1$

$\left(\begin{array}{l} P(A|B) + P(A^c|B) = 1 \\ P(B|A) + P(B|A^c) = ?? \quad \neq 1 \end{array} \right)$

$$P_{X|A^c}(x) = \frac{P(\{X=x\} \cap A^c\}}{P(A^c)} = \begin{cases} 0 & , x \leq n \\ \dfrac{(1-p)^{x-1} p}{(1-p)^n} & x > n \end{cases}.$$

$P(A^c) = P(X > n) = (1-p)^n$

Νοε 18-9:38 πμ

Λάθη καθηγητή.

X = Πλήθος ερωτήσεων

- $P_X(0) = P_X(1) = P_X(2) = \frac{1}{3}$ $\quad P_X(x)$ ✓

Ερώτηση $\xrightarrow{1/4}$ Λάθος

Ερώτηση $\xrightarrow{3/4}$ Σωστή

Y = Πλήθος λανθ. απαντ.

- $P_{Y|X}(y|x) = \binom{x}{y}\left(\frac{1}{4}\right)^{y}\left(\frac{3}{4}\right)^{x-y} \quad 0 \le y \le x.$

$P_{Y|X}(0|0) = 1$, $\quad P_{Y|X}(y|1) = \begin{cases} 3/4, & y=0 \\ 1/4, & y=1 \end{cases}$ $\quad P_{Y|X}(y|2) = \begin{cases} 9/16 & y=0 \\ 6/16 & y=1 \\ 1/16 & y=2 \end{cases}$

$$P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$$
$$= P(X=x)\,P(Y=y \mid X=x)$$
$$= P_X(x)\,P_{Y|X}(y|x)$$
$$= \frac{1}{3}\binom{x}{y}\left(\frac{1}{4}\right)^y\left(\frac{3}{4}\right)^{x-y}, \quad \boxed{\begin{matrix} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le x \end{matrix}}$$

$$P_Y(y) = \sum_{x} P_{X,Y}(x,y) = \sum_{x=y}^{2} \frac{1}{3}\binom{x}{y}\left(\frac{1}{4}\right)^y\left(\frac{3}{4}\right)^{x-y}$$

$0 \le x \le 2 \longrightarrow 0 \le x \le 2$

$0 \le y \le x \longrightarrow y \le x \longrightarrow \boxed{0 \le y \le x \le 2}$

Νοε 18-9:58 πμ

Δεσμευμένη Μέση Τιμή.

$$E[X] = \sum_x x\, p_X(x)$$

$$E[X|A] = \sum_x x\, p_{X|A}(x) \qquad E[X|Y=y] = \sum_x x\, p_{X|Y}(x|y)$$

A ↑ ενδεχόμενο

Νοε 18-10:17 πμ

Θεώρημα Ολικής Μέσης Τιμής

$$E[X] = \sum_i P(A_i)\, E[X \mid A_i] \quad , \; A_i \text{ διαμερ. του } \Omega$$

$$E[X] = \sum_y \underbrace{P(Y=y)}_{p_Y(y)}\, E[X \mid Y=y]$$

Θεώρημα Ολικής Πιθ.

$$P(B) = \sum_i P(A_i)\, P(B \mid A_i) \, , \; A_i \text{ διαμερ. του } \Omega$$

Παρ. 1: Μέση τιμή γεωμ. τ.μ.

Ακολ. δοκ. Bernoulli με πιθ. επιτ. p.

X = Πλήθος δοκ. μέχρι την 1η επιτυχία

$E[X] = ;$ $\quad E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x\, p_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x (1-p)^{x-1} p$

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{επιτυχ. στη 1η δοκ.} \\ 0, & \text{αποτυχ. στην 1η δοκ.} \end{cases}$$

Θ.Ο.Μ.Τ: $E[X] = \underbrace{P(Y=0)}_{1-p} \underbrace{E[X|Y=0]}_{1+E[X]} + \underbrace{P(Y=1)}_{p} \underbrace{E[X|Y=1]}_{1}$

$\Rightarrow E[X] = (1-p)(1+E[X]) + p \cdot 1$

$\Rightarrow E[X] = 1 + (1-p) E[X]$

$\Rightarrow \boxed{E[X] = 1/p}$

Φυλακισμένος - Ελευθερία

1η Π → Ελευθ.

2η Π → 3 μέρες, πίσω

3η Π → 10 μέρες, πίσω

X = Πλήθος ημερών ως την ελευθ.

$E[X] = \sum_x x\, p_X(x)$ ← Δύσκολα υπολογίζεται

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{αν στην 1η επιλ. διαδ. την 1η Π} \\ 2, & \text{αν —''— 2η Π} \\ 3, & \text{αν —''— 3η Π} \end{cases}$$

$$E[X] = \sum_y P(Y=y)E[X|Y=y] = P(Y=1)E[X|Y=1] + P(Y=2)E[X|Y=2] + P(Y=3)E[X|Y=3] \Longrightarrow$$

$$E[X] = \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}(3+E[X]) + \frac{1}{3}(10+E[X]) \Rightarrow E[X] = \frac{13}{3} + \frac{2}{3}E[X]$$

$$E[X] = 13$$