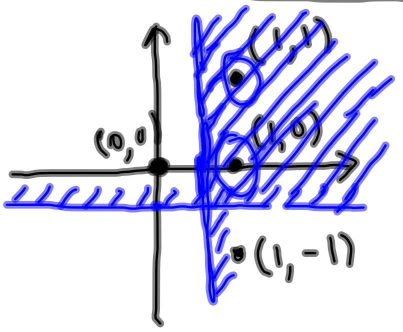
Παράδειγμα

(X,Y)

$p_{X,Y}(x,y) \geq 0$

$\sum_{(x,y)} p_{X,Y}(x,y) = 1$



$p_{X,Y}(0,0) = \frac{1}{2}$

$p_{X,Y}(1,1) = \frac{1}{6}$

$p_{X,Y}(1,0) = \frac{1}{12}$

$p_{X,Y}(1,-1) = \frac{1}{4}$

$$P\big((X,Y) \in \overbrace{[\tfrac{1}{2},\infty)\times[-\tfrac{1}{3},\infty)}^{A}\big) = \sum_{(x,y)\in A} p_{X,Y}(x,y)$$

$$= p_{X,Y}(1,1) + p_{X,Y}(1,0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Παράδειγμα:

X = εισοδ. Α

Y = εισοδ. Γ

(X,Y) τ.μ

$(X,Y) \in \{\boxed{(0,0)}, \boxed{(1000,1000)}, \boxed{(500,1500)}, \boxed{(1500,0)}\}$.

Z = Συνολ. εισοδ $= X + Y$

$P_{X,Y}(0,0) = \frac{1}{2}$

$P_{X,Y}(1000,1000) = \frac{1}{4}$

$P_{X,Y}(500,1500) = \frac{1}{8}$

$P_{X,Y}(1500,0) = \frac{1}{8}$

$$P_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & z=0 \\ \frac{1}{8}, & z=1500 \\ \frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}, & z=2000 \end{cases}$$

$Z \in \{0, 1500, 2000\}$

Νοε 12-3:35 μμ

Παραδ: Ρίψη νομισμ. 3 φορές (X, Y)

$x \backslash y$	0	1	2	3	$p_X(x)$
0	1/8	0	0	0	1/8
1	1/4	1/8	0	0	3/8
2	1/8	1/8	1/8	0	3/8
3	0	0	0	1/8	1/8
$p_Y(y)$	1/2	1/4	1/8	1/8	1

$$E[X] = \sum_x x\, p_X(x)$$

$$= 0\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{3}{8} + 2\cdot\frac{3}{8} + 3\cdot\frac{1}{8}$$

$$= \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

$p_{X,Y}(x,y)$

$E[Y] = \cdots$

$$P(X+Y=4) = \cancel{p_{X,Y}(0,4)} + \cancel{p_{X,Y}(1,3)} + p_{X,Y}(2,2) + p_{X,Y}(3,1) + \cancel{p_{X,Y}(4,0)}$$

$$= \frac{1}{8}.$$

$Z = X + 2Y + 1$

Τιμές της Z: 10, 7, 5, 4, 3, 2, 1

$P(Z=5) = P(X+2Y+1=5)$

$= P(X+2Y=4)$

$= P(Y=1, X=2)$

$+ P(Y=2, X=0)$

$= P_{X,Y}(2,1) + P_{X,Y}(0,2)$.

$E[Z] = ;$

$$E[Z] = \sum_{(x,y)} (x+2y+1) P_{X,Y}(x,y)$$

$$E[Z] = E[X + 2Y + 1]$$

$$= E[X] + 2E[Y] + 1.$$

Πολυδιάστατες τ.μ.

$$P_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=P(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n)$$

$\downarrow n=2$

$$P_{X,Y}(x,y)=P(X=x,Y=y)$$

Μέση τιμή Διωνυμικής.

X = # επιτυχιών σε n δοκιμές
με πιθ. p επιτυχίας ανά δοκιμή

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

$$E[X] = np.$$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \ldots$$

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$X_i =$ # επιτ. στην i-δοκιμή

$$= \begin{cases} 1 & \text{με πιθ } p. \\ 0 & \text{με πιθ } 1-p. \end{cases}$$

$$E[X_i] = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p.$$

$$E[X] = E[X_1 + X_2 + \cdots + X_n]$$

$$= E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n]$$

$$= p + p + \cdots + p = np$$

Πρόβλημα συναντήσεων

X = # ατόμων που παίρνουν το βιβλίο τους.

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν το άτομο } i \text{ παίρνει το βιβλ} \\ 0, & \text{αν δεν το πάρει} \end{cases}$$

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$\Rightarrow E[X] = E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = E[X_1] + \dots + E[X_n]$$

$$P(X_i = 1) = 1/n,\ P(X_i = 0) = \frac{n-1}{n} \Rightarrow E[X_i] = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow E[X] = E[X_1] + \cdots + E[X_n]$$
$$= \underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n}$$
$$= 1.$$

Νοε 12-4:40 μμ

Δεσμ. σ.μ. ως προς ενδεχ.

$$P_{X|A}(x) = P(X=x \mid A) = \frac{P(\{X=x\} \cap A)}{P(A)}$$

Παραδ: Ρίψη ζαριού

X : ένδειξη A : ήρθε άρτιος

$P_X(x) = \frac{1}{6}$, $x = 1,2,\dots,6$ $P_X(x|A) = \frac{1}{3}$, $x = 2,4,6$

Δεσμευμένη τ.μ. ως προς τ.μ.

(X,Y) τ.μ. $\quad P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$

$$P_X(x) = P(X=x)$$

$$P_Y(y) = P(Y=y)$$

Δεσμ. σ.μ.π. της X δοθέντος ότι $Y=y$

$$P_{X|Y}(x|y) = P(X=x \mid Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$$

$$= \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)}$$

Παράδ: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσμ.
$X = \#K$, $Y = \#K$ ως τα πρώτα Γ.

$$P_{Y|X}(y|0) = 1, \quad y=0$$

$$P_{Y|X}(y|1) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & y=0 \\ 1/3, & y=1 \end{cases}$$

$$P_{Y|X}(y|2) = \begin{cases} 1/3, & y=0 \\ 1/3, & y=1 \\ 1/3, & y=2 \end{cases}$$

$$P_{Y|X}(y|3) = 1, \quad y=3.$$