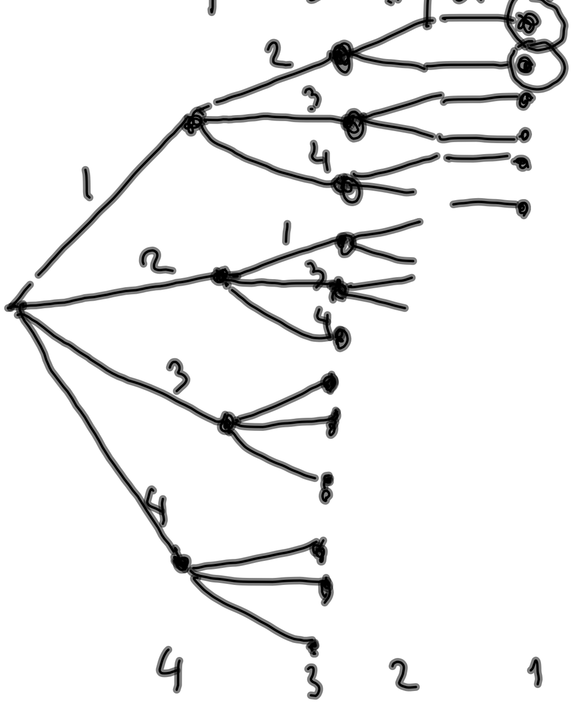
Πολλαπλασιαστ. Αρχή – Παραδ.

4 άτομα να μπουν σε σειρά



1234
1243
⋮

$4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 24$ επιλ

Πλήθος διατάξεων n ανά k

Μια διάταξη γίνεται σε k στάδια

$1^{\underline{o}}$ στ $\longrightarrow$ επιλ. $1^{\underline{ου}}$ $\rightarrow$ n επιλ

$2^{\underline{o}}$ στ $\longrightarrow$ επιλ. $2^{\underline{ου}}$ $\rightarrow$ $n-1$ επιλ

$3^{\underline{o}}$ στ $\longrightarrow$ επιλ. $3^{\underline{ου}}$ $\rightarrow$ $n-2$ επιλ

$\vdots$

$k^{\underline{o}}$ στ $\longrightarrow$ επιλ $k^{\underline{ου}}$ $\rightarrow$ $n-k+1$ επιλ

Πολ/κή αρχή $\Rightarrow$ # διαταξ $= n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)$

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\cdot$$

$$=\frac{n!}{(n-k)!}$$

Πλήθος συνδ. n ανα k.

$n = 3 \quad k = 2$

1	2
2	1
1^o	2^o

$\to \{1, 2\}$ X

~~Πολ?κη~~

Διάταξη : Επιλ + Τοπ σε σειρά
n ανά k

Συνδ : Επιλ.
n ανά k

Για κατασκ διάταξης n ανά k

1ο στάδιο : Επιλέγω k στοιχεία → # συνδ n ανά k επιλ.

2ο στάδιο : Τοποθ. σε σειρά → $k!$ επιλ

$$\underbrace{\#\,\text{διατ}\ n\ \text{ανα}\ k}_{= \frac{n!}{(n-k)!}} = \left(\begin{matrix}\#\,\text{συνδ} \\ n\ \text{ανα}\ k\end{matrix}\right) \cdot k!$$

$$\Longrightarrow \begin{matrix}\#\,\text{συνδ} \\ n\ \text{ανα}\ k\end{matrix} = \frac{\begin{matrix}\#\,\text{διατ} \\ n\ \text{ανα}\ k\end{matrix}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

$\#$ Διαμερίσεων n στοιχείων τύπου $(n_1, n_2, \dots, n_k)$

Μια τέτοια διαμέρ. φτιάχνεται σε στάδια:

$1^{\underline{o}}$ στ: Επιλ. n_1 στοιχ. για $1^{\underline{o}}$ συν: $\binom{n}{n_1}$ επιλ.

$2^{\underline{o}}$ στ: Επιλ. n_2 στοιχ. για $2^{\underline{o}}$ συν: $\binom{n-n_1}{n_2}$ επιλ.

$3^{\underline{o}}$ στ: Επιλ n_3 στοιχ για $3^{\underline{o}}$ συν: $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ επιλ

$\vdots$

Πολ/κη αρχή $\Longrightarrow$

\# διαμερ.
τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$

$$= \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,\cancel{(n-n_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\,\cancel{(n-n_1-n_2)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-n_1-n_2)!}}{n_3!\,\cancel{(n-\ldots)!}} \cdots \frac{\cancel{(n-\ldots)!}}{n_k!\,0!}$$

Μεταθέσεις k ειδών στοιχ. τύπου $(n_1, n_2, \dots, n_k)$

$k=3$: 1 2 3

$\underline{n_1=2}$ $\underline{n_2=3}$ $\underline{n_3=2}$

→ 1 1 2 2 2 3 3

→ 1 2 1 2 3 3 2

→ ... $\binom{7}{2}\binom{5}{3}\binom{2}{2}$ ←

| 2 | | 1 | | 2 | | 1 | | 2 |

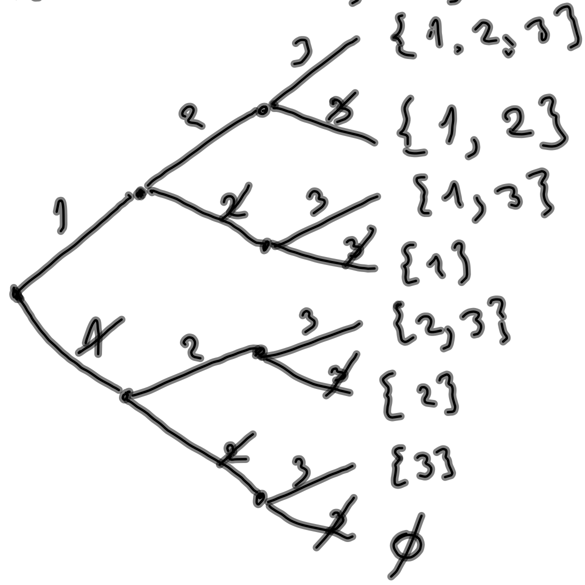
1ο στ: Επιλ. θέσ. "1" $\binom{7}{2}$

2ο στ: Επιλ. θέσ "2" $\binom{5}{3}$

3ο στ: Επιλ. θέσ "3" $\binom{2}{2}$

Πλήθος υποσυν. συνόλου
με n στοιχεία.

$n=3$. $\{1, 2, 3\}$



2^3.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\underline{\underline{\binom{n}{0}}} + \underline{\underline{\binom{n}{1}}} + \underline{\underline{\binom{n}{2}}} + \cdots + \underline{\underline{\binom{n}{n}}}$$

$$= 2^n \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Αναγραμματισμοί "ΜΑΛΑΜΑΤΑ"

$$\frac{8!}{4!\,2!\,1!\,1!}$$

$n_1 = 4$ "Α"

$n_2 = 2$ "Μ"

$n_3 = 1$ "Λ"

$n_4 = 1$ "Τ"

$\binom{n}{k}$: Συνδυασμοί
n ανά k

Διωνυμικός
: συντελ.
n ανά k

Οκτ 21-10:35 πμ

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} a^n b^0$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Διωνυμικές πιθαν.

n ρίψεις $\quad$ $K \to p$ $\quad$ (πιθ).
$\qquad\qquad\quad$ $\Gamma \to 1-p$

αποτελ. με k "K" :

$$\underbrace{KK\ldots K}_{k}\ \underbrace{\Gamma\Gamma\ldots\Gamma}_{n-k} \quad p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\underbrace{K}_{1}\ \underbrace{\Gamma\Gamma}_{2}\ \underbrace{K\ldots K}_{k-1}\ \underbrace{\Gamma\Gamma\ldots\Gamma}_{n-k-2} \quad p^k(1-p)^{n-k}$$

Πιθ. καθε αποτελ. με k "κ"

είναι $p^k (1-p)^{n-k}$.

$$P(k \text{ "κ"}) = \left(\begin{array}{c}\# \text{ αποτελ.} \\ \text{με } k \text{ "κ"}\end{array}\right) \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Αποτελ. με k "κ" = k "κ" και $n-k$ "γ" σε σειρά

λύσεων $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$

$x_i \geq 0$, ακέρ.

$k = 5$ $\quad x_1 + x_2 + x_3 = 5$

$n = 3$

$$\left.\begin{array}{c}(5,0,0)\\(4,1,0)\\(4,0,1)\\(3,2,0)\\(3,1,1)\end{array}\right\} \#;$$

$\vdots$

11

1 0 0 0 | 0 0 0

$1+0+4$ # λυσ $x_1+x_2+x_3=5$

$2+2+1$ με $x_i \geq 0$ ακερ

$0+3+2$ ‖

τρόπων στη σειρά

$\frac{7!}{5!\,2!} =$ 5 "0" και 2 "1"

\# λυσ. της $x_1 + \dots + x_n = k$

με $x_i \geq 0$ ακερ

||

\# τοποθετήσεων σε σειρά

k "0" & $n-1$ "1"

||

$$\frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

n ανδρόγυνα

$\#$ k-μελών επιτροπών

(i) χωρίς περιορ : $\binom{2n}{k}$

(ii) με ακριβώς r γυναίκες: $\binom{n}{r} \cdot \binom{n}{k-r}$

(iii) με ακριβώς r γυν

χωρίς άτομα απ' το ίδιο ανδρογ $= \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$

$\uparrow$ επιλ. γυν $\uparrow$ επιλ ανδρ.