Πιθανότητες και Στατιστική
Διάλεξη 6
Ασκήσεις I
Δεσμευμένη πιθανότητα, Συνδυαστικά επιχειρήματα

Αντώνης Οικονόμου

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

31 Οκτωβρίου 2014

Βασικά θεωρήματα δέσμευσης

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

Βασικά θεωρήματα δέσμευσης

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 \ldots A_n) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \\ &\cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1}). \end{aligned}$$

Βασικά θεωρήματα δέσμευσης

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$\begin{aligned} P(A_1A_2\ldots A_n) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \\ &\quad \cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}). \end{aligned}$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**

Βασικά θεωρήματα δέσμευσης

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|A_i).$$

- **Κανόνας του Bayes:**

Βασικά θεωρήματα δέσμευσης

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**
  $A_1, A_2, \dots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|A_i).$$

- **Κανόνας του Bayes:**

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}.$$

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k

  $=$

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) =$

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
  $=$

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
  $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 =$

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
  $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
$= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
$= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k
$=$

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
$= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
$= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k
$= n \cdot n \cdot n \cdots n =$

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
  $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k
  $= n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k$.

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k $= n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k$.
- Πλήθος συνδυασμών n ανά k

  $=$

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
  $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k
  $= n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k$.
- Πλήθος συνδυασμών n ανά k

  $= \binom{n}{k}$

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k $= n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k$.
- Πλήθος συνδυασμών n ανά k $= \binom{n}{k} = \dfrac{\text{Πλήθος διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!}$

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
$= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
$= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k
$= n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k$.
- Πλήθος συνδυασμών n ανά k
$= \binom{n}{k} = \frac{\text{Πλήθος διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
  $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k
  $= n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k$.
- Πλήθος συνδυασμών n ανά k
  $= \binom{n}{k} = \dfrac{\text{Πλήθος διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Πλήθος διαμερίσεων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ενός συνόλου με n στοιχεία
  $=$

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
  $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k
  $= n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k$.
- Πλήθος συνδυασμών n ανά k
  $= \binom{n}{k} = \frac{\text{Πλήθος διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Πλήθος διαμερίσεων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ενός συνόλου με n στοιχεία
  $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k $= n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k$.
- Πλήθος συνδυασμών n ανά k $= \binom{n}{k} = \frac{\text{Πλήθος διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Πλήθος διαμερίσεων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ενός συνόλου με n στοιχεία $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων k ειδών στοιχείων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ $=$

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
  $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k
  $= n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k$.
- Πλήθος συνδυασμών n ανά k
  $= \binom{n}{k} = \dfrac{\text{Πλήθος διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Πλήθος διαμερίσεων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ενός συνόλου με n στοιχεία
  $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων k ειδών στοιχείων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$
  $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.

Παράδειγμα 1: Παιχνίδι ΛΟΤΤΟ

Παράδειγμα 1: Παιχνίδι ΛΟΤΤΟ

- Παίκτης συμπληρώνει δελτίο που περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 49$ κυκλώνοντας 6 αριθμούς.

Παράδειγμα 1: Παιχνίδι ΛΟΤΤΟ

- Παίκτης συμπληρώνει δελτίο που περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 49$ κυκλώνοντας 6 αριθμούς.
- Κληρώνονται 6 αριθμοί από τους $1, 2, \ldots, 49$ χωρίς επανάθεση.

Παράδειγμα 1: Παιχνίδι ΛΟΤΤΟ

- Παίκτης συμπληρώνει δελτίο που περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 49$ κυκλώνοντας 6 αριθμούς.
- Κληρώνονται 6 αριθμοί από τους $1, 2, \ldots, 49$ χωρίς επανάθεση.
- X: Πλήθος κοινών αριθμών δελτίου και κλήρωσης.

Παράδειγμα 1: Παιχνίδι ΛΟΤΤΟ

- Παίκτης συμπληρώνει δελτίο που περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 49$ κυκλώνοντας 6 αριθμούς.
- Κληρώνονται 6 αριθμοί από τους $1, 2, \ldots, 49$ χωρίς επανάθεση.
- X: Πλήθος κοινών αριθμών δελτίου και κλήρωσης.
- $P(\text{``εξάρι''}) = P(X = 6) = ;$

Παράδειγμα 1: Παιχνίδι ΛΟΤΤΟ

- Παίκτης συμπληρώνει δελτίο που περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 49$ κυκλώνοντας 6 αριθμούς.
- Κληρώνονται 6 αριθμοί από τους $1, 2, \ldots, 49$ χωρίς επανάθεση.
- X: Πλήθος κοινών αριθμών δελτίου και κλήρωσης.
- $P(\text{``εξάρι''}) = P(X = 6) = ;\ ;$

Παράδειγμα 1: Παιχνίδι ΛΟΤΤΟ

- Παίκτης συμπληρώνει δελτίο που περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 49$ κυκλώνοντας 6 αριθμούς.
- Κληρώνονται 6 αριθμοί από τους $1, 2, \ldots, 49$ χωρίς επανάθεση.
- X: Πλήθος κοινών αριθμών δελτίου και κλήρωσης.
- $P(\text{“ἑξάρι”}) = P(X = 6) = ;\ ;\ ;$

Παράδειγμα 1: Παιχνίδι ΛΟΤΤΟ

- Παίκτης συμπληρώνει δελτίο που περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 49$ κυκλώνοντας 6 αριθμούς.
- Κληρώνονται 6 αριθμοί από τους $1, 2, \ldots, 49$ χωρίς επανάθεση.
- X: Πλήθος κοινών αριθμών δελτίου και κλήρωσης.
- $P(\text{``ἑξάρι''}) = P(X = 6) = ;\ ;\ ;$
- $P(\text{``πεντάρι''}) = P(X = 5) = ;$

Παράδειγμα 1: Παιχνίδι ΛΟΤΤΟ

- Παίκτης συμπληρώνει δελτίο που περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 49$ κυκλώνοντας 6 αριθμούς.
- Κληρώνονται 6 αριθμοί από τους $1, 2, \ldots, 49$ χωρίς επανάθεση.
- X: Πλήθος κοινών αριθμών δελτίου και κλήρωσης.
- $P(\text{``εξάρι''}) = P(X = 6) = ;\ ;\ ;$
- $P(\text{``πεντάρι''}) = P(X = 5) = ;\ ;$

Παράδειγμα 1: Παιχνίδι ΛΟΤΤΟ

- Παίκτης συμπληρώνει δελτίο που περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 49$ κυκλώνοντας 6 αριθμούς.
- Κληρώνονται 6 αριθμοί από τους $1, 2, \ldots, 49$ χωρίς επανάθεση.
- X: Πλήθος κοινών αριθμών δελτίου και κλήρωσης.
- $P(\text{``εξάρι''}) = P(X = 6) = ;\ ;\ ;$
- $P(\text{``πεντάρι''}) = P(X = 5) = ;\ ;\ ;$

Παράδειγμα 1: Παιχνίδι ΛΟΤΤΟ

- Παίκτης συμπληρώνει δελτίο που περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 49$ κυκλώνοντας 6 αριθμούς.
- Κληρώνονται 6 αριθμοί από τους $1, 2, \ldots, 49$ χωρίς επανάθεση.
- X: Πλήθος κοινών αριθμών δελτίου και κλήρωσης.
- $P(\text{``εξάρι''}) = P(X = 6) = ; \; ; \; ;$
- $P(\text{``πεντάρι''}) = P(X = 5) = ; \; ; \; ;$

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γεννεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γενεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P(\text{τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γενεθλίων}) = ;$

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γενεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P(\text{τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γενεθλίων}) = \,;$
- $p_n = \,;$

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γενεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P(\text{τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γενεθλίων}) = ;$
- $p_n = ;\ ;$

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γενεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P(\text{τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γενεθλίων}) = ;$
- $p_n = ;\ ;\ ;$

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γεννεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P(\text{τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γεννεθλίων}) = ;$
- $p_n = ;\ ;\ ; = 1 - \frac{365!/(365-n+1)!}{365^n}$.

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γεννεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P(\text{τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γεννεθλίων}) = \,;$
- $p_n = \,;\ ;\ ; = 1 - \frac{365!/(365-n+1)!}{365^n}$.
- Για ποιό n και πάνω θα στοιχηματίζατε ότι μεταξύ n ατόμων θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 με ίδια μέρα γεννεθλίων;

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γεννεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P(\text{τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γεννεθλίων}) = ;$
- $p_n = ;\ ;\ ; = 1 - \frac{365!/(365-n+1)!}{365^n}$.
- Για ποιό n και πάνω θα στοιχηματίζατε ότι μεταξύ n ατόμων θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 με ίδια μέρα γεννεθλίων;
- Ελάχιστος n ώστε $p_n > 0.5$;

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γεννεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P(\text{τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γεννεθλίων}) = ;$
- $p_n = ;\ ;\ ; = 1 - \frac{365!/(365-n+1)!}{365^n}.$
- Για ποιό n και πάνω θα στοιχηματίζατε ότι μεταξύ n ατόμων θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 με ίδια μέρα γεννεθλίων;
- Ελάχιστος n ώστε $p_n > 0.5$; ;

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γενεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P(\text{τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γενεθλίων}) = ;$
- $p_n = ; \; ; \; ; = 1 - \frac{365!/(365-n+1)!}{365^n}.$
- Για ποιό n και πάνω θα στοιχηματίζατε ότι μεταξύ n ατόμων θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 με ίδια μέρα γενεθλίων;
- Ελάχιστος n ώστε $p_n > 0.5$; ; ;

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γενεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P(\text{τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γενεθλίων}) = ;$
- $p_n = ;\ ;\ ; = 1 - \frac{365!/(365-n+1)!}{365^n}$.
- Για ποιό n και πάνω θα στοιχηματίζατε ότι μεταξύ n ατόμων θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 με ίδια μέρα γενεθλίων;
- Ελάχιστος n ώστε $p_n > 0.5$; ; ;

n	15	20	23	25	30	40	50	75
p_n	0.25	0.41	0.51	0.57	0.71	0.89	0.97	0.99

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γενεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P(\text{τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γενεθλίων}) = ;$
- $p_n = ;\ ;\ ; = 1 - \frac{365!/(365-n+1)!}{365^n}$.
- Για ποιό n και πάνω θα στοιχηματίζατε ότι μεταξύ n ατόμων θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 με ίδια μέρα γενεθλίων;
- Ελάχιστος n ώστε $p_n > 0.5$; ; ;

n	15	20	23	25	30	40	50	75
p_n	0.25	0.41	0.51	0.57	0.71	0.89	0.97	0.99

- Ελάχιστος n ώστε $p_n > 0.5$;

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γεννεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P($τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γεννεθλίων$) = ;$
- $p_n = ;\ ;\ ; = 1 - \frac{365!/(365-n+1)!}{365^n}$.
- Για ποιό n και πάνω θα στοιχηματίζατε ότι μεταξύ n ατόμων θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 με ίδια μέρα γεννεθλίων;
- Ελάχιστος n ώστε $p_n > 0.5$; ; ;

n	15	20	23	25	30	40	50	75
p_n	0.25	0.41	0.51	0.57	0.71	0.89	0.97	0.99

- Ελάχιστος n ώστε $p_n > 0.5$; ;

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γεννεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P$(τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γεννεθλίων) $=$;
- $p_n = \,;\,;\,; = 1 - \frac{365!/(365-n+1)!}{365^n}$.
- Για ποιό n και πάνω θα στοιχηματίζατε ότι μεταξύ n ατόμων θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 με ίδια μέρα γεννεθλίων;
- Ελάχιστος n ώστε $p_n > 0.5$; ; ;

n	15	20	23	25	30	40	50	75
p_n	0.25	0.41	0.51	0.57	0.71	0.89	0.97	0.99

- Ελάχιστος n ώστε $p_n > 0.5$; ; ;

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γενεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P(\text{τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γενεθλίων}) = ;$
- $p_n = ;\ ;\ ; = 1 - \frac{365!/(365-n+1)!}{365^n}$.
- Για ποιό n και πάνω θα στοιχηματίζατε ότι μεταξύ n ατόμων θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 με ίδια μέρα γενεθλίων;
- Ελάχιστος n ώστε $p_n > 0.5$; ; ;

n	15	20	23	25	30	40	50	75
p_n	0.25	0.41	0.51	0.57	0.71	0.89	0.97	0.99

- Ελάχιστος n ώστε $p_n > 0.5$; ; ; $= 23$.

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα των συναντήσεων

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- P(όλοι να πάρουν το βιβλίο τους) = ;

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους}) = ;\ ;$

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους}) = ;\ ;\ ;$

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους}) = ;\ ;\ ;$
- $P(\text{οι } 1, 2, \ldots, k \text{ να πάρουν το βιβλίο τους}) = ;$

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους}) = ;\ ;\ ;$
- $P(\text{οι } 1, 2, \ldots, k \text{ να πάρουν το βιβλίο τους}) = ;\ ;$

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- P(όλοι να πάρουν το βιβλίο τους) = ; ; ;
- P(οι $1, 2, \ldots, k$ να πάρουν το βιβλίο τους) = ; ; ;

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- P(όλοι να πάρουν το βιβλίο τους) = ; ; ;
- P(οι $1, 2, \ldots, k$ να πάρουν το βιβλίο τους) = ; ; ;
- P(κανένας να πάρει το βιβλίο του) = ;

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους}) = ;\ ;\ ;$
- $P(\text{οι } 1, 2, \ldots, k \text{ να πάρουν το βιβλίο τους}) = ;\ ;\ ;$
- $P(\text{κανένας να πάρει το βιβλίο του}) = ;\ ;$

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους}) = ;\ ;\ ;$
- $P(\text{οι } 1, 2, \ldots, k \text{ να πάρουν το βιβλίο τους}) = ;\ ;\ ;$
- $P(\text{κανένας να πάρει το βιβλίο του}) = ;\ ;\ ;$

Άσκηση 1: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

Άσκηση 1: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει 10 λευκά (Λ) και 5 μαύρα (Μ) σφαιρίδια.

Άσκηση 1: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει 10 λευκά (Λ) και 5 μαύρα (Μ) σφαιρίδια.
- Εξάγονται διαδοχικά 4 σφαιρίδια χωρίς επανάθεση.

Άσκηση 1: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει 10 λευκά (Λ) και 5 μαύρα (Μ) σφαιρίδια.
- Εξάγονται διαδοχικά 4 σφαιρίδια χωρίς επανάθεση.
- $P(1\text{ο } \Lambda,\ 2\text{ο } \mathrm{M},\ 3\text{ο } \mathrm{M},\ 4\text{ο } \Lambda\ )=;$

Άσκηση 1: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει 10 λευκά (Λ) και 5 μαύρα (Μ) σφαιρίδια.
- Εξάγονται διαδοχικά 4 σφαιρίδια χωρίς επανάθεση.
- $P($1ο Λ, 2ο Μ, 3ο Μ, 4ο Λ $)=$; ;

Άσκηση 1: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει 10 λευκά (Λ) και 5 μαύρα (Μ) σφαιρίδια.
- Εξάγονται διαδοχικά 4 σφαιρίδια χωρίς επανάθεση.
- P(1ο Λ, 2ο Μ, 3ο Μ, 4ο Λ)=; ; ;

Άσκηση 1: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει 10 λευκά (Λ) και 5 μαύρα (Μ) σφαιρίδια.
- Εξάγονται διαδοχικά 4 σφαιρίδια χωρίς επανάθεση.
- P(1ο Λ, 2ο Μ, 3ο Μ, 4ο Λ)=; ; ;

Άσκηση 2: Τοποθέτηση στο θέατρο

Άσκηση 2: Τοποθέτηση στο θέατρο

- Σε ένα θέατρο καθε σειρά αποτελείται από 7 κολλητά καθίσματα.

Άσκηση 2: Τοποθέτηση στο θέατρο

- Σε ένα θέατρο καθε σειρά αποτελείται από 7 κολλητά καθίσματα.
- 7 θεατές, οι $1, 2, \ldots, 7$ που έχουν εισιτήρια για μια συγκεκριμένη σειρά φθάνουν και πάνε προς το κάθισμά τους.

Άσκηση 2: Τοποθέτηση στο θέατρο

- Σε ένα θέατρο καθε σειρά αποτελείται από 7 κολλητά καθίσματα.
- 7 θεατές, οι $1, 2, \ldots, 7$ που έχουν εισιτήρια για μια συγκεκριμένη σειρά φθάνουν και πάνε προς το κάθισμά τους.
- Έχουν πρόσβαση στο κάθισμά τους και από τα δυο άκρα της σειράς.

Άσκηση 2: Τοποθέτηση στο θέατρο

- Σε ένα θέατρο καθε σειρά αποτελείται από 7 κολλητά καθίσματα.
- 7 θεατές, οι $1, 2, \ldots, 7$ που έχουν εισιτήρια για μια συγκεκριμένη σειρά φθάνουν και πάνε προς το κάθισμά τους.
- Έχουν πρόσβαση στο κάθισμά τους και από τα δυο άκρα της σειράς.
- Οι ήδη καθισμένοι θεατές ενοχλούνται αν κάποιος περάσει από μπροστά τους για να καθήσεις στη θέση του.

Άσκηση 2: Τοποθέτηση στο θέατρο

- Σε ένα θέατρο καθε σειρά αποτελείται από 7 κολλητά καθίσματα.
- 7 θεατές, οι $1, 2, \ldots, 7$ που έχουν εισιτήρια για μια συγκεκριμένη σειρά φθάνουν και πάνε προς το κάθισμά τους.
- Έχουν πρόσβαση στο κάθισμά τους και από τα δυο άκρα της σειράς.
- Οι ήδη καθισμένοι θεατές ενοχλούνται αν κάποιος περάσει από μπροστά τους για να καθήσεις στη θέση του.
- P(να καθήσουν όλοι χωρίς να ενοχλήσουν)$=$;

Άσκηση 2: Τοποθέτηση στο θέατρο

- Σε ένα θέατρο καθε σειρά αποτελείται από 7 κολλητά καθίσματα.
- 7 θεατές, οι $1, 2, \ldots, 7$ που έχουν εισιτήρια για μια συγκεκριμένη σειρά φθάνουν και πάνε προς το κάθισμά τους.
- Έχουν πρόσβαση στο κάθισμά τους και από τα δυο άκρα της σειράς.
- Οι ήδη καθισμένοι θεατές ενοχλούνται αν κάποιος περάσει από μπροστά τους για να καθήσεις στη θέση του.
- P(να καθήσουν όλοι χωρίς να ενοχλήσουν)$=$; ;

Άσκηση 2: Τοποθέτηση στο θέατρο

- Σε ένα θέατρο καθε σειρά αποτελείται από 7 κολλητά καθίσματα.
- 7 θεατές, οι $1, 2, \ldots, 7$ που έχουν εισιτήρια για μια συγκεκριμένη σειρά φθάνουν και πάνε προς το κάθισμά τους.
- Έχουν πρόσβαση στο κάθισμά τους και από τα δυο άκρα της σειράς.
- Οι ήδη καθισμένοι θεατές ενοχλούνται αν κάποιος περάσει από μπροστά τους για να καθήσεις στη θέση του.
- P(να καθήσουν όλοι χωρίς να ενοχλήσουν)$=$; ; ;

Άσκηση 2: Τοποθέτηση στο θέατρο

- Σε ένα θέατρο καθε σειρά αποτελείται από 7 κολλητά καθίσματα.
- 7 θεατές, οι $1, 2, \ldots, 7$ που έχουν εισιτήρια για μια συγκεκριμένη σειρά φθάνουν και πάνε προς το κάθισμά τους.
- Έχουν πρόσβαση στο κάθισμά τους και από τα δυο άκρα της σειράς.
- Οι ήδη καθισμένοι θεατές ενοχλούνται αν κάποιος περάσει από μπροστά τους για να καθήσεις στη θέση του.
- P(να καθήσουν όλοι χωρίς να ενοχλήσουν)$=$; ; ;

Άσκηση 3: Αποβίβαση σε ορόφους

Άσκηση 3: Αποβίβαση σε ορόφους

- 20 άνθρωποι επιβιβάζονται σε ανελκυστήρα στο ισόγειο 5όροφου κτηρίου.

Άσκηση 3: Αποβίβαση σε ορόφους

- 20 άνθρωποι επιβιβάζονται σε ανελκυστήρα στο ισόγειο 5όροφου κτηρίου.
- Πρόκειται να αποβιβαστούν ο καθένας σε κάποιον από τους ορόφους 1-5 (ο καθένας διαλέγει όροφο ισοπίθανα).

Άσκηση 3: Αποβίβαση σε ορόφους

- 20 άνθρωποι επιβιβάζονται σε ανελκυστήρα στο ισόγειο 5όροφου κτηρίου.
- Πρόκειται να αποβιβαστούν ο καθένας σε κάποιον από τους ορόφους 1-5 (ο καθένας διαλέγει όροφο ισοπίθανα).
- P(Τουλάχιστον ένας αποβιβάζεται σε κάθε όροφο)=;

Άσκηση 3: Αποβίβαση σε ορόφους

- 20 άνθρωποι επιβιβάζονται σε ανελκυστήρα στο ισόγειο 5όροφου κτηρίου.
- Πρόκειται να αποβιβαστούν ο καθένας σε κάποιον από τους ορόφους 1-5 (ο καθένας διαλέγει όροφο ισοπίθανα).
- P(Τουλάχιστον ένας αποβιβάζεται σε κάθε όροφο)=; ;

Άσκηση 3: Αποβίβαση σε ορόφους

- 20 άνθρωποι επιβιβάζονται σε ανελκυστήρα στο ισόγειο 5όροφου κτηρίου.
- Πρόκειται να αποβιβαστούν ο καθένας σε κάποιον από τους ορόφους 1-5 (ο καθένας διαλέγει όροφο ισοπίθανα).
- P(Τουλάχιστον ένας αποβιβάζεται σε κάθε όροφο)=; ; ;

Άσκηση 3: Αποβίβαση σε ορόφους

- 20 άνθρωποι επιβιβάζονται σε ανελκυστήρα στο ισόγειο 5όροφου κτηρίου.
- Πρόκειται να αποβιβαστούν ο καθένας σε κάποιον από τους ορόφους 1-5 (ο καθένας διαλέγει όροφο ισοπίθανα).
- P(Τουλάχιστον ένας αποβιβάζεται σε κάθε όροφο)=; ; ;

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:

  1.3 Δεσμευμένη Πιθανότητα
  1.4 Θεώρημα Συνολικής Πιθανότητας και ο Κανόνας του Bayes
  1.5 Ανεξαρτησία
  1.6 Αρίθμηση
  1.7 Σύνοψη και Συζήτηση
  Προβλήματα

- Ασκήσεις:

  Οι ασκήσεις που περιέχονται σε αυτές τις διαφάνειες και δεν λύθηκαν στην τάξη.