Πιθανότητες και Στατιστική
Διάλεξη 3
Δεσμευμένη Πιθανότητα
Βασικές ιδιότητες

Αντώνης Οικονόμου

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

14 Οκτωβρίου 2014

Παράδειγμα δεσμευμένης κλασικής πιθανότητας

Παράδειγμα δεσμευμένης κλασικής πιθανότητας

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δίκαιου ζαριού.

Παράδειγμα δεσμευμένης κλασικής πιθανότητας

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δίκαιου ζαριού.
- $P(\text{άρτιο αποτέλεσμα}) =$

Παράδειγμα δεσμευμένης κλασικής πιθανότητας

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δίκαιου ζαριού.
- $P(\text{άρτιο αποτέλεσμα}) = 3/6{=}1/2$

Παράδειγμα δεσμευμένης κλασικής πιθανότητας

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δίκαιου ζαριού.
- $P(\text{άρτιο αποτέλεσμα}) = 3/6{=}1/2$
- $P(\text{άρτιο αποτέλεσμα}|\text{αποτέλεσμα} \leq 3) =$

Παράδειγμα δεσμευμένης κλασικής πιθανότητας

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δίκαιου ζαριού.
- $P(\text{άρτιο αποτέλεσμα}) = 3/6{=}1/2$
- $P(\text{άρτιο αποτέλεσμα}|\text{αποτέλεσμα} \leq 3) = 1/3.$

Παράδειγμα δεσμευμένης κλασικής πιθανότητας

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δίκαιου ζαριού.
- $P(\text{άρτιο αποτέλεσμα}) = 3/6{=}1/2$
- $P(\text{άρτιο αποτέλεσμα}|\text{αποτέλεσμα} \leq 3) = 1/3.$
- Πληροφορία $\Rightarrow$ Περιορισμός του δ.χ.

Παράδειγμα δεσμευμένης κλασικής πιθανότητας

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δίκαιου ζαριού.
- $P(\text{άρτιο αποτέλεσμα}) = 3/6{=}1/2$
- $P(\text{άρτιο αποτέλεσμα}|\text{αποτέλεσμα} \leq 3) = 1/3$.
- Πληροφορία $\Rightarrow$ Περιορισμός του δ.χ.
- $P(A|B) = \dfrac{\text{πλήθος δειγματικών σημείων στο } AB}{\text{πλήθος δειγματικών σημείων στο } B}$ $= \frac{P(AB)}{P(B)}$.

Ορισμός

Ορισμός

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας.

Ορισμός

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας.
- Ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega$ με $P(B) > 0$.

Ορισμός

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας.
- Ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega$ με $P(B) > 0$.
- Για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$ ορίζουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα του A δεδομένου του B:

Ορισμός

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας.
- Ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega$ με $P(B) > 0$.
- Για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$ ορίζουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα του A δεδομένου του B:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Ορισμός

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας.
- Ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega$ με $P(B) > 0$.
- Για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$ ορίζουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα του A δεδομένου του B:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

- Προσοχή! $P(A|B) \neq P(B|A)$.

Νέο μέτρο πιθανότητας

Νέο μέτρο πιθανότητας

- Για κάθε B, η $P_B(A) = P(A|B)$ ορίζει ένα νέο μέτρο πιθανότητας:

Νέο μέτρο πιθανότητας

- Για κάθε B, η $P_B(A) = P(A|B)$ ορίζει ένα νέο μέτρο πιθανότητας:
- $P(A|B) \geq 0$. (μη-αρνητικότητα)

Νέο μέτρο πιθανότητας

- Για κάθε B, η $P_B(A) = P(A|B)$ ορίζει ένα νέο μέτρο πιθανότητας:
- $P(A|B) \geq 0$. (μη-αρνητικότητα)
- $P(\Omega|B) = 1$. (κανονικοποίηση)

Νέο μέτρο πιθανότητας

- Για κάθε B, η $P_B(A) = P(A|B)$ ορίζει ένα νέο μέτρο πιθανότητας:
- $P(A|B) \geq 0$. (μη-αρνητικότητα)
- $P(\Omega|B) = 1$. (κανονικοποίηση)
- $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο
$\Rightarrow P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$. (σ-προσθετικότητα)

Νέο μέτρο πιθανότητας

- Για κάθε B, η $P_B(A) = P(A|B)$ ορίζει ένα νέο μέτρο πιθανότητας:
- $P(A|B) \geq 0$. (μη-αρνητικότητα)
- $P(\Omega|B) = 1$. (κανονικοποίηση)
- $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο
  $\Rightarrow P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$. (σ-προσθετικότητα)
- Όλες οι ιδιότητες της πιθανότητας ισχύουν και για τη δεσμευμένη πιθανότητα.

Παράδειγμα 1

Παράδειγμα 1

- Πείραμα τύχης: Επιλογή ατόμου από πεπερασμένο πληθυσμό. Καταγραφή ύψους - νούμερου παπουτσιού.

Παράδειγμα 1

- Πείραμα τύχης: Επιλογή ατόμου από πεπερασμένο πληθυσμό. Καταγραφή ύψους - νούμερου παπουτσιού.
- $P(\text{νούμερο παπουτσιού} = 45 | \text{ύψος} = 1.80)$

Παράδειγμα 1

- Πείραμα τύχης: Επιλογή ατόμου από πεπερασμένο πληθυσμό. Καταγραφή ύψους - νούμερου παπουτσιού.
- $P($νούμερο παπουτσιού $= 45|$ύψος $=1.80)$ ...

Παράδειγμα 1

- Πείραμα τύχης: Επιλογή ατόμου από πεπερασμένο πληθυσμό. Καταγραφή ύψους - νούμερου παπουτσιού.
- $P(\text{νούμερο παπουτσιού} = 45 | \text{ύψος} = 1.80)$ ...

$$= \frac{\text{πλήθος ατόμων με νούμερο 45, ύψος 1.80}}{\text{πλήθος ατόμων με ύψος 1.80}}.$$

Παράδειγμα 2

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα "Πιθανότητες" ή "Πληροφορική".

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα "Πιθανότητες " ή "Πληροφορική".
- $P(\text{να δώσει "Πιθανότητες "}) = 50\%.$
  $P(\text{να δώσει "Πληροφορική"}) = 50\%.$

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα "Πιθανότητες" ή "Πληροφορική".
- P(να δώσει "Πιθανότητες") $= 50\%$.
  P(να δώσει "Πληροφορική") $= 50\%$.
- P(να περάσει$|$δίνει "Πιθανότητες") $= 60\%$.
  P(να περάσει$|$δίνει "Πληροφορική") $= 80\%$.

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα "Πιθανότητες " ή "Πληροφορική".
- P(να δώσει "Πιθανότητες ") $= 50\%$.
  P(να δώσει "Πληροφορική") $= 50\%$.
- P(να περάσει|δίνει "Πιθανότητες ") $= 60\%$.
  P(να περάσει|δίνει "Πληροφορική") $= 80\%$.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
  1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
  2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα "Πιθανότητες " ή "Πληροφορική".
- $P($να δώσει "Πιθανότητες "$) = 50\%$.
  $P($να δώσει "Πληροφορική"$) = 50\%$.
- $P($να περάσει$|$δίνει "Πιθανότητες "$) = 60\%$.
  $P($να περάσει$|$δίνει "Πληροφορική"$) = 80\%$.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
  1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
  2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.
- $P($να δώσει "Πιθανότητες " και να περάσει$) =;$

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα "Πιθανότητες" ή "Πληροφορική".
- $P(\text{να δώσει "Πιθανότητες"}) = 50\%$.
  $P(\text{να δώσει "Πληροφορική"}) = 50\%$.
- $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει "Πιθανότητες"}) = 60\%$.
  $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει "Πληροφορική"}) = 80\%$.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
  1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
  2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.
- $P(\text{να δώσει "Πιθανότητες" και να περάσει}) =;\ ;$

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα "Πιθανότητες" ή "Πληροφορική".
- P(να δώσει "Πιθανότητες") = 50%.
  P(να δώσει "Πληροφορική") = 50%.
- P(να περάσει|δίνει "Πιθανότητες") = 60%.
  P(να περάσει|δίνει "Πληροφορική") = 80%.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
  1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
  2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.
- P(να δώσει "Πιθανότητες" και να περάσει) =; ; ;

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα "Πιθανότητες " ή "Πληροφορική".
- $P($να δώσει "Πιθανότητες "$) = 50\%$.
  $P($να δώσει "Πληροφορική"$) = 50\%$.
- $P($να περάσει$|$δίνει "Πιθανότητες "$) = 60\%$.
  $P($να περάσει$|$δίνει "Πληροφορική"$) = 80\%$.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
  1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
  2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.
- $P($να δώσει "Πιθανότητες " και να περάσει$) =$; ; ;
  $= 0.5 \times 0.6 = 0.3$.

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα "Πιθανότητες " ή "Πληροφορική".
- P(να δώσει "Πιθανότητες ") $= 50\%$.
  P(να δώσει "Πληροφορική") $= 50\%$.
- P(να περάσει|δίνει "Πιθανότητες ") $= 60\%$.
  P(να περάσει|δίνει "Πληροφορική") $= 80\%$.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
  1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
  2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.
- P(να δώσει "Πιθανότητες " και να περάσει) =; ; ;
  $= 0.5 \times 0.6 = 0.3$.
- P(να περάσει) =;

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα "Πιθανότητες " ή "Πληροφορική".
- $P(\text{να δώσει "Πιθανότητες "}) = 50\%.$
  $P(\text{να δώσει "Πληροφορική"}) = 50\%.$
- $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει "Πιθανότητες "}) = 60\%.$
  $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει "Πληροφορική"}) = 80\%.$
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
  1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
  2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.
- $P(\text{να δώσει "Πιθανότητες " και να περάσει}) =;\ ;\ ;$
  $= 0.5 \times 0.6 = 0.3.$
- $P(\text{να περάσει}) =;\ ;$

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα "Πιθανότητες " ή "Πληροφορική".
- $P(\text{να δώσει "Πιθανότητες "}) = 50\%$.
  $P(\text{να δώσει "Πληροφορική"}) = 50\%$.
- $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει "Πιθανότητες "}) = 60\%$.
  $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει "Πληροφορική"}) = 80\%$.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
  1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
  2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.
- $P(\text{να δώσει "Πιθανότητες " και να περάσει}) =; \; ; \; ;$
  $= 0.5 \times 0.6 = 0.3$.
- $P(\text{να περάσει}) =; \; ; \; ;$

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα "Πιθανότητες " ή "Πληροφορική".
- $P(\text{να δώσει "Πιθανότητες "}) = 50\%$.
  $P(\text{να δώσει "Πληροφορική"}) = 50\%$.
- $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει "Πιθανότητες "}) = 60\%$.
  $P(\text{να περάσει}|\text{δίνει "Πληροφορική"}) = 80\%$.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
  1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
  2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.
- $P(\text{να δώσει "Πιθανότητες " και να περάσει}) =; \ ; \ ;$
  $= 0.5 \times 0.6 = 0.3$.
- $P(\text{να περάσει}) =; \ ; \ ; = 0.5 \times 0.6 + 0.5 \times 0.8 = 0.7$.

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα "Πιθανότητες " ή "Πληροφορική".
- P(να δώσει "Πιθανότητες ") $= 50\%$.
  P(να δώσει "Πληροφορική") $= 50\%$.
- P(να περάσει|δίνει "Πιθανότητες ") $= 60\%$.
  P(να περάσει|δίνει "Πληροφορική") $= 80\%$.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
  1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
  2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.
- P(να δώσει "Πιθανότητες " και να περάσει) =; ; ;
  $= 0.5 \times 0.6 = 0.3$.
- P(να περάσει) =; ; ; $= 0.5 \times 0.6 + 0.5 \times 0.8 = 0.7$.
- P(έδωσε "Πιθανότητες "|πέρασε) =;

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα "Πιθανότητες" ή "Πληροφορική".
- $P($να δώσει "Πιθανότητες"$) = 50\%$.
  $P($να δώσει "Πληροφορική"$) = 50\%$.
- $P($να περάσει$|$δίνει "Πιθανότητες"$) = 60\%$.
  $P($να περάσει$|$δίνει "Πληροφορική"$) = 80\%$.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
  1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
  2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.
- $P($να δώσει "Πιθανότητες" και να περάσει$) =;\ ;\ ;$
  $= 0.5 \times 0.6 = 0.3$.
- $P($να περάσει$) =;\ ;\ ; = 0.5 \times 0.6 + 0.5 \times 0.8 = 0.7$.
- $P($έδωσε "Πιθανότητες"$|$πέρασε$) =;\ ;$

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα "Πιθανότητες " ή "Πληροφορική".
- P(να δώσει "Πιθανότητες ") $= 50\%$.
  P(να δώσει "Πληροφορική") $= 50\%$.
- P(να περάσει|δίνει "Πιθανότητες ") $= 60\%$.
  P(να περάσει|δίνει "Πληροφορική") $= 80\%$.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
  1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
  2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.
- P(να δώσει "Πιθανότητες " και να περάσει) =; ; ;
  $= 0.5 \times 0.6 = 0.3$.
- P(να περάσει) =; ; ; $= 0.5 \times 0.6 + 0.5 \times 0.8 = 0.7$.
- P(έδωσε "Πιθανότητες "|πέρασε) =; ; ;

Παράδειγμα 2

- Φοιτητής σκέφτεται να δώσει το μάθημα "Πιθανότητες" ή "Πληροφορική".
- P(να δώσει "Πιθανότητες") $= 50\%$.
  P(να δώσει "Πληροφορική") $= 50\%$.
- P(να περάσει|δίνει "Πιθανότητες") $= 60\%$.
  P(να περάσει|δίνει "Πληροφορική") $= 80\%$.
- Πείραμα τύχης 2 σταδίων:
  1ο στάδιο: Επιλογή μαθήματος.
  2ο στάδιο: Περνάει / Δεν περνάει.
- P(να δώσει "Πιθανότητες" και να περάσει) $=; \; ; \; ;$
  $= 0.5 \times 0.6 = 0.3$.
- P(να περάσει) $=; \; ; \; ; = 0.5 \times 0.6 + 0.5 \times 0.8 = 0.7$.
- P(έδωσε "Πιθανότητες"|πέρασε) $=; \; ; \; ; = \frac{0.3}{0.7} \simeq 0.429$.

Βασικά υπολογιστικά θεωρήματα

Βασικά υπολογιστικά θεωρήματα

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

Βασικά υπολογιστικά θεωρήματα

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$\begin{aligned} P(A_1A_2\ldots A_n) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \\ &\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}). \end{aligned}$$

Βασικά υπολογιστικά θεωρήματα

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 \ldots A_n) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \\ &\quad \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1}). \end{aligned}$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**

Βασικά υπολογιστικά θεωρήματα

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|A_i).$$

Βασικά υπολογιστικά θεωρήματα

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**
$A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|A_i).$$

- **Κανόνας του Bayes:**

Βασικά υπολογιστικά θεωρήματα

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**
  $A_1, A_2, \dots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|A_i).$$

- **Κανόνας του Bayes:**

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}.$$

Άσκηση 1: Αιματολογικό τέστ

Άσκηση 1: Αιματολογικό τέστ

- Αιματολογικό τεστ για σπάνια ασθένεια.

Άσκηση 1: Αιματολογικό τέστ

- Αιματολογικό τεστ για σπάνια ασθένεια.
- $P(\text{ασθενής}) = 0.001$.

Άσκηση 1: Αιματολογικό τέστ

- Αιματολογικό τεστ για σπάνια ασθένεια.
- $P(\text{ασθενής}) = 0.001$.
- $P(\text{αληθές θετικό}) = P(\text{θετικό τέστ}|\text{ασθενής}) = 0.95$.

Άσκηση 1: Αιματολογικό τέστ

- Αιματολογικό τεστ για σπάνια ασθένεια.
- $P(\text{ασθενής}) = 0.001$.
- $P(\text{αληθές θετικό}) = P(\text{θετικό τέστ}|\text{ασθενής}) = 0.95$.
- $P(\text{αληθές αρνητ.}) = P(\text{αρνητ. τέστ}|\text{υγιής}) = 0.95$.

Άσκηση 1: Αιματολογικό τέστ

- Αιματολογικό τεστ για σπάνια ασθένεια.
- $P(\text{ασθενής}) = 0.001$.
- $P(\text{αληθές θετικό}) = P(\text{θετικό τέστ}|\text{ασθενής}) = 0.95$.
- $P(\text{αληθές αρνητ.}) = P(\text{αρνητ. τέστ}|\text{υγιής}) = 0.95$.
- Είναι διαγνωστικά αξιόπιστο το τέστ;

Άσκηση 1: Αιματολογικό τέστ

- Αιματολογικό τεστ για σπάνια ασθένεια.
- $P(\text{ασθενής}) = 0.001$.
- $P(\text{αληθές θετικό}) = P(\text{θετικό τέστ}|\text{ασθενής}) = 0.95$.
- $P(\text{αληθές αρνητ.}) = P(\text{αρνητ. τέστ}|\text{υγιής}) = 0.95$.
- Είναι διαγνωστικά αξιόπιστο το τέστ;
- Πρέπει να υπολογίσω την

Άσκηση 1: Αιματολογικό τέστ

- Αιματολογικό τεστ για σπάνια ασθένεια.
- $P(\text{ασθενής}) = 0.001$.
- $P(\text{αληθές θετικό}) = P(\text{θετικό τέστ}|\text{ασθενής}) = 0.95$.
- $P(\text{αληθές αρνητ.}) = P(\text{αρνητ. τέστ}|\text{υγιής}) = 0.95$.
- Είναι διαγνωστικά αξιόπιστο το τέστ;
- Πρέπει να υπολογίσω την $P(\text{ασθενής}|\text{θετικό τέστ})$.

Άσκηση 1: Αιματολογικό τέστ

- Αιματολογικό τεστ για σπάνια ασθένεια.
- $P(\text{ασθενής}) = 0.001$.
- $P(\text{αληθές θετικό}) = P(\text{θετικό τέστ}|\text{ασθενής}) = 0.95$.
- $P(\text{αληθές αρνητ.}) = P(\text{αρνητ. τέστ}|\text{υγιής}) = 0.95$.
- Είναι διαγνωστικά αξιόπιστο το τέστ;
- Πρέπει να υπολογίσω την $P(\text{ασθενής}|\text{θετικό τέστ})$.
- ...

Άσκηση 1: Αιματολογικό τέστ

- Αιματολογικό τεστ για σπάνια ασθένεια.
- $P(\text{ασθενής}) = 0.001$.
- $P(\text{αληθές θετικό}) = P(\text{θετικό τέστ}|\text{ασθενής}) = 0.95$.
- $P(\text{αληθές αρνητ.}) = P(\text{αρνητ. τέστ}|\text{υγιής}) = 0.95$.
- Είναι διαγνωστικά αξιόπιστο το τέστ;
- Πρέπει να υπολογίσω την $P(\text{ασθενής}|\text{θετικό τέστ})$.
- ...
- $P(\text{ασθενής}|\text{θετικό τέστ}) = 0.0187 \simeq 2\%$!

Άσκηση 1: Αιματολογικό τέστ

- Αιματολογικό τεστ για σπάνια ασθένεια.
- $P(\text{ασθενής}) = 0.001$.
- $P(\text{αληθές θετικό}) = P(\text{θετικό τέστ}|\text{ασθενής}) = 0.95$.
- $P(\text{αληθές αρνητ.}) = P(\text{αρνητ. τέστ}|\text{υγιής}) = 0.95$.
- Είναι διαγνωστικά αξιόπιστο το τέστ;
- Πρέπει να υπολογίσω την $P(\text{ασθενής}|\text{θετικό τέστ})$.
- ...
- $P(\text{ασθενής}|\text{θετικό τέστ}) = 0.0187 \simeq 2\%!$
- Είναι σημαντικό σε σπάνιες ασθένειες η $P(\text{αληθές αρνητ.})$ να είναι πολύ μεγάλη.

Άσκηση 2: Οικογένεια με δυο παιδιά

Άσκηση 2: Οικογένεια με δυο παιδιά

- Οικογένεια με δυο παιδιά.

Άσκηση 2: Οικογένεια με δυο παιδιά

- Οικογένεια με δυο παιδιά.
- P(έχει 2 κορίτσια|έχει 1 τουλάχιστον κορίτσι)=;

Άσκηση 2: Οικογένεια με δυο παιδιά

- Οικογένεια με δυο παιδιά.
- P(έχει 2 κορίτσια|έχει 1 τουλάχιστον κορίτσι)=; ;

Άσκηση 2: Οικογένεια με δυο παιδιά

- Οικογένεια με δυο παιδιά.
- P(έχει 2 κορίτσια|έχει 1 τουλάχιστον κορίτσι)=; ; ;

Άσκηση 2: Οικογένεια με δυο παιδιά

- Οικογένεια με δυο παιδιά.
- P(έχει 2 κορίτσια|έχει 1 τουλάχιστον κορίτσι)=; ; ; $= \frac{1}{3}$.

Άσκηση 2: Οικογένεια με δυο παιδιά

- Οικογένεια με δυο παιδιά.
- P(έχει 2 κορίτσια|έχει 1 τουλάχιστον κορίτσι)=; ; ; $= \frac{1}{3}$.
- P(έχει 2 κορίτσια|το πρωτότοκο είναι κορίτσι)=;

Άσκηση 2: Οικογένεια με δυο παιδιά

- Οικογένεια με δυο παιδιά.
- P(έχει 2 κορίτσια|έχει 1 τουλάχιστον κορίτσι)=; ; ; $= \frac{1}{3}$.
- P(έχει 2 κορίτσια|το πρωτότοκο είναι κορίτσι)=; ;

Άσκηση 2: Οικογένεια με δυο παιδιά

- Οικογένεια με δυο παιδιά.
- P(έχει 2 κορίτσια|έχει 1 τουλάχιστον κορίτσι)=; ; ; $= \frac{1}{3}$.
- P(έχει 2 κορίτσια|το πρωτότοκο είναι κορίτσι)=; ; ;

Άσκηση 2: Οικογένεια με δυο παιδιά

- Οικογένεια με δυο παιδιά.
- P(έχει 2 κορίτσια|έχει 1 τουλάχιστον κορίτσι)=; ; ; $= \frac{1}{3}$.
- P(έχει 2 κορίτσια|το πρωτότοκο είναι κορίτσι)=; ; ; $= \frac{1}{2}$.

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

- Ερώτηση πολλαπλής επιλογής με m επιλογές:
  1 σωστή (Σ) και $m-1$ λάθος (Λ).

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

- Ερώτηση πολλαπλής επιλογής με m επιλογές:
  1 σωστή (Σ) και $m-1$ λάθος (Λ).
- Ποσοστό εξεταζομένων που γνωρίζουν την $\Sigma = p$.

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

- Ερώτηση πολλαπλής επιλογής με m επιλογές:
  1 σωστή (Σ) και $m-1$ λάθος (Λ).
- Ποσοστό εξεταζομένων που γνωρίζουν την $\Sigma = p$.
- Ποσοστό εξεταζομ. που απαντούν στην τύχη $= 1-p$.

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

- Ερώτηση πολλαπλής επιλογής με m επιλογές:
  1 σωστή (Σ) και $m-1$ λάθος (Λ).
- Ποσοστό εξεταζομένων που γνωρίζουν την $\Sigma = p$.
- Ποσοστό εξεταζομ. που απαντούν στην τύχη $= 1-p$.
- Πείραμα τύχης: Επιλογή εξεταζόμενου - Απάντηση της ερώτησης.

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

- Ερώτηση πολλαπλής επιλογής με m επιλογές:
  1 σωστή (Σ) και $m-1$ λάθος (Λ).
- Ποσοστό εξεταζομένων που γνωρίζουν την $\Sigma = p$.
- Ποσοστό εξεταζομ. που απαντούν στην τύχη $= 1 - p$.
- Πείραμα τύχης: Επιλογή εξεταζόμενου - Απάντηση της ερώτησης.
- $p_1 = P(\text{ο εξεταζόμενος απάντησε την } \Sigma) =;$

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

- Ερώτηση πολλαπλής επιλογής με m επιλογές: 1 σωστή (Σ) και $m-1$ λάθος (Λ).
- Ποσοστό εξεταζομένων που γνωρίζουν την $\Sigma = p$.
- Ποσοστό εξεταζομ. που απαντούν στην τύχη $= 1 - p$.
- Πείραμα τύχης: Επιλογή εξεταζόμενου - Απάντηση της ερώτησης.
- $p_1 = P(\text{ο εξεταζόμενος απάντησε την } \Sigma) =;\ ;$

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

- Ερώτηση πολλαπλής επιλογής με m επιλογές:
  1 σωστή (Σ) και $m-1$ λάθος (Λ).
- Ποσοστό εξεταζομένων που γνωρίζουν την $\Sigma = p$.
- Ποσοστό εξεταζομ. που απαντούν στην τύχη $= 1-p$.
- Πείραμα τύχης: Επιλογή εξεταζόμενου - Απάντηση της ερώτησης.
- $p_1 = P(\text{ο εξεταζόμενος απάντησε την } \Sigma) =;\ ;\ ;$

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

- Ερώτηση πολλαπλής επιλογής με m επιλογές: 1 σωστή (Σ) και $m-1$ λάθος (Λ).
- Ποσοστό εξεταζομένων που γνωρίζουν την $\Sigma = p$.
- Ποσοστό εξεταζομ. που απαντούν στην τύχη $= 1 - p$.
- Πείραμα τύχης: Επιλογή εξεταζόμενου - Απάντηση της ερώτησης.
- $p_1 = P(\text{ο εξεταζόμενος απάντησε την } \Sigma) =;\ ;\ ;$
  $= p \times 1 + (1-p) \times \frac{1}{m}$

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

- Ερώτηση πολλαπλής επιλογής με m επιλογές: 1 σωστή (Σ) και $m-1$ λάθος (Λ).
- Ποσοστό εξεταζομένων που γνωρίζουν την $\Sigma = p$.
- Ποσοστό εξεταζομ. που απαντούν στην τύχη $= 1-p$.
- Πείραμα τύχης: Επιλογή εξεταζόμενου - Απάντηση της ερώτησης.
- $p_1 = P(\text{ο εξεταζόμενος απάντησε την } \Sigma) =; \; ; \; ;$
  $= p \times 1 + (1-p) \times \frac{1}{m}$
- $p_2 = P(\text{γνώριζε την } \Sigma | \text{απάντησε την } \Sigma) =;$

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

- Ερώτηση πολλαπλής επιλογής με m επιλογές:
  1 σωστή (Σ) και $m-1$ λάθος (Λ).
- Ποσοστό εξεταζομένων που γνωρίζουν την $\Sigma = p$.
- Ποσοστό εξεταζομ. που απαντούν στην τύχη $= 1-p$.
- Πείραμα τύχης: Επιλογή εξεταζόμενου - Απάντηση της ερώτησης.
- $p_1 = P(\text{ο εξεταζόμενος απάντησε την } \Sigma) =;\ ;\ ;$
  $= p \times 1 + (1-p) \times \frac{1}{m}$
- $p_2 = P(\text{γνώριζε την } \Sigma | \text{απάντησε την } \Sigma) =;\ ;$

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

- Ερώτηση πολλαπλής επιλογής με m επιλογές: 1 σωστή (Σ) και $m-1$ λάθος (Λ).
- Ποσοστό εξεταζομένων που γνωρίζουν την $\Sigma = p$.
- Ποσοστό εξεταζομ. που απαντούν στην τύχη $= 1-p$.
- Πείραμα τύχης: Επιλογή εξεταζόμενου - Απάντηση της ερώτησης.
- $p_1 = P(\text{ο εξεταζόμενος απάντησε την } \Sigma) =;\ ;\ ;$ $= p \times 1 + (1-p) \times \frac{1}{m}$
- $p_2 = P(\text{γνώριζε την } \Sigma | \text{απάντησε την } \Sigma) =;\ ;\ ;$

Άσκηση 3: Ερώτηση πολλαπλής επιλογής

- Ερώτηση πολλαπλής επιλογής με m επιλογές: 1 σωστή (Σ) και $m-1$ λάθος (Λ).
- Ποσοστό εξεταζομένων που γνωρίζουν την $\Sigma = p$.
- Ποσοστό εξεταζομ. που απαντούν στην τύχη $= 1 - p$.
- Πείραμα τύχης: Επιλογή εξεταζόμενου - Απάντηση της ερώτησης.
- $p_1 = P(\text{ο εξεταζόμενος απάντησε την } \Sigma) =;\ ;\ ;$
  $= p \times 1 + (1-p) \times \frac{1}{m}$
- $p_2 = P(\text{γνώριζε την } \Sigma | \text{απάντησε την } \Sigma) =;\ ;\ ;$
  $= \frac{p \times 1}{p \times 1 + (1-p) \times \frac{1}{m}} = \frac{mp}{(m-1)p+1}$.

Άσκηση 4: Οι τρεις κάρτες

Άσκηση 4: Οι τρεις κάρτες

- Υπάρχουν 3 κάρτες βαμμένες στις δυο πλευρές τους:

Άσκηση 4: Οι τρεις κάρτες

- Υπάρχουν 3 κάρτες βαμμένες στις δυο πλευρές τους: Κόκκινη-Κόκκινη, Κόκκινη-Μαύρη, Μαύρη-Μαύρη.

Άσκηση 4: Οι τρεις κάρτες

- Υπάρχουν 3 κάρτες βαμμένες στις δυο πλευρές τους: Κόκκινη-Κόκκινη, Κόκκινη-Μαύρη, Μαύρη-Μαύρη.
- Επιλέγεται μία στην τύχη.

Άσκηση 4: Οι τρεις κάρτες

- Υπάρχουν 3 κάρτες βαμμένες στις δυο πλευρές τους: Κόκκινη-Κόκκινη, Κόκκινη-Μαύρη, Μαύρη-Μαύρη.
- Επιλέγεται μία στην τύχη.
- Εμφανίζεται η μια πλευρά της στην τύχη.

Άσκηση 4: Οι τρεις κάρτες

- Υπάρχουν 3 κάρτες βαμμένες στις δυο πλευρές τους: Κόκκινη-Κόκκινη, Κόκκινη-Μαύρη, Μαύρη-Μαύρη.
- Επιλέγεται μία στην τύχη.
- Εμφανίζεται η μια πλευρά της στην τύχη.
- $P(\text{άλλη πλευρά μπλέ}|\text{εμφανίστηκε πλευρά μπλε}) =$;

Άσκηση 4: Οι τρεις κάρτες

- Υπάρχουν 3 κάρτες βαμμένες στις δυο πλευρές τους: Κόκκινη-Κόκκινη, Κόκκινη-Μαύρη, Μαύρη-Μαύρη.
- Επιλέγεται μία στην τύχη.
- Εμφανίζεται η μια πλευρά της στην τύχη.
- $P(\text{άλλη πλευρά μπλέ}|\text{εμφανίστηκε πλευρά μπλε}) = ;\ ;$

Άσκηση 4: Οι τρεις κάρτες

- Υπάρχουν 3 κάρτες βαμμένες στις δυο πλευρές τους: Κόκκινη-Κόκκινη, Κόκκινη-Μαύρη, Μαύρη-Μαύρη.
- Επιλέγεται μία στην τύχη.
- Εμφανίζεται η μια πλευρά της στην τύχη.
- $P(\text{άλλη πλευρά μπλέ}|\text{εμφανίστηκε πλευρά μπλε}) = ;\ ;\ ;$

Άσκηση 4: Οι τρεις κάρτες

- Υπάρχουν 3 κάρτες βαμμένες στις δυο πλευρές τους: Κόκκινη-Κόκκινη, Κόκκινη-Μαύρη, Μαύρη-Μαύρη.
- Επιλέγεται μία στην τύχη.
- Εμφανίζεται η μια πλευρά της στην τύχη.
- $P(\text{άλλη πλευρά μπλέ}|\text{εμφανίστηκε πλευρά μπλε}) = ;\ ;\ ;$ $= \frac{2}{3}$.

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:
  - 1.3 Δεσμευμένη Πιθανότητα
  - 1.4 Θεώρημα Συνολικής Πιθανότητας και ο Κανόνας του Bayes
- Ασκήσεις:
  - 1.3 Προβλήματα 14, 17
  - 1.4 Προβλήματα 19, 21, 22