Αρμονική Ανάλυση (2014-15)

Φυλλάδιο 4

Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: Τετάρτη 14 Ιανουαρίου 2015.

1. Έστω $\tilde{D}_n$ ο n-οστός συζυγής πυρήνας Dirichlet. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^{\pi} \tilde{D}_n(t)\,dt = 1.$$

2. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι η f παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στο $x \in \mathbb{T}$, με άλμα $d = f(x+0) - f(x-0)$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{s}_n(f,x)}{\ln n} = -\frac{d}{\pi}.$$

Συμπεράνατε ότι αν η f παρουσιάζει άλμα στο x τότε η $\tilde{s}_n(f,x)$ αποκλίνει.

3. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι η $f + i\tilde{f}$ δεν μπορεί να παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους σε κανένα σημείο του $\mathbb{T}$.

4. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε x σε ένα ανοικτό διάστημα $I \subseteq \mathbb{T}$. Δείξτε ότι η $\tilde{s}_n(f,x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό διάστημα $[a,b] \subset I$.

5. Για κάθε $p > 0$, ο ασθενής $L^p(\mathbb{T})$ είναι ο χώρος όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων για τις οποίες

$$\|f\|_{p,\infty} := \sup\{\lambda[m(\{x : |f(x)| > \lambda\})]^{1/p} : \lambda > 0\} < \infty.$$

Έστω $0 < p < \infty$ και $0 < \gamma < 1$. Δείξτε ότι $\|f\|_{\frac{p}{1-\gamma}} < \infty$ αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε

$$\int_E |f(x)|^p dx \leq c\,[m(E)]^{\gamma}$$

για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{T}$.

6. Έστω T υπογραμμικός τελεστής και έστω $p > 0$. Δείξτε ότι ο T είναι ασθενούς τύπου (p,p) αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε: για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$, για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{T}$ και για κάθε $0 < r < p$,

$$\int_E |Tf(x)|^r dx \leq c^r \frac{p}{p-r} m(E)^{1-\frac{r}{p}} \|f\|_p^r.$$

7. Έστω $0 < p_1, \ldots, p_k < \infty$ και f_j μετρήσιμες συναρτήσεις με $\|f_j\|_{p_j,\infty} < \infty$, $j = 1, \ldots, k$. Αν

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k},$$

δείξτε ότι

$$\|f_1 \cdots f_k\|_{p,\infty} \leq p^{-\frac{1}{p}} \prod_{j=1}^{k} p_j^{\frac{1}{p_j}} \prod_{j=1}^{k} \|f_j\|_{p_j,\infty}.$$

Υπόδειξη: Μπορείτε να υποθέσετε ότι $\|f_j\|_{p_j,\infty} = 1$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$. Παρατηρήστε ότι

$$\{x : |(f_1 \cdots f_k)(x)| > \lambda\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \{x : |f_j(x)| > t_{j-1}/t_j\},$$

όπου $t_0 = \lambda$, $t_k = 1$ και $t_1, \dots, t_{k-1} > 0$, και βελτιστοποιήστε ώς προς t_j.

8. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι
$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda m(\{x : |\tilde{f}(x)| > \lambda\}) = 0.$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε $\varepsilon > 0$ και γράψτε την f στη μορφή $f = f_1 + f_2$, όπου $\|f_1\|_1 < \varepsilon$ και $f_2 \in L^2(\mathbb{T})$. Παρατηρήστε ότι $m(\{x : |\tilde{f_2}(x)| > \lambda\} \leq c/\lambda^2$ και χρησιμοποιήστε την ανισότητα ασθενούς τύπου $(1,1)$ για την f_1.

9. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{T})$ και ότι υπάρχει $A > 0$ ώστε $\|s_n(f)\|_1 \leq A$ για κάθε n. Δείξτε ότι υπάρχει $B > 0$ ώστε $\|\tilde{s}_n(f)\|_1 \leq B$ για κάθε n.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $\tilde{s}_n(f,x) - \tilde{\sigma}_n(f,x) = -\frac{s_n'(f,x)}{n+1}$ και ότι $\|s_n'(f)\|_1 \leq cn$. Για τον δεύτερο ισχυρισμό θα χρειαστείτε την ανισότητα του Bernstein για την παράγωγο τριγωνομετρικού πολυωνύμου (Φυλλάδιο 3).

10. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{T})$ και ότι $\|s_n(f) - f\|_1 \to 0$. Δείξτε ότι $\|\tilde{s}_n(f) - \tilde{f}\|_1 \to 0$.

11. Έστω $1 < p < \infty$ και έστω q ο συζυγής εκθέτης του p. Δείξτε ότι, για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ και $g \in L^q(\mathbb{T})$,
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)g(x)\,dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)c_{-k}(g).$$

Υπόδειξη. Αφού $\|s_n(f) - f\|_p \to 0$, έχουμε
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} s_n(f,x)g(x)\,dx.$$

12. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ μη αρνητική συνάρτηση η οποία μηδενίζεται έξω από το $[0,\pi/2)$. Δείξτε ότι, για κάθε $x \in [-\pi/2, 0)$,
$$Hf(x) \geq \frac{c}{|x|}\int_0^{|x|} f(t)\,dt.$$
Θεωρώντας την $g(t) = \frac{1}{\ln(1/t)}$ και την $f = g'$, δείξτε ότι υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{T})$ για την οποία η Hf δεν είναι ολοκληρώσιμη.

13. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $0 < p < 1$. Δείξτε ότι $\|s_n(f) - f\|_p \to 0$ και $\|\tilde{s}_n(f) - Hf\|_p \to 0$.

Υπόδειξη. Έστω g τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Δείξτε ότι, για αρκετά μεγάλα n,
$$|\tilde{s}_n(f,x) - Hf(x)|^p \leq |\tilde{s}_n(f-g,x)|^p + |Hg(x) - Hf(x)|^p.$$

14. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία (k_n) φυσικών ώστε $s_{k_n}(f,x) \to f(x)$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$ και, ταυτόχρονα, $\tilde{s}_{k_n}(f,x) \to Hf(x)$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.

15. Έστω $f \in C(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι
$$\int_{\mathbb{T}} e^{\lambda|\tilde{f}(x)|}dx < \infty$$
για κάθε $\lambda > 0$, και ότι $\|\tilde{f}\|_p = o(p)$ καθώς το $p \to \infty$.

Υπόδειξη. Προσεγγίστε την f, ως προς την $\|\cdot\|_\infty$, με τριγωνομετρικό πολυώνυμο.