Αρμονική Ανάλυση (2014-15)

Φυλλάδιο 3

Παραδίδετε οκτώ από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: Δευτέρα 15 Δεκεμβρίου 2014.

1. Έστω (a_k) φθίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών με $a_k \to 0$. Δείξτε ότι η τριγωνομετρική σειρά

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt$$

συγκλίνει στο $(0, \pi)$ και ότι, για κάθε $\delta \in (0, \pi)$ η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο (δ, π).
Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε άθροιση κατά μέρη (τον τύπο του Abel).

2. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $g \in L^\infty(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x)g(nx)\, dx = c_0(f)c_0(g).$$

Υπόδειξη. Προσεγγίστε την f στον $L^1(\mathbb{T})$ με τριγωνομετρικά πολυώνυμα.

3. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι ο τελεστής $T : L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})$ που ορίζεται μέσω της $T(g) = f * g$ έχει νόρμα

$$\|T\| = \|f\|_1.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε τον πυρήνα του Fejér K_n, $n \in \mathbb{N}$.

4. Έστω p ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n. Δείξτε ότι

$$p' = -p * (2K_{n-1}(t) \sin nt)$$

και χρησιμοποιώντας αυτήν την ισότητα δείξτε ότι

$$\|p'\|_\infty \leq 2n\, \|p\|_\infty.$$

5. Έστω $0 < \alpha \leq 1$ και έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $t \in \mathbb{T}$ η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz

$$|f(t + x) - f(t)| \leq A|x|^\alpha, \qquad |x| \leq \pi.$$

Δείξτε ότι: αν $\alpha < 1$ τότε

$$|\sigma_n(f, t) - f(t)| \leq \frac{\pi + 1}{1 - \alpha}\, \frac{A}{n^\alpha},$$

ενώ αν $\alpha = 1$ τότε

$$|\sigma_n(f, t) - f(t)| \leq 2\pi A\, \frac{\ln n}{n}.$$

6. Έστω $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα $|kc_k(f)| \leq A$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι, για κάθε n και για κάθε $x \in \mathbb{T}$ ισχύει

$$|s_n(f, x)| \leq \|f\|_\infty + 2A.$$

Υπόδειξη. Δείξτε ότι

$$s_n(f, x) = \sigma_n(f, x) + \sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|}{n + 1} c_k(f) e^{ikx}.$$

7. Έστω $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών με τις εξής ιδιότητες: (α) $a_{-n} = a_n$ για κάθε n, (β) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, και (γ) για κάθε $n > 0$,

$$2a_n \leq a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει μη αρνητική $f \in L^1(\mathbb{T})$ με $c_k(f) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0$ και θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)\, K_{n-1}(x).$$

8. (α) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $k \geq 0$ ισχύει $c_k(f) = -c_{-k}(f) \geq 0$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(f)}{k} < +\infty.$$

(β) Δείξτε ότι: αν $a_k > 0$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = +\infty$, τότε η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ δεν είναι σειρά Fourier κάποιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

9. Έστω $p \geq 1$ και έστω $f \in L^p(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα

$$\lim_{n\to\infty} n\|\sigma_n(f) - f\|_p = 0.$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

10. Έστω (f_n) ακολουθία στον $L^1(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα: για κάθε $g \in L^1(\mathbb{T})$,

$$\lim_{n\to\infty} \|g - g * f_n\|_1 = 0.$$

Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} c_k(f_n) = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

11. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι: για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{T}$, η σειρά

$$\sum_k c_k(f) \int_A e^{ikt} dt$$

είναι Cesàro αθροίσιμη στο $\int_A f(t)\, dt$.

12. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} [w_1(f, \pi/n)]^2 < \infty,$$

όπου

$$w_1(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(t)|\, dt.$$

Δείξτε ότι $f \in L^2(\mathbb{T})$.

13. Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$ συνάρτηση με σειρά Fourier της μορφής $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (\pi - x) f(x)\, dx.$$

14. Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$. Ορίζουμε

$$F(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(f,x) - \sigma_n(f,x)|^2}{n} \right)^{1/2}.$$

Δείξτε ότι $F \in L^2(\mathbb{T})$ και $\|F\|_2 \leq \|f\|_2$. Ειδικότερα, $F(x) < \infty$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.

15. Έστω $x_n, y_m \in \mathbb{C}$, $n, m \geq 0$. Δείξτε ότι

$$\left| \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{x_n y_m}{n+m+1} \right| \leq \pi \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |y_m|^2 \right)^{1/2}.$$

Υπόδειξη. Θεωρήστε την $\phi(t) = i(\pi - t)e^{-it}$. Παρατηρήστε ότι $c_k(\phi) = \frac{1}{k+1}$ και $\|\phi\|_\infty = \pi$.