Αρμονική Ανάλυση (2014-15)

Φυλλάδιο 2

Παραδίδετε οκτώ από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: Δευτέρα 24 Νοεμβρίου 2014.

1. (α) Θεωρήστε την αναλυτική συνάρτηση $f(z) = e^{-\pi z^2}$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Cauchy για το ορθογώνιο με κορυφές $-R, R, R+ix, -R+ix$ δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{2\pi itx} dt = e^{-\pi x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = e^{-\pi x^2}$$

για κάθε $x > 0$.

(β) Έστω $G(x) = e^{-\pi x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\widehat{G}(\xi) = G(\xi)$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$.

2. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ και $k \geq 1$. Υποθέτουμε ότι η f είναι k-φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, και για κάθε $0 \leq j \leq k$ ισχύει $f^{(j)} \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (2\pi i\xi)^k \widehat{f}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}$$

και

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{c(k,f)}{|\xi|^k}, \qquad \xi \neq 0$$

όπου η σταθερά $c(k,f)$ εξαρτάται από το k και την f (αλλά όχι από το ξ).

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι η f'' είναι συνεχής και ότι $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

3. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και έστω $g(x) = xf(x)$. Αν $g \in L^1(\mathbb{R}$, δείξτε ότι η $\widehat{f}$ είναι παραγωγίσιμη και

$$(\widehat{f})'(\xi) = -2\pi i \widehat{g}(\xi).$$

4. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν $g(x) = f(x+t) - f(x)$ δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{g}$ της g έχει άπειρες ρίζες.

5. Έστω $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(-\xi)\,d\xi.$$

6. (α) Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $f(x) = (1-|x|)\chi_{[-1,1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(β) Υπολογίστε το

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx.$$

7. (α) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f\big(x - \frac{1}{x}\big)\,dx.$$

(β) Χρησιμοποιώντας το (α) για την συνάρτηση $f(x) = e^{-tx^2}$, δείξτε ότι, για κάθε $t > 0$,

$$e^{-2t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-y-t^2/y}}{\sqrt{y}}\, dy.$$

(γ) Θέτοντας $t = \pi|x|$ και ολοκληρώνοντας ως προς $e^{-2\pi i\langle \xi, x\rangle}dx$, υπολογίστε τον μετασχηματισμό Fourier της $f(x) = e^{-2\pi|x|}$, $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\widehat{e^{-2\pi|x|}}(\xi) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

8. (α) Δείξτε ότι: αν $0 < \varepsilon < t < \infty$ τότε

$$\left| \int_{\varepsilon}^{t} \frac{\sin(\xi)}{\xi}\, d\xi \right| \leq 4.$$

(β) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ περιττή συνάρτηση. Δείξτε ότι: αν $0 < \varepsilon < t < \infty$ τότε

$$\left| \int_{\varepsilon}^{t} \frac{\widehat{f}(\xi)}{\xi}\, d\xi \right| \leq 4\|f\|_1.$$

(γ) Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια περιττή συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $g(\xi) = \frac{1}{\log \xi}$ για κάθε $\xi \geq 2$. Δείξτε ότι $g \in C_0(\mathbb{R})$ αλλά δεν υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{R})$ ώστε $\widehat{f} = g$.

9. Δείξτε ότι: για κάθε $\epsilon > 0$ η συνάρτηση $F(\xi) = \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\epsilon}}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
Υπόδειξη. Θεωρήστε την

$$f(x) = \int_0^{\infty} K_{\delta}(x) e^{-\pi\delta} \delta^{\epsilon-1} d\delta,$$

όπου $K_{\delta}(x) = \delta^{-n/2} e^{-\pi|x|^2/\delta}$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini ελέγξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη, και στη συνέχεια δείξτε ότι

$$\widehat{f}(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-\pi\delta|\xi|^2} e^{-\pi\delta} \delta^{\epsilon-1} d\delta.$$

Τέλος, υπολογίστε αυτό το ολοκλήρωμα (θα χρειαστείτε την $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$, $s > 0$).

10. (α) Εξετάστε αν υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ με την ιδιότητα

$$f * f = f.$$

(β) Εξετάστε αν υπάρχει $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ με την ιδιότητα

$$f * g = f \;\text{ για κάθε } f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier.

11. (α) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός. Δείξτε ότι:

$$\widehat{f \circ T}(\xi) = |\det T|^{-1} (\widehat{f} \circ T^{-t})(\xi).$$

(β) Μια συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ λέγεται ακτινικά συμμετρική αν υπάρχει $G : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ με την ιδιότητα $g(x) = G(|x|)$. Ισοδύναμα, αν $g(Ux) = g(x)$ για κάθε ορθογώνιο γραμμικό μετασηματισμό U του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι αν η $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ είναι ακτινικά συμμετρική τότε ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{f}$ της f είναι επίσης ακτινικά συμμετρική συνάρτηση.

12. Έστω $A \subset L^1(\mathbb{R})$. Συμβολίζουμε με $\overline{A}$ την κλειστή του θήκη: $g \in \overline{A}$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $f \in A$ ώστε $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ συμβολίζουμε με T_f το σύνολο όλων των συναρτήσεων της μορφής

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x + b_k).$$

Δηλαδή, το T_f αποτελείται από όλους τους πεπερασμένους γραμμικούς συνδυασμούς *μεταφορών της* f.

(α) Δείξτε ότι: αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $\widehat{f}(\xi) = 0$ για κάποιο ξ, τότε $\widehat{g}(\xi) = 0$ για κάθε $g \in \overline{T_f}$.

(β) Δείξτε ότι: αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $\overline{T_f} = L^1(\mathbb{R})$ τότε $\widehat{f}(\xi) \neq 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$.

13. Δείξτε ότι υπάρχει $g \in L^1(\mathbb{R})$ ώστε: $\widehat{g}(\xi) > 0$ αν $\xi > 0$ και $\widehat{g}(\xi) = 0$ αν $\xi \leq 0$.
Υπόδειξη. Θεωρήστε την $g(x) = \frac{1}{(1+ix)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

14. (α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $g_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1-\cos(nx)}{nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n * f - f\|_1 = 0.$$

(β) Δείξτε ότι, για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ ο μετασχηματισμός Fourier της $g_n * f$ έχει συμπαγή φορέα, άρα οι $h \in L^(\mathbb{R})$ που έχουν μετασχηματισμό Fourier με συμπαγή φορέα σχηματίζουν πυκνό υποσύνολο του $L^1(\mathbb{R})$.

15. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ με συμπαγή φορέα: υπάρχει $M > 0$ ώστε $f(x) = 0$ αν $|x| > M$. Δείξτε ότι

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1 \cdot e^{2\pi M|\xi|}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$