Εισαγωγή στη Συναρτησιακή Ανάλυση – 7 Ιουνίου 2021

Καθένα από τα παρακάτω προβλήματα παίρνει 20 μονάδες. Όλοι οι διανυσματικοί χώροι είναι πάνω από το $\mathbb{R}$.

1. Έστω $D = \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ υποσύνολο του $[0,1]$. Ορίζουμε $T : (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to \ell_\infty$ με $T(f) = (f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_n), \ldots)$. Αποδείξτε ότι:

(i) Ο T είναι γραμμικός και φραγμένος και υπολογίστε την $\|T\|$.

(ii) Αν το D είναι πυκνό υποσύνολο του $[0,1]$ τότε ο T είναι ισομετρία.

(iii) Αν ο T είναι 1-1 τότε το D είναι πυκνό υποσύνολο του $[0,1]$.

2. Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα και (x_n) πυκνή ακολουθία στον X. Για κάθε $n \geqslant 1$ επιλέγουμε $f_n \in X^*$ με $\|f_n\| = 1$ και $f_n(x_n) = \|x_n\|$. Αποδείξτε ότι:

(α) Η (f_n) διαχωρίζει τα σημεία του X: αν $x, y \in X$ και $x \neq y$ τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $f_n(x) \neq f_n(y)$.

(β) Για κάθε $x \in X$ ισχύει $\|x\| = \sup\{|f_n(x)| : n \geqslant 1\}$.

3. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Ορίζουμε $T^* : Y^* \to X^*$ με $T^*(y^*) = y^* \circ T$. Αποδείξτε ότι αν ο T είναι ισομορφισμός τότε ο T^* είναι επίσης ισομορφισμός.

4. Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής, ο οποίος είναι ανοικτή απεικόνιση. Αποδείξτε ότι:

(i) Υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $T(x) = y$ και $\|x\|_X \leqslant M\|y\|_Y$.

(ii) Ο Y είναι πλήρης.

5. Έστω H χώρος Hilbert και $T : H \to H$ γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$ για κάθε $x, y \in H$. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

6. Έστω X χώρος με νόρμα και A, B κυρτά υποσύνολα του X. Αποδείξτε ότι:

(α) $\mathrm{dist}(A, B) = \mathrm{dist}(0, A - B)$.

(β) Αν $\mathrm{dist}(A, B) > 0$ τότε υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε

$$\sup\{f(x) : x \in B\} < \inf\{f(y) : y \in A\}.$$