Εισαγωγή στη Συναρτησιακή Ανάλυση – 7 Ιουνίου 2021

Καθένα από τα παρακάτω προβλήματα παίρνει 20 μονάδες. Όλοι οι διανυσματικοί χώροι είναι πάνω από το $\mathbb{R}$.

1. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $f : (c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, όπου $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00}$. Αποδείξτε ότι $f \in c_{00}^*$ αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ και στην περίπτωση αυτή υπολογίστε την $\|f\|$.

2. Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ πυκνό υποσύνολο του X και $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X^*$ ώστε $\|x_n^*\| = 1$ και $x_n^*(x_n) = \|x_n\|$. Αποδείξτε ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ker}(x_n^*) = \{0\}.$$

3. Έστω X χώρος με νόρμα, Y υπόχωρος του X και $x_0 \in X$. Αποδείξτε ότι

$$\mathrm{dist}(x_0, Y) = \max\{|x^*(x_0)| : x^* \in B_{X^*} \text{ και } Y \subseteq \mathrm{Ker}(x^*)\}.$$

4. Έστω H χώρος Hilbert και $T : H \to H$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι:

(i) Για κάθε $y \in H$ υπάρχει μοναδικό $z_y \in H$ τέτοιο ώστε: για κάθε $x \in H$, $\langle T(x), y\rangle = \langle x, z_y\rangle$.

(ii) Η απεικόνιση $S : H \to H$ με $S(y) = z_y$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|S\| = \|T\|$.

5. Έστω X χώρος Banach και $T : X \to \ell_\infty$ γραμμικός τελεστής. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $\pi_n : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ με $\pi_n(x) = x_n$, όπου $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν $g_n := \pi_n \circ T \in X^*$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

6. Έστω X χώρος με νόρμα και $K \subset X$ κυρτό και συμπαγές. Έστω $L \subseteq K$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x^* \in X^*$ ισχύει

$$\sup\{x^*(x) : x \in K\} = \sup\{x^*(y) : y \in L\}.$$

Αποδείξτε ότι $K = \overline{\mathrm{conv}(L)}$.