Εισαγωγή στη Συναρτησιακή Ανάλυση – 17 Ιουνίου 2021

Καθένα από τα παρακάτω προβλήματα παίρνει 20 μονάδες. Όλοι οι διανυσματικοί χώροι είναι πάνω από το $\mathbb{R}$.

1. Έστω $X = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Για κάθε $t \in [0,1]$ ορίζουμε $\delta_t : C[0,1] \to \mathbb{R}$ με $\delta_t(f) = f(t)$. Αποδείξτε ότι:

(α) $\delta_t \in X^*$ και $\|\delta_t\| = 1$ για κάθε $t \in [0,1]$.

(β) Αν $t_1, \ldots, t_N$ είναι διαφορετικά ανά δύο σημεία στο $[0,1]$ τότε η $T : \ell_1^N \to X^*$ με $T(a) = \sum_{j=1}^N a_j \delta_{t_j}$, όπου $a = (a_1, \ldots, a_N)$, είναι γραμμική ισομετρία. Δηλαδή,

$$\Big\| \sum_{j=1}^N a_j \delta_{t_j} \Big\|_{X^*} = \sum_{j=1}^N |a_j|$$

για κάθε $a = (a_1, \ldots, a_N) \in \ell_1^N$.

(γ) Δεν υπάρχει ισομετρικός ισομορφισμός $T : \ell_1 \to X^*$.

2. (α) Έστω X χώρος με νόρμα. Για κάθε διανυσματικό υπόχωρο Y του X, ορίζουμε

$$N(Y) = \{f \in X^* : f(y) = 0 \text{ για κάθε } y \in Y\}.$$

(i) Αποδείξτε ότι ο $N(Y)$ είναι κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του X^*.

(ii) Αποδείξτε ότι αν Y_1, Y_2 είναι κλειστοί διανυσματικοί υπόχωροι του X και $Y_1 \neq Y_2$, τότε $N(Y_1) \neq N(Y_2)$.

(β) Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach και Y διανυσματικός υπόχωρος του X^* με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \neq 0$ στον X υπάρχει $f \in Y$ τέτοιο ώστε $f(x) \neq 0$. Αποδείξτε ότι $\overline{Y} = X^*$.

3. Έστω Y κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του χώρου Hilbert H, και $f \in Y^*$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $f_1 \in H^*$ τέτοιο ώστε $f_1\big|_Y = f$ και $\|f_1\|_{H^*} = \|f\|_{Y^*}$.

4. (α) Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι για κάθε πυκνό $D \subseteq Y$ το $T^{-1}(D)$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.

(β) Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός και επί τελεστής με την εξής ιδιότητα: υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε $\|T(x)\| \geqslant c\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος τελεστής.

5. Έστω X, Y χώροι με νόρμα. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $T : X \to Y$ είναι γραμμικός τελεστής και το σύνολο $\mathcal{A}_T := \{x \in X : \|Tx\|_Y = 1\}$ είναι κλειστό, τότε ο T είναι φραγμένος.

(β) Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές με κλειστό γράφημα, τότε $f \in X^*$.

6. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Έστω K κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι:

(α) Το $T(K)$ είναι κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του Y.

(β) Για κάθε $y \in \mathrm{Ext}(T(K))$ το σύνολο $\{x \in K : T(x) = y\}$ είναι ακραίο υποσύνολο του K.

(γ) Για κάθε $y \in \mathrm{Ext}(T(K))$ υπάρχει $x \in \mathrm{Ext}(K)$ τέτοιο ώστε $T(x) = y$.