Εισαγωγή στη Συναρτησιακή Ανάλυση – 12/6/2017

1. (2μ) Έστω c_0 ο χώρος των μηδενικών ακολουθιών και ℓ_∞ ο χώρος των φραγμένων ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι:

(α) Ο $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ_∞.

(β) Ο c_0 με νόρμα την $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n}$ δεν είναι πλήρης.

2. (2μ) (α) Ορίζουμε $T, S : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ με

$$(Tf)(t) = t\int_0^1 f(s)ds, \qquad (Sf)(t) = tf(t).$$

(i) Αποδείξτε ότι οι T, S είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές.

(ii) Βρείτε τους $T \circ S$ και $S \circ T$. Είναι σωστό ότι $T \circ S = S \circ T$;

(iii) Υπολογίστε τις $\|T\|$, $\|S\|$, $\|T \circ S\|$ και $\|S \circ T\|$.

(β) Έστω X χώρος Banach. Αν $B_X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, όπου κάθε A_n είναι συμπαγές υποσύνολο του X, αποδείξτε ότι ο X είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης.

3. (2μ) (α) Έστω X χώρος με νόρμα. Για κάθε διανυσματικό υπόχωρο Y του X, ορίζουμε

$$N(Y) = \{f \in X^* : f(y) = 0 \text{ για κάθε } y \in Y\}.$$

(i) Αποδείξτε ότι ο $N(Y)$ είναι κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του X^*.

(ii) Αποδείξτε ότι αν Y_1, Y_2 είναι κλειστοί διανυσματικοί υπόχωροι του X και $Y_1 \neq Y_2$, τότε $N(Y_1) \neq N(Y_2)$.

(β) Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach και Y διανυσματικός υπόχωρος του X^* με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \neq 0$ στον X υπάρχει $f \in Y$ τέτοιο ώστε $f(x) \neq 0$. Αποδείξτε ότι $\overline{Y} = X^*$.

4. (2μ) (α) Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|T(x)\| \geqslant \delta\|x\|$ για κάθε $x \in X$.

(ii) Ο T είναι 1-1 και ο $T(X)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y.

(β) Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν για κάθε $g \in Y^*$ ισχύει $g \circ T \in X^*$.

5. (2μ) (α) Έστω H χώρος Hilbert και W, Z κλειστοί υπόχωροι του H με την εξής ιδιότητα: αν $w \in W$ και $z \in Z$, τότε $w \perp z$ (οι W και Z είναι *κάθετοι*). Αποδείξτε ότι ο $W + Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του H.

(β) Έστω H χώρος Hilbert και $T : H \to H$ γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $T^2 = T$ και $\|T\| \leq 1$. Αν $F = \mathrm{Ker}T$, αποδείξτε ότι:

(i) $T(H) \subseteq F^\perp$.

(ii) Ο T είναι η ορθογώνια προβολή στον $F^\perp$.

6. (2μ) (α) Έστω X χώρος Banach και Y, Z κλειστοί υπόχωροι του X με $X = Y + Z$ και $Y \cap Z = \{0\}$. Αποδείξτε ότι ο X/Y είναι ισόμορφος με τον Z.

(β) Έστω X χώρος Banach και (x_n) ακολουθία στον X με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x^* \in X^*$ ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < +\infty$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $t = (t_n) \in c_0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ συγκλίνει.

[*Υπόδειξη:* Για κάθε $n \geqslant 1$ θεωρήστε τον τελεστή $T_n : X^* \to \ell_1$ με $T_n(x^*) = (x^*(x_1), \ldots, x^*(x_n), 0, \ldots)$.]

Καλή Επιτυχία!