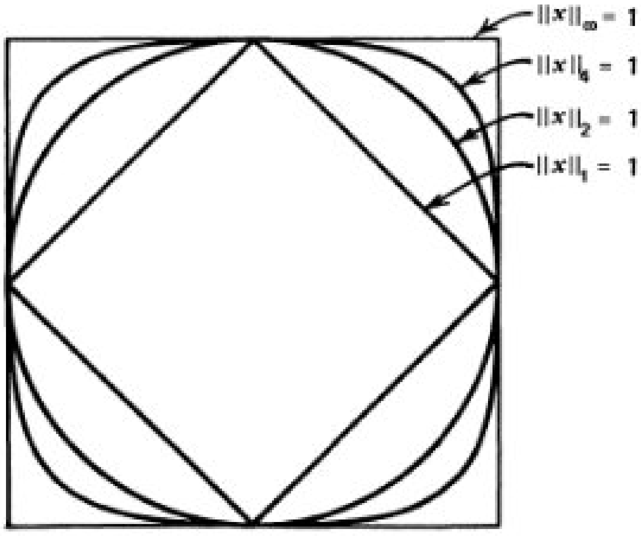
Σημειώσεις
Συναρτησιακής Ανάλυσης



Απόστολος Γιαννόπουλος[1]

Πανεπιστημιο Κρητης
Τμημα Μαθηματικων
Ανοιξη 2003

[1] Τμ. Μαθηματικών, Πανεπ. Αθηνών

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μετρικοί χώροι

1.1 Ορισμός

Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια απεικόνιση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ λέγεται *μετρική* στο X (ή *συνάρτηση απόστασης* στο X) αν για κάθε $x, y, z \in X$ ικανοποιούνται τα εξής:

(M1) $d(x, y) \geq 0$,

(M2) $d(x, y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$,

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$,

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (τριγωνική ανισότητα).

Το ζευγάρι (X, d) λέγεται *μετρικός χώρος*. Τα στοιχεία του X λέγονται *σημεία* του χώρου, και ο αριθμός $d(x, y)$ *απόσταση* του x από το y. Οι (M1)$-$(M4) είναι τα *αξιώματα* της μετρικής.

Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος, και Y ένα μη κενό υποσύνολο του X. Θεωρούμε τον περιορισμό της d στο $Y \times Y$. Ορίζουμε δηλαδή $\tilde{d} : Y \times Y \to \mathbb{R}$ θέτοντας

$$\tilde{d}(x, y) = d(x, y)$$

για κάθε $x, y \in Y$. Εύκολα ελέγχουμε ότι ο $(Y, \tilde{d})$ είναι μετρικός χώρος: η $\tilde{d}$ ικανοποιεί τα αξιώματα (M1)$-$(M4). Λέμε ότι ο $(Y, \tilde{d})$ είναι ένας *υπόχωρος* του (X, d). Η $\tilde{d}$ είναι η μετρική που *επάγεται* στο Y από την d.

Δίνουμε τώρα κάποια απλά παραδείγματα μετρικών χώρων. Κάποια από αυτά είναι ειδικές περιπτώσεις γενικότερων παραδειγμάτων τα οποία θα εξετάσουμε αναλυτικά στην επόμενη παράγραφο. Σε κάθε περίπτωση επαληθεύστε ότι ικανοποιούνται τα αξιώματα της μετρικής.

(α) **Η πραγματική ευθεία**. Θεωρούμε το σύνολο $X = \mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, με μετρική την

$$d(x, y) = |x - y|.$$

(β) **Ο Ευκλείδειος χώρος**. Θεωρούμε το σύνολο όλων των διατεταγμένων m-άδων $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ πραγματικών αριθμών, με την *Ευκλείδεια μετρική*: αν τα $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ και $y = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ ανήκουν στον $\mathbb{R}^m$, ορίζουμε

$$d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + \cdots + (\xi_m - \eta_m)^2}.$$

(γ) **Ο χώρος ακολουθιών ℓ_∞**. Ο χώρος $X = \ell_\infty$ αποτελείται από όλες τις φραγμένες ακολουθίες πραγματικών αριθμών: η ακολουθία $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots)$ (για συντομία θα γράφουμε $x = (\xi_k)$) ανήκει στον X αν υπάρχει $M_x > 0$ (που εξαρτάται από την ακολουθία x) ώστε

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad |\xi_k| \leq M_x.$$

Ισοδύναμα,

$$x = (\xi_k) \in X \iff \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\} < +\infty.$$

Ορίζουμε την απόσταση δύο φραγμένων ακολουθιών $x = (\xi_k), y = (\eta_k)$ ως εξής:

$$d(x, y) = \sup\{|\xi_k - \eta_k| : k \in \mathbb{N}\}.$$

(δ) **Ο χώρος συναρτήσεων** $C[a, b]$. Έστω $[a, b]$ ένα κλειστό διάστημα στο $\mathbb{R}$. Ο χώρος $X = C[a, b]$ αποτελείται από όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (τα *σημεία* του χώρου είναι συναρτήσεις).

Η απόσταση δύο σημείων του χώρου ορίζεται ως εξής: αν $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, θέτουμε

$$d(f, g) = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$$

(το max ορίζεται καλά: η $|f - g|$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, άρα παίρνει μέγιστη τιμή). Ο μετρικός χώρος που ορίζεται έτσι, συμβολίζεται με $C[a, b]$ και λέγεται *χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο* $[a, b]$.

(ε) **Η διακριτή μετρική**. Θεωρούμε τυχόν μη κενό σύνολο X, και για κάθε $x, y \in X$ ορίζουμε

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & ,\text{αν } x \neq y, \\ \\ 0 & ,\text{αν } x = y. \end{cases}$$

Η d είναι η *διακριτή μετρική* στο σύνολο X.

1.2 Παραδείγματα μετρικών χώρων

(α) **Ο χώρος $B(A)$ των φραγμένων συναρτήσεων στο** A. Θεωρούμε τυχόν μη κενό σύνολο A. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ανήκει στον $B(A)$ αν και μόνο αν είναι φραγμένη (δηλαδή, αν $\sup\{|f(a)| : a \in A\} < +\infty$.) Αν $f, g \in B(A)$, ορίζουμε την απόστασή τους μέσω της

$$d(f, g) = \sup_{a \in A} |f(a) - g(a)|.$$

Παρατηρήστε πρώτα ότι η απόσταση είναι καλά ορισμένη: αφού $f, g \in B(A)$, υπάρχουν $M_f, M_g > 0$ τέτοιοι ώστε: για κάθε $a \in A$, $|f(a)| \leq M_f$ και $|g(a)| \leq M_g$. Επομένως, για κάθε $a \in A$ έχουμε

$$|f(a) - g(a)| \leq |f(a)| + |g(a)| \leq M_f + M_g,$$

δηλαδή

$$0 \leq d(f, g) = \sup_{a \in A} |f(a) - g(a)| \leq M_f + M_g < +\infty.$$

Οι (M2) και (M3) ελέγχονται εύκολα: αν $f, g \in B(A)$, τότε

$$d(f, g) = \sup_{a \in A} |f(a) - g(a)| = \sup_{a \in A} |g(a) - f(a)| = d(g, f),$$

και

$$\begin{aligned} d(f, g) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sup_{a \in A} |f(a) - g(a)| = 0 \\ &\Rightarrow \quad \text{για κάθε } a \in A, \;\; |f(a) - g(a)| = 0 \\ &\Rightarrow \quad \text{για κάθε } a \in A, \;\; f(a) = g(a) \\ &\Rightarrow \quad f \equiv g. \end{aligned}$$

Για την τριγωνική ανισότητα: έστω $f, g, h \in B(A)$. Για κάθε $a \in A$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(a) - g(a)| &= |f(a) - h(a) + h(a) - g(a)| \\ &\leq |f(a) - h(a)| + |h(a) - g(a)| \\ &\leq \sup_{a \in A} |f(a) - h(a)| + \sup_{a \in A} |h(a) - g(a)| \\ &= d(f, h) + d(h, g). \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$d(f,g) = \sup_{a\in A} |f(a) - g(a)| \leq d(f,h) + d(h,g).$$

(β) **Οι χώροι ακολουθιών** ℓ_p. Έστω $1 \leq p < \infty$. Τα σημεία του χώρου ℓ_p είναι οι ακολουθίες πραγματικών αριθμών $x = (\xi_k)$ για τις οποίες

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < +\infty.$$

Ορισμός (συζυγείς εκθέτες). Έστω $1 < p < +\infty$. Ο *συζυγής εκθέτης* q του p ορίζεται μέσω της

$$(*) \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Δηλαδή, $q = p/(p-1)$. Ο q είναι κι αυτός μεγαλύτερος από 1, και λόγω συμμετρίας της $(*)$ ο p είναι με τη σειρά του ο συζυγής εκθέτης του q. Λέμε λοιπόν ότι οι p και q είναι *συζυγείς εκθέτες*. Παρατηρούμε ότι, αν p και q είναι συζυγείς εκθέτες,

$$p + q = pq \quad \Rightarrow \quad (p-1)(q-1) = 1.$$

Αν λοιπόν ορίσουμε $f(t) = t^{p-1}$, $t \in [0, +\infty)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα, και ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση g της f. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι $g(s) = s^{q-1}$, $s \in [0, +\infty)$. Πράγματι,

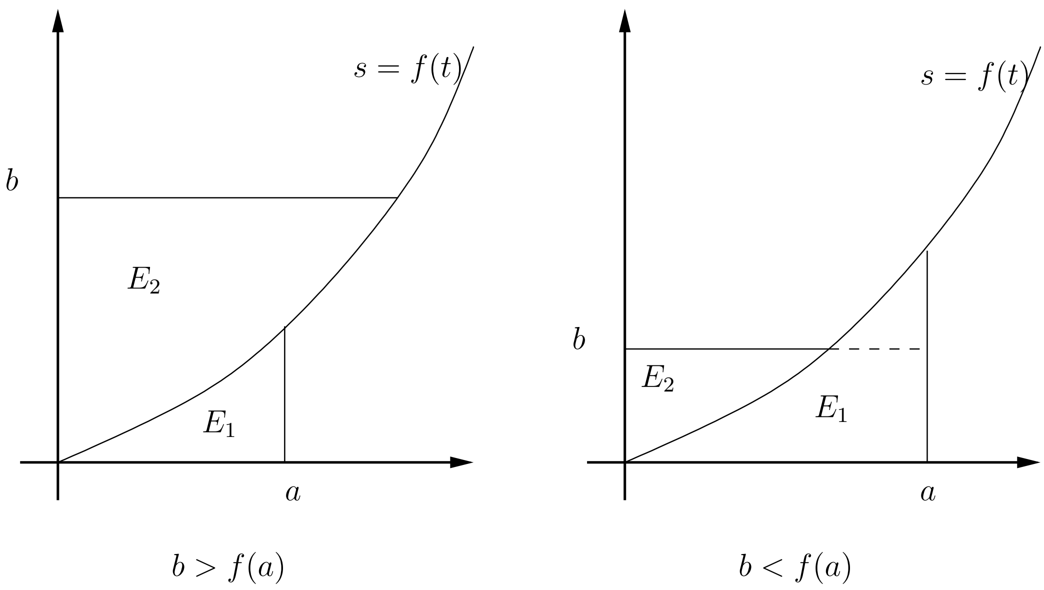
$$g(f(t)) = [f(t)]^{q-1} = t^{(p-1)(q-1)} = t.$$

Πριν ορίσουμε την απόσταση δύο σημείων του ℓ_p, θα δείξουμε δύο κλασικές ανισότητες: την ανισότητα του Hölder και την ανισότητα του Minkowski. Βασικό ρόλο στην απόδειξή τους παίζει η ανισότητα του Young.

Ανισότητα του Young. *Έστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχής και επί συνάρτηση, με $f(0) = 0$. Αν g είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f, τότε για κάθε $a, b > 0$ ισχύει*

$$ab \leq \int_0^a f(t)dt + \int_0^b g(s)ds.$$

Απόδειξη: Δείτε το Σχ. 1.1.



Σχήμα 1.1: Οι περιπτώσεις $b > f(a)$ και $b < f(a)$

Το γινόμενο ab είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου. Σε κάθε περίπτωση,

$$ab \leq E_1 + E_2 = \int_0^a f(t)dt + \int_0^b g(s)ds.$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $b = f(a)$. □

Εφαρμογή: Παίρνουμε $f(t) = t^{p-1}$, $p > 1$. Η αντίστροφη της f είναι η $g(s) = s^{q-1}$, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p. Από την ανισότητα του Young, για κάθε $a, b > 0$,

$$ab \leq \int_0^a t^{p-1}dt + \int_0^b s^{q-1}ds,$$

δηλαδή

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad , \quad a, b \geq 0. \tag{1}$$

Μια άλλη απόδειξη της ανισότητας (1) μπορεί να δοθεί με τη βοήθεια των κυρτών και κοίλων συναρτήσεων. Έστω C ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$. Μια συνάρτηση $f : C \to \mathbb{R}$ λέγεται *κυρτή* αν

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{2}$$

για κάθε $x, y \in C$ και $t \in (0,1)$. Η f λέγεται *γνησίως κυρτή* αν οποτεδήποτε έχουμε ισότητα στην (1) έπεται ότι $x = y$. Η $f : C \to \mathbb{R}$ λέγεται *κοίλη* (αντίστοιχα, *γνησίως κοίλη*) αν η $-f$ είναι κυρτή (αντίστοιχα, γνησίως κυρτή).

Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως κοίλη (έχει αρνητική δεύτερη παράγωγο). Αν λοιπόν $x, y > 0$ και $t, s \in (0,1)$ με $t + s = 1$, τότε

$$\ln(tx + sy) \geq t \ln x + s \ln y = \ln(x^t y^s). \tag{3}$$

Έπεται ότι

$$x^t y^s \leq tx + sy, \tag{4}$$

με ισότητα μόνο αν $x = y$. Έστω τώρα $a, b > 0$ και p, q συζυγείς εκθέτες. Εφαρμόζοντας την (4) με $x = a^p$, $y = b^q$ και $t = 1/p$, $s = 1/q$, παίρνουμε την (1). Ισότητα ισχύει μόνο αν $a^p = b^q$.

Ανισότητα του Hölder (1889) *Έστω $p, q > 1$ συζυγείς εκθέτες. Αν*

$$x = (\xi_k) \in \ell_p \quad , \quad y = (\eta_k) \in \ell_q,$$

τότε η $z = (\xi_k \eta_k) \in \ell_1$, και

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right)^{1/q}.$$

Απόδειξη: Κάνουμε πρώτα την επιπλέον υπόθεση ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q = 1.$$

Για κάθε $k = 1, 2, \ldots$, από την (1) έχουμε

$$|\xi_k \eta_k| = |\xi_k||\eta_k| \leq \frac{|\xi_k|^p}{p} + \frac{|\eta_k|^q}{q}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| &\leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \end{aligned}$$

δηλαδή την ανισότητα του Hölder σ' αυτή την ειδική περίπτωση (γιατί;).

Για τη γενική περίπτωση: μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x, y \neq 0$ (γιατί;), οπότε ορίζουμε

$$\xi_k' = \frac{\xi_k}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p}} \quad , \quad \eta_k' = \frac{\eta_k}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q\right)^{1/q}} \quad , \quad k \in \mathbb{N}.$$

Από τον τρόπο ορισμού τους, οι (ξ_k'), (η_k') ικανοποιούν τις

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k'|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k|^p}{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p} = 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\eta_k|^q}{\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q} = \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k'|^q.$$

Από το πρώτο βήμα της απόδειξης (το εφαρμόζουμε για τις (ξ_k'), (η_k')), βλέπουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k' \eta_k'| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k \eta_k|}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q\right)^{1/q}} \leq 1,$$

δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q\right)^{1/q}. \quad \square$$

Παρατήρηση: Όταν $p = 2$, ο συζυγής εκθέτης του p είναι ο $q = 2$, και η ανισότητα του Hölder με $p = q = 2$ δεν είναι άλλη από την *ανισότητα Cauchy-Schwarz*: Αν $x = (\xi_k), y = (\eta_k) \in \ell_2$, τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^2}.$$

Ανισότητα του Minkowski (1896) *Έστω $p \geq 1$. Αν $x = (\xi_k) \in \ell_p$ και $y = (\eta_k) \in \ell_p$, τότε η $z = (\xi_k + \eta_k) \in \ell_p$ και*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right)^{1/p}.$$

Απόδειξη: Αν $p = 1$, η ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|$$

η οποία επαληθεύεται εύκολα αφού $|\xi_k + \eta_k| \leq |\xi_k| + |\eta_k|$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Έστω ότι $p > 1$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^p &= \sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^{p-1} |\xi_k + \eta_k| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^{p-1} \left(|\xi_k| + |\eta_k|\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^{p-1} |\xi_k| + \sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^{p-1} |\eta_k|.
\end{aligned}$$

Για καθένα από τα δύο αθροίσματα εφαρμόζουμε την ανισότητα του Hölder με εκθέτες p, q (τα αθροίσματα έχουν n όρους, αλλά η ανισότητα ισχύει και σ' αυτή την περίπτωση - γιατί;). Τότε,

$$\begin{aligned}
S_n &:= \sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^p \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^{q(p-1)}\right)^{1/q} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^p\right)^{1/p}\right],
\end{aligned}$$

και επειδή $q(p-1) = qp - p = p$, παίρνουμε

$$S_n \leq S_n^{1/q} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^p \right)^{1/p} \right].$$

Αν $S_n > 0$, διαιρούμε με $S_n^{1/q}$, και αφού $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^p \right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

(Αν $S_n = 0$, τότε αυτή η τελευταία ανισότητα ισχύει ούτως ή άλλως.) Αφού το δεξιό μέλος είναι πεπερασμένο, το αριστερό παραμένει φραγμένο ανεξάρτητα από το n. Αφήνοντας το n να πάει στο άπειρο, συμπεραίνουμε ότι η $z = (\xi_k + \eta_k) \in \ell_p$ και

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right)^{1/q}. \quad \square$$

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την εξής μετρική d_p στον ℓ_p, $p \geq 1$: αν $x = (\xi_k) \in \ell_p$ και $y = (\eta_k) \in \ell_p$, ορίζουμε

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|^p \right)^{1/p}.$$

Τα αξιώματα (M1)−(M3) της μετρικής ελέγχονται άμεσα. Η τριγωνική ανισότητα είναι συνέπεια της ανισότητας του Minkowski: Πράγματι, αν $x = (\xi_k), y = (\eta_k), z = (\zeta_k) \in \ell_p$, τότε

$$\begin{aligned} d_p(x, y) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(\xi_k - \zeta_k) + (\zeta_k - \eta_k)|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \zeta_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\zeta_k - \eta_k|^p \right)^{1/p} \\ &= d_p(x, z) + d_p(z, y). \end{aligned}$$

Άρα, ο ℓ_p με τη μετρική d_p, *είναι* μετρικός χώρος.

1.3 Τοπολογικές έννοιες

(α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Για κάθε $x_0 \in X$ και $r > 0$,

1. Η *ανοικτή μπάλα* με κέντρο x_0 και ακτίνα r είναι το σύνολο

$$D(x_0, r) = \{y \in X : d(y, x_0) < r\}.$$

2. Η *κλειστή μπάλα* με κέντρο x_0 και ακτίνα r είναι το σύνολο

$$B(x_0, r) = \{y \in X : d(y, x_0) \leq r\}.$$

3. Η *σφαίρα* με κέντρο x_0 και ακτίνα r είναι το σύνολο

$$S(x_0, r) = \{y \in X : d(y, x_0) = r\}.$$

Παρατηρησεις

(i) Για κάθε $x_0 \in X$ και $r > 0$ ισχύει $x_0 \in D(x_0, r) \subseteq B(x_0, r)$.

(ii) Μπορεί όμως να συμβεί $S(x_0, r) = \emptyset$ (παράδειγμα: διακριτή μετρική).

(iii) $S(x_0, r) = B(x_0, r) \backslash D(x_0, r)$.

Σε αυτό το μάθημα οι μετρικές θα είναι (ως ένα βαθμό) φυσιολογικές - για παράδειγμα, οι σφαίρες θα είναι πάντα μη κενές.

(β) Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Η $D(x_0, \varepsilon)$ λέγεται *ε-περιοχή* του x_0. Αν $x_0 \in A \subseteq X$, το x_0 λέγεται *εσωτερικό σημείο* του A αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(x_0, \varepsilon) \subseteq A$.

Ένα υποσύνολο A του X λέγεται *ανοικτό* αν κάθε σημείο του A είναι εσωτερικό του σημείο. Για τυχόν $A \subseteq X$, το *εσωτερικό* A° του A είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του A. Το A° είναι το μεγαλύτερο ανοικτό υποσύνολο του A. Το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν $A = A^\circ$.

(γ) Μια ακολουθία (x_n) σημείων του (X, d) *συγκλίνει* στο $x \in X$ (γράφουμε $x_n \to x$) αν $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Ισοδύναμα, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_0$, $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Απλές συνέπειες του ορισμού είναι οι παρακάτω.

(i) Αν $x_n \to x$ και $x_n \to y$, τότε $x = y$ (μοναδικότητα του ορίου).

(ii) Αν $x_n \to x$, τότε η (x_n) είναι *φραγμένη* (δηλαδή, υπάρχει κλειστή μπάλα στον X που περιέχει όλα τα x_n).

(iii) Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ στον X, τότε $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

(δ) Ένα υποσύνολο K του X λέγεται *κλειστό* αν: για κάθε (x_n) στο K με $x_n \to x \in X$, έπεται ότι $x \in K$. Το K είναι κλειστό αν και μόνο αν το $X \setminus K$ είναι ανοικτό.

Το $x_0 \in X$ λέγεται *σημείο επαφής* του K αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $K \cap D(x_0, \varepsilon) \neq \emptyset$. Το σύνολο των σημείων επαφής του K συμβολίζεται με $\overline{K}$, ονομάζεται *κλειστή θήκη* (ή *κλειστότητα*) του K, και είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το K. Το K είναι κλειστό αν και μόνο αν $K = \overline{K}$.

(ε) Έστω (X, d) και $(Y, \overline{d})$ δύο μετρικοί χώροι. Λέμε ότι μια απεικόνιση $T : X \to Y$ είναι συνεχής στο $x_0 \in X$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ με την ιδιότητα: αν $d(x, x_0) < \delta$ τότε $\overline{d}(T(x), T(x_0)) < \varepsilon$. Η T είναι *συνεχής* αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in X$.

Ισχύουν τα εξής:

(i) Η T είναι συνεχής στο $x_0 \Leftrightarrow$ αν $x_n \to x_0$ ως προς την d, τότε $T(x_n) \to T(x_0)$ ως προς την $\overline{d}$.

(ii) Η T είναι συνεχής $\Leftrightarrow$ για κάθε $A \subseteq Y$ ανοικτό, το $T^{-1}(A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Σημείωση: Βεβαιωθείτε ότι όλα τα παραπάνω σάς είναι γνωστά, μαζί με τις αποδείξεις τους (έχουν γίνει στο μάθημα «Εισαγωγή στην Ανάλυση ΙΙ»).

Ορισμός Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Ένα υποσύνολο M του X λέγεται *πυκνό στον* X αν

$$\overline{M} = X.$$

(Δηλαδή, αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει ακολουθία (x_n) στο M με $x_n \to x$. Ισοδύναμα, αν για κάθε $x \in X$ και κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $D(x, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$.)

Ο (X, d) λέγεται *διαχωρίσιμος* αν υπάρχει *αριθμήσιμο* $M \subseteq X$ που είναι πυκνό στον X.

Παραδειγματα

(α) Θεωρούμε την πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ (με τη μετρική $d(x,y) = |x-y|$.) Ο $\mathbb{R}$ είναι διαχωρίσιμος: το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών είναι αριθμήσιμο, και $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (αν $x \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει ρητός στο $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, δηλαδή $D(x,\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.)

(β) Ο χώρος ακολουθιών ℓ_∞ *δεν* είναι διαχωρίσιμος. Για να το αποδείξουμε, θα βασιστούμε στην ακόλουθη γενική παρατήρηση:

Παρατήρηση: Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να βρούμε $x_i, i \in I$ στον X (I ένα σύνολο δεικτών) και $\lambda > 0$ που ικανοποιούν την

$$\forall i,j \in I \quad i \neq j \Longrightarrow d(x_i, x_j) \geq \lambda.$$

Τότε, κάθε πυκνό $M \subseteq X$ έχει τουλάχιστον τόσα στοιχεία όσα το I.

Απόδειξη: Οι μπάλες $D(x_i, \lambda/2)$, $i \in I$ είναι ξένες. Αν το M είναι πυκνό, σε κάθε $D(x_i, \lambda/2)$ υπάρχει κάποιο $m_i \in M$. Αν $i \neq j$, τότε $m_i \neq m_j$ αφού $D(x_i, \lambda/2) \cap D(x_j, \lambda/2) = \emptyset$. Άρα, η $f : I \to M$ με $f(i) = m_i$ είναι ένα προς ένα. Δηλαδή, το M έχει τουλάχιστον τόσα στοιχεία όσα το I. □

Στο παράδειγμα του ℓ_∞, θεωρούμε το σύνολο $A = \{x = (\xi_k) : \xi_k \in \{0,1\}, k \in \mathbb{N}\}$. Κάθε ακολουθία με όρους 0 ή 1 είναι φραγμένη, άρα $A \subseteq \ell_\infty$.

Παρατηρούμε ότι αν $x = (\xi_k), y = (\eta_k) \in A$ και $x \neq y$, τότε $d(x,y) = 1$ (γιατί;). Σύμφωνα με την παρατήρηση, αν M είναι πυκνό υποσύνολο του ℓ_∞, τότε το M έχει τουλάχιστον τόσα στοιχεία όσα το A.

Όμως, το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor δείχνει ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο. Έπεται ότι κάθε πυκνό υποσύνολο του ℓ_∞ είναι υπεραριθμήσιμο, δηλαδή ο ℓ_∞ δεν είναι διαχωρίσιμος.

(γ) Ο χώρος ακολουθιών ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ είναι διαχωρίσιμος. Θεωρούμε το σύνολο

$$M = \{y = (\eta_1, \ldots, \eta_n, 0, 0, \ldots) : n \in \mathbb{N}, \eta_k \in \mathbb{Q}\}.$$

Το M είναι αριθμήσιμο (γιατί;) Θα δείξουμε ότι $\overline{M} = \ell_p$. Έστω $x = (\xi_k) \in \ell_p$ και $\varepsilon > 0$. Ψάχνουμε $y \in M$ τέτοιο ώστε $d_p(x,y) < \varepsilon$.

Παρατηρούμε τα εξής:

(i) Η σειρά $\sum_k |\xi_k|^p$ συγκλίνει, άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

(ii) Για κάθε $k = 1, \ldots, n$ μπορούμε να βρούμε ρητό οσοδήποτε κοντά στον ξ_k. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε ρητό η_k , $k = 1, \ldots, n$ που να ικανοποιεί την

$$|\xi_k - \eta_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2n}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Προσθέτοντας, έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Ορίζουμε $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n, 0, 0, \ldots)$. Τότε, $y \in M$ και

$$\begin{aligned} d_p(x,y) &= \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \\ &< \left(\frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} \right)^{1/p} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού τα $x \in \ell_p$ και $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόντα, ισχύει $\overline{M} = \ell_p$ (άρα, ο ℓ_p είναι διαχωρίσιμος).

1.4 Ασκήσεις

1. Έστω X το σύνολο όλων των διατεταγμένων m-άδων από 0 ή 1. Δηλαδή, $X = \{0,1\}^m$. Ορίζουμε $d(x,y) =$ το πλήθος των συντεταγμένων στις οποίες διαφέρουν οι m-άδες x και y. Δείξτε ότι η d είναι μετρική.

2. Θεωρούμε τον $C[0,\pi]$ με απόσταση την $d(f,g) = \max_{t\in[0,\pi]} |f(t) - g(t)|$. Αν $x(t) = \sin t$ και $y(t) = \cos t$, βρείτε τον μικρότερο $r > 0$ για τον οποίο $y \in B(x,r)$.

3. Δείξτε ότι ένα μη κενό $A \subseteq (X,d)$ είναι ανοικτό αν και μόνο αν είναι ένωση από ανοικτές μπάλες.

4. Το x_0 λέγεται *σημείο συσσώρευσης* του $A \subseteq (X,d)$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $y \in A$, $y \neq x_0$ τέτοιο ώστε $d(x_0,y) < \varepsilon$. Δείξτε ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ η $D(x_0,\varepsilon)$ περιέχει άπειρα σημεία του A.

5. Αν $A, B \subseteq (X,d)$, δείξτε ότι $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ και $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

6. Έστω (X,d) μετρικός χώρος, και $\emptyset \neq A \subseteq X$. Η *διάμετρος* $\mathrm{diam}(A)$ του A ορίζεται από την $\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}$. Δείξτε ότι:

(α) $A \subseteq B \Longrightarrow \mathrm{diam}(A) \leq \mathrm{diam}(B)$.

(β) $\mathrm{diam}(A) = 0 \Longleftrightarrow$ το A είναι μονοσύνολο.

7. Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του μετρικού χώρου (X,d). Η *απόσταση* $d(A,B)$ των A, B ορίζεται από την $d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$. Δείξτε ότι $A \cap B \neq \emptyset \Longrightarrow d(A,B) = 0$. Δώστε παράδειγμα κλειστών και ξένων υποσυνόλων A, B του $\mathbb{R}^2$ με $d(A,B) = 0$.

8. Έστω B μη κενό υποσύνολο του μετρικού χώρου (X,d). Η *απόσταση* του $x \in X$ από το B ορίζεται από την $d(x,B) = \inf\{d(x,b) : b \in B\}$. Δείξτε ότι για κάθε $x, y \in X$ ισχύει $|d(x,B) - d(y,B)| \leq d(x,y)$.

9. Αν $A \subseteq (X,d)$, δείξτε ότι $x \in \overline{A}$ αν και μόνο αν $d(x,A) = 0$. Δείξτε ότι αν A είναι κλειστό υποσύνολο του X και $x \notin A$, τότε $d(x,A) > 0$.

10. Έστω (X,d) μετρικός χώρος, και A, B ξένα, κλειστά υποσύνολα του X. Δείξτε ότι υπάρχει $f : X \to [0,1]$ συνεχής συνάρτηση, με την ιδιότητα: $f(a) = 0$ για κάθε $a \in A$, και $f(b) = 1$ για κάθε $b \in B$.

11. Θεωρούμε το χώρο s όλων των ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Έστω (m_k) ακολουθία θετικών αριθμών, με $\sum_k m_k < +\infty$. Ορίζουμε απόσταση d στον s ως εξής: αν $x = (\xi_k)$, $y = (\eta_k) \in s$, θέτουμε

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}.$$

Δείξτε ότι ο (s,d) είναι μετρικός χώρος, και υπολογίστε τη διάμετρό του.

12. Δείξτε ότι για κάθε $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}$,

$$(|\xi_1| + \cdots + |\xi_n|)^2 \leq n\left(|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2\right).$$

13. (α) Βρείτε μια ακολουθία $x = (\xi_k)$ που έχει όριο το 0, αλλά $x \notin \ell_p$ για κάθε $p \geq 1$.

(β) Δείξτε ότι αν $x \in \ell_p$ για κάποιο $p \geq 1$, τότε $\xi_k \to 0$.

14. Βρείτε $x = (\xi_k)$ τέτοια ώστε $x \notin \ell_1$ αλλά $x \in \ell_p$ για κάθε $p > 1$.

15. Θεωρούμε το χώρο $B[a,b]$ όλων των φραγμένων $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με απόσταση την $d(f,g) = \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|$. Δείξτε ότι ο $B[a,b]$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

16. Θεωρούμε το χώρο $C[a,b]$ όλων των συνεχών $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ με απόσταση την $d(f,g)=\max_{t\in[a,b]}|f(t)-g(t)|$. Δείξτε ότι είναι διαχωρίσιμος.

17. Δείξτε ότι η εικόνα ανοικτού συνόλου μέσω συνεχούς απεικόνισης μεταξύ μετρικών χώρων δεν είναι αναγκαστικά ανοικτό σύνολο.

18. Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις, και έστω p,q συζυγείς εκθέτες. Δείξτε την ανισότητα του Hölder

$$\Big|\int_a^b f(t)g(t)dt\Big| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(t)|^q\right)^{1/q}.$$

Δείξτε την ανισότητα του Minkowski

$$\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

19. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, και $0<q<p<r<+\infty$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b |f(t)|^p dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^q dt\right)^{\frac{r-p}{r-q}}\left(\int_a^b |f(t)|^r dt\right)^{\frac{p-q}{r-q}}.$$

Υποδείξεις - απαντήσεις

1. Παρατηρήστε ότι αν $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ και $y = (\eta_1, \ldots, \eta_m) \in X$, τότε: αν $\xi_k = \eta_k$ έχουμε $|\xi_k - \eta_k| = 0$, ενώ αν $\xi_k \neq \eta_k$ έχουμε $|\xi_k - \eta_k| = 1$. Άρα, το πλήθος των συντεταγμένων στις οποίες διαφέρουν οι x και y ισούται με

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{m} |\xi_k - \eta_k|.$$

Τώρα μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι η d είναι μετρική:

(α) $d(x,y) = \sum_{k=1}^{m} |\xi_k - \eta_k| \geq 0$, με ισότητα μόνο αν $|\xi_k - \eta_k| = 0$ για κάθε k, δηλαδή αν $\xi_k = \eta_k$ για κάθε k, δηλαδή αν $x = y$.

(β) $d(y,x) = \sum_{k=1}^{m} |\eta_k - \xi_k| = \sum_{k=1}^{m} |\xi_k - \eta_k| = d(x,y)$.

(γ) Αν $x = (\xi_k)$, $y = (\eta_k)$ και $z = (\zeta_k) \in X$, τότε

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{k=1}^{m} |\xi_k - \eta_k| = \sum_{k=1}^{m} |(\xi_k - \zeta_k) + (\zeta_k - \eta_k)| \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} |\xi_k - \zeta_k| + \sum_{k=1}^{m} |\zeta_k - \eta_k| \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

2. Έχουμε $y \in B(x,r)$ αν και μόνο αν $d(x,y) \leq r$. Ο μικρότερος r για το οποίο ισχύει αυτή η ανισότητα είναι η απόσταση των x και y:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \max_{0 \leq t \leq \pi} |\sin t - \cos t| = \sqrt{\max_{0 \leq t \leq \pi} (\sin t - \cos t)^2} \\ &= \sqrt{\max_{0 \leq t \leq \pi} (1 - \sin(2t))} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

3. Έστω ότι $A = \cup_{i \in I} D(x_i, r_i)$ όπου $x_i \in X$ και $r_i > 0$. Αν $a \in A$, τότε υπάρχει $i_0 \in I$ για το οποίο $a \in D(x_{i_0}, r_{i_0})$. Θέτουμε $r(a) = r_{i_0} - d(a, x_{i_0}) > 0$. Από την τριγωνική ανισότητα,

$$D(a, r(a)) \subseteq D(x_{i_0}, r_{i_0}) \subseteq A.$$

Το τυχόν $a \in A$ είναι εσωτερικό σημείο του A, άρα το A είναι ανοικτό.

Έστω A ανοικτό υποσύνολο του X. Για κάθε $a \in A$ μπορούμε να βρούμε $r(a) > 0$ τέτοιο ώστε $a \in D(a, r(a)) \subseteq A$. Τότε,

$$A = \bigcup_{a \in A} D(a, r(a)).$$

4. Υποθέτουμε πρώτα ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A. Έστω ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε το $D(x_0, \varepsilon) \cap A$ να είναι πεπερασμένο σύνολο. Δηλαδή,

$$D(x_0, \varepsilon) \cap A = \{x_0\} \cup \{y_1, \ldots, y_N\}$$

για κάποια $y_i \neq x_0$ (τουλάχιστον ένα τέτοιο y_i υπάρχει, από τον ορισμό του σημείου συσσώρευσης). Θέτουμε $\varepsilon_1 = \min\{d(x_0, y_1), \ldots, d(x_0, y_N)\} > 0$. Τότε,

$$D(x_0, \varepsilon_1) \cap A = \{x_0\},$$

το οποίο είναι άτοπο, πάλι από τον ορισμό του σημείου συσσώρευσης.

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι κάθε περιοχή του A περιέχει άπειρα σημεία του A. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, το $D(x_0, \varepsilon) \cap A$ είναι άπειρο σύνολο, άρα έχει στοιχείο διαφορετικό από το x_0. Έπεται ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A.

5. (α) Αφού $A, B \subseteq A \cup B$, έχουμε $\overline{A}, \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Άρα,

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}.$$

Αντίστροφα, έστω $x \in \overline{A \cup B}$. Υπάρχουν $x_n \in A \cup B$ με $x_n \to x$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι άπειροι όροι της (x_n) βρίσκονται στο A. Δηλαδή, υπάρχουν $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$ τέτοιοι ώστε $x_{k_n} \in A$. Αφού $x_n \to x$, έπεται ότι $x_{k_n} \to x$. Αφού $x_{k_n} \in A$, συμπεραίνουμε ότι $x \in \overline{A}$. Αν άπειροι όροι της (x_n) βρίσκονται στο B, με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $x \in \overline{B}$. Σε κάθε περίπτωση $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, οπότε

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}.$$

(β) Αφού $A \cap B \subseteq A, B$, έχουμε $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A}, \overline{B}$. Άρα,

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

6. (α) Αν $A \subseteq B$, τότε $\{d(x,y) : x, y \in A\} \subseteq \{d(x,y) : x, y \in B\}$. Άρα,

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\} \leq \sup\{d(x,y) : x, y \in B\} = \mathrm{diam}(B).$$

(β) Αν $A = \{a\}$, τότε $\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\} = \sup\{d(a,a)\} = \sup\{0\} = 0$. Αν πάλι υπάρχουν $a_1 \neq a_2$ στο A, τότε $\mathrm{diam}(A) \geq d(a_1, a_2) > 0$. Άρα, $\mathrm{diam}(A) = 0 \iff$ το A είναι μονοσύνολο.

7. (α) Έστω $w \in A \cap B$. Τότε,

$$0 \leq d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\} \leq d(w,w) = 0.$$

Δηλαδή, $d(A,B) = 0$.

(β) Ορίζουμε τα υποσύνολα $A = \{(n,0) : n \in \mathbb{N}\}$ και $B = \{(k, \frac{1}{k}) : k \in \mathbb{N}\}$ του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^2$. Τότε $A \cap B = \emptyset$, τα A, B είναι κλειστά γιατί όλα τα σημεία τους είναι μεμονωμένα, και

$$d(A,B) \leq d((n,0),(n,1/n)) = 1/n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $d(A,B) = 0$.

8. Έστω $x, y \in X$. Για κάθε $b \in B$ έχουμε $d(x,b) \leq d(x,y) + d(y,b)$. Αφού $d(x,B) \leq d(x,b)$, συμπεραίνουμε ότι

$$d(x,B) \leq d(x,y) + d(y,b) \Longrightarrow d(x,B) - d(x,y) \leq d(y,b).$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $b \in B$, παίρνουμε

$$d(x,B) - d(x,y) \leq \inf\{d(y,b) : b \in B\} = d(y,B),$$

δηλαδή

$$d(x,B) - d(y,B) \leq d(x,y).$$

Όμοια βλέπουμε ότι $d(y,B) - d(x,B) \leq d(x,y)$. Άρα,

$$|d(x,B) - d(y,B)| \leq d(x,y).$$

Έπεται ότι η $d(\cdot, B) : X \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

9. (α) Έστω $x \in \overline{A}$. Υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με $x_n \to x$. Τότε, $0 \leq d(x,A) \leq d(x,x_n) \to 0$. Άρα, $d(x,A) = 0$. Αντίστροφα, αν $d(x,A) = 0$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $x_n \in A$ με $d(x,x_n) < 1/n$, οπότε $x_n \to x$ και αυτό σημαίνει ότι $x \in \overline{A}$.

(β) Αφού $x \notin A$ και το A είναι κλειστό, υπάρχει $r > 0$ τέτοιος ώστε $D(x,r) \cap A = \emptyset$. Αυτό σημαίνει ότι $d(x,a) \geq r$ για κάθε $a \in A$, άρα $d(x,A) \geq r > 0$.

10. Για κάθε $x \in X$ έχουμε $d(x,A) + d(x,B) > 0$. Αν το άθροισμα αυτό ήταν ίσο με μηδέν, θα είχαμε $d(x,A) = d(x,B) = 0$ και αφού τα A, B είναι κλειστά, από την προηγούμενη άσκηση θα είχαμε $x \in A \cap B$, το οποίο είναι άτοπο γιατί τα A, B έχουν υποτεθεί ξένα.

Ορίζουμε $f : X \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}.$$

Ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται, άρα η f είναι καλά ορισμένη. Επίσης, η f είναι συνεχής γιατί οι $d(\cdot, A)$ και $d(\cdot, B)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις από την Άσκηση 8. Αφού $d(x, A), d(x, B) \geq 0$, είναι φανερό ότι $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in X$.

Τέλος, αν $a \in A$ τότε

$$f(a) = \frac{d(a, A)}{d(a, A) + d(a, B)} = 0,$$

ενώ αν $b \in B$ τότε

$$f(b) = \frac{d(b, A)}{d(b, A) + d(b, B)} = \frac{d(b, A)}{d(b, A)} = 1.$$

11. Η d είναι καλά ορισμένη, γιατί αν $x = (\xi_k)$ και $y = (\eta_k) \in s$, τότε

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} \leq \sum_{k=1}^{\infty} m_k < +\infty.$$

Αυτό δείχνει ταυτόχρονα ότι η διάμετρος του (s, d) είναι $\mathrm{diam}(s) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m_k$.

Από τις ιδιότητες της μετρικής, η μόνη που χρειάζεται έλεγχο είναι η τριγωνική ανισότητα: αν $x = (\xi_k)$, $y = (\eta_k)$ και $z = (\zeta_k) \in s$, τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $\frac{t}{1+t}$ είναι αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και την $|\xi_k - \eta_k| \leq |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} &\leq \frac{|\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|} \\
&= \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|} + \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|} \\
&\leq \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k|} + \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\zeta_k - \eta_k|}.
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας ως προς k αφού πολλαπλασιάσουμε με τους θετικούς m_k, έχουμε

$$\begin{aligned}
d(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k|} + \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\zeta_k - \eta_k|} \\
&= d(x, z) + d(z, y).
\end{aligned}$$

Τέλος, αν πάρουμε $x_M = (M, \ldots, M, \ldots)$ όπου $M > 0$, και $y = (0, \ldots, 0, \ldots)$, έχουμε

$$\mathrm{diam}(s) \geq d(x_M, y) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{M}{1 + M} = \frac{M}{1 + M} \sum_{k=1}^{\infty} m_k,$$

και αφού $\frac{M}{1+M} \nearrow 1$ όταν $M \to \infty$, παίρνουμε

$$\mathrm{diam}(s) \geq \sup_{M>0} d(x_M, y) = \left(\sup_{M>0} \frac{M}{1 + M} \right) \sum_{k=1}^{\infty} m_k = \sum_{k=1}^{\infty} m_k.$$

Δηλαδή, $\mathrm{diam}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k$.

12. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
|\xi_1| + \cdots + |\xi_n| &= 1 \cdot |\xi_1| + \cdots + 1 \cdot |\xi_n| \\
&\leq \left(1^2 + \cdots + 1^2\right)^{1/2} \left(|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{n} \left(|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε το ζητούμενο.

13. (α) Παίρνουμε $\xi_k = \frac{1}{\ln(k+1)}$, $k \in \mathbb{N}$. Τότε, $\xi_k \to 0$ όταν $k \to \infty$, όμως το κριτήριο συμπύκνωσης δείχνει ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(k+1)]^p} = +\infty$$

για κάθε $p \geq 1$. Άρα $(\frac{1}{\ln(k+1)}) \notin \ell_p$ για όλα τα $p \geq 1$.

(β) Υποθέτουμε ότι $x = (\xi_k) \in \ell_p$ για κάποιο $p \geq 1$. Τότε,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < +\infty.$$

Αφού η σειρά συγκλίνει, παίρνουμε $|\xi_k|^p \to 0$. Έπεται ότι $|\xi_k| \to 0$, άρα $\xi_k \to 0$.

14. Δοκιμάστε $\xi_k = \frac{1}{k}$. Έχουμε $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ (η αρμονική σειρά αποκλίνει), όμως για κάθε $p > 1$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει (Ανάλυση ΙΙ).

15. Για κάθε $x \in (a, b)$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f_x : [a, b] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής: $f_x(t) = 1$ αν $a \leq t \leq x$ και $f_x(t) = 0$ αν $x < t \leq b$. Κάθε f_x είναι φραγμένη, άρα ανήκει στον $B[a, b]$. Το πλήθος των f_x είναι υπεραριθμήσιμο (όσα τα σημεία του (a, b)).

Έστω $x < y$ στο (a, b). Τότε, υπάρχει t_0 με $x < t_0 < y$. Αυτό μάς δίνει $f_x(t_0) = 0$ και $f_y(t_0) = 1$. Άρα,

$$d(f_x, f_y) = \sup\{|f_x(t) - f_y(t)| : t \in [a, b]\} \geq |f_x(t_0) - f_y(t_0)| = 1.$$

Στο μετρικό χώρο $B[a, b]$ βρήκαμε υπεραριθμήσιμα το πλήθος σημεία (τις f_x) που ανά δύο απέχουν απόσταση τουλάχιστον ίση με 1 (είναι ακριβώς ίση με 1 - γιατί;). Από γενική παρατήρηση, ο χώρος δεν μπορεί να είναι διαχωρίσιμος.

16. Δείχνουμε πρώτα το εξής: αν $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m$, $a_i \in \mathbb{R}$, είναι ένα πολυώνυμο στο $[a, b]$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε πολυώνυμο $q(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_m t^m$ με ρητούς συντελεστές $b_i \in \mathbb{Q}$, τέτοιο ώστε

$$d(p, q) = \max_{t \in [a,b]} |p(t) - q(t)| < \varepsilon.$$

Πράγματι, αν $M = \max\{|a|, |b|\}$, για κάθε $i = 0, 1, \ldots, m$ μπορούμε να βρούμε $b_i \in \mathbb{Q}$ τέτοιον ώστε

$$|a_i - b_i| < \frac{\varepsilon}{M^j (m+1)}.$$

Τότε, αν ορίσουμε $q(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_m t^m$, για κάθε $t \in [a, b]$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|p(t) - q(t)| &= |(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)t + \cdots + (a_m - b_m)t^m| \\
&\leq |a_0 - b_0| + |a_1 - b_1| \cdot |t| + \cdots + |a_m - b_m| \cdot |t|^m \\
&< \frac{\varepsilon}{m+1} + \frac{\varepsilon}{M(m+1)} M + \cdots + \frac{\varepsilon}{M^m (m+1)} M^m \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Δηλαδή, $d(p, q) < \varepsilon$.

Ορίζουμε $D = \{q(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_m t^m : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, b_i \in \mathbb{Q}\}$. Το D είναι αριθμήσιμο σύνολο. Αν $f \in C[a, b]$ και $\varepsilon > 0$, από το θεώρημα του Weierstrass υπάρχει πολυώνυμο p με πραγματικούς συντελεστές, τέτοιο ώστε $d(f, p) < \varepsilon/2$. Από την προηγούμενη παρατήρηση, υπάρχει $q \in D$ για το οποίο $d(p, q) < \varepsilon/2$. Άρα,

$$d(f, q) \leq d(f, p) + d(p, q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Αφού η f και το ε ήταν τυχόντα, βλέπουμε ότι $\overline{D} = C[a, b]$. Αφού το D είναι αριθμήσιμο, ο $C[a, b]$ είναι διαχωρίσιμος.

17. Θέτουμε $X = Y = \mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική $d(x, y) = |x - y|$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής, αλλά δεν στέλνει τα μη κενά ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ σε ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$: αν $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό, τότε $f(A) = \{0\}$, το οποίο δεν είναι ανοικτό.

18. (α) Θέτουμε $A = \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$ και $B = \left(\int |g|^q\right)^{1/q}$. Αν $A = 0$ ή $B = 0$, τότε από τη συνέχεια των f, g βλέπουμε ότι $f \equiv 0$ ή $g \equiv 0$ στο $[a, b]$, οπότε η ανισότητα γίνεται $0 \leq 0$. Αν $A > 0$ και $B > 0$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Young γράφουμε

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \frac{f(t)}{A} \frac{g(t)}{B} dt\right| &\leq \int_a^b \frac{|f(t)|}{A} \frac{|g(t)|}{B} dt \\
&\leq \int_a^b \left(\frac{1}{p} \frac{|f(t)|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(t)|^q}{B^q}\right) dt \\
&= \frac{1}{p} \frac{\int_a^b |f|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \frac{\int_a^b |g|^q}{B^q} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq AB = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q}.$$

(β) Αν $p = 1$, η ανισότητα του Minkowski είναι απλή:

$$\int |f+g| \leq \int (|f| + |g|) = \int |f| + \int |g|.$$

Αν $p > 1$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Hölder γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int |f+g|^p &= \int |f+g|^{p-1}|f+g| \leq \int |f+g|^{p-1}(|f|+|g|) \\
&= \int |f+g|^{p-1}|f| + \int |f+g|^{p-1}|g| \\
&\leq \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left(\int |f|^p\right)^{1/p} \\
&+ \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left(\int |g|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\int |f+g|^p\right)^{1/q} \left(\left(\int |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p\right)^{1/p}\right),
\end{aligned}$$

γιατί $(p-1)q = p$. Αν το αριστερό μέλος είναι γνήσια θετικό, διαιρώντας με $\left(\int |f+g|^p\right)^{1/q}$ και χρησιμοποιώντας την $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, παίρνουμε

$$\left(\int |f+g|^p\right)^{1/p} = \left(\int |f+g|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\int |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p\right)^{1/p}.$$

Αν $\int |f+g|^p = 0$, τότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε.

19. Παρατηρούμε ότι οι $\alpha = \frac{r-q}{r-p}$ και $\beta = \frac{r-q}{p-q}$ είναι συζυγείς εκθέτες και $p = \frac{q}{\alpha} + \frac{r}{\beta}$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα του Hölder για τις $|f|^{q/\alpha}$ και $|f|^{r/\beta}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int |f|^p &= \int |f|^{q/\alpha} \cdot |f|^{r/\beta} \\
&\leq \left(\int (|f|^{q/\alpha})^\alpha\right)^{1/\alpha} \left(\int (|f|^{r/\beta})^\beta\right)^{1/\beta} \\
&= \left(\int |f|^q\right)^{\frac{r-p}{r-q}} \left(\int |f|^r\right)^{\frac{p-q}{r-q}}.
\end{aligned}$$

Κεφάλαιο 2

Πλήρεις μετρικοί χώροι

2.1 Ακολουθίες Cauchy - πλήρεις μετρικοί χώροι

Ορισμός Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Μια ακολουθία (x_n) στον X λέγεται *ακολουθία Cauchy* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$n, m \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Ένα από τα πιο βασικά αποτελέσματα στην «Ανάλυση Ι» είναι το εξής: μια ακολουθία (x_n) πραγματικών αριθμών συγκλίνει αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.

Το παραπάνω δεν ισχύει σε *κάθε* μετρικό χώρο (X,d). Παράδειγμα: πάρτε $X = (0,1]$ με απόσταση την $d(x,y) = |x-y|$. Η ακολουθία $x_n = \frac{1}{n}$ είναι Cauchy αλλά δεν συγκλίνει σε σημείο του X (το σημείο 0, στο οποίο η (x_n) «θέλει» να συγκλίνει, δεν ανήκει στον X.) Δοκιμάστε να δώσετε αυστηρή απόδειξη του ότι δεν υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $x_n \to x$.

Υπάρχουν πάντως αρκετές ομοιότητες ανάμεσα στη θεωρία των ακολουθιών Cauchy τυχόντος μετρικού χώρου (X,d) και την αντίστοιχη θεωρία στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση 2.1.1. *Αν η (x_n) συγκλίνει στο x, τότε η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$n \geq n_0 \Longrightarrow d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αν λοιπόν $n, m \geq n_0$, τότε

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

Λέμε ότι ένα σύνολο $A \subseteq X$ είναι *φραγμένο* αν υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r > 0$ τέτοια ώστε $A \subseteq B(x_0, r)$. Μια ακολουθία (x_n) είναι *φραγμένη* αν υπάρχουν $x_0 \in X, r > 0$ τέτοια ώστε

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; x_n \in B(x_0, r).$$

Πρόταση 2.1.2. *Κάθε ακολουθία Cauchy (x_n) είναι φραγμένη.*

Απόδειξη: Παίρνουμε $\varepsilon = 1$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: αν $n, m \geq n_0$, τότε $d(x_n, x_m) < 1$. Ειδικότερα,

$$n \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_{n_0}) < 1.$$

Παίρνουμε $r = \max\{d(x_1, x_{n_0}) + 1, \ldots, d(x_{n_0-1}, x_{n_0}) + 1\}$. Ελέγξτε ότι

$$d(x_n, x_{n_0}) \leq r$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή όλοι οι όροι της (x_n) βρίσκονται στην $B(x_{n_0}, r)$. $\square$

Πρόταση 2.1.3. *Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x \in X$ και υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) με $x_{k_n} \to x$. Τότε, $x_n \to x$ (αν λοιπόν μια ακολουθία Cauchy έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε συγκλίνει.)*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Η (x_{k_n}) συγκλίνει στο x, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$n \geq n_0 \Longrightarrow d(x, x_{k_n}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αφού η (x_n) είναι Cauchy, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$n, m \geq n_1 \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θέτουμε $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Αν $n \geq n_2$, τότε $k_n \geq n \geq n_2 \geq n_1$, άρα

$$d(x_n, x_{k_n}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

και $k_n \geq n \geq n_2 \geq n_0$, άρα

$$d(x, x_{k_n}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Προσθέτοντας, βλέπουμε ότι αν $n \geq n_2$,

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Δηλαδή, $x_n \to x$. $\square$

Ορισμός Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Ο X λέγεται *πλήρης* αν κάθε ακολουθία Cauchy (x_n) στον X συγκλίνει (σε σημείο του X).

Με βάση αυτόν τον ορισμό, ο $X = (0, 1]$, με μετρική την $d(x, y) = |x - y|$, δεν είναι πλήρης.

Οι *συμπαγείς* μετρικοί χώροι μάς δίνουν μια πρώτη ευρεία κλάση πλήρων μετρικών χώρων (θυμηθείτε ότι, ο X είναι συμπαγής $\Leftrightarrow \forall (x_n)$ στον X, υπάρχουν $x \in X$ και υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) με $x_{k_n} \to x$):

Πρόταση 2.1.4. *Κάθε συμπαγής μετρικός χώρος (X, d) είναι πλήρης.*

Απόδειξη: Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον X. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) με $x_{k_n} \to x \in X$. Από την Πρόταση 2.1.3,

$$x_n \to x. \quad \square$$

Αργότερα, θα χρειαστούμε ένα κριτήριο για το πότε ένας υπόχωρος ενός πλήρους μετρικού χώρου είναι πλήρης:

Πρόταση 2.1.5. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος, και έστω Y ένας υπόχωρος του X.*

(α) *Αν ο Y είναι πλήρης ως προς την επαγόμενη μετρική, τότε ο Y είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

(β) *Αν ο (X, d) είναι πλήρης και ο Y είναι κλειστό υποσύνολο του X, τότε ο Y είναι πλήρης ως προς την επαγόμενη μετρική.*

Ειδικότερα, αν ο X είναι πλήρης, τότε ο είναι Y πλήρης μετρικός χώρος αν και μόνο αν ο Y είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Απόδειξη: (α) Έστω $x_n \in Y$ και $x_n \to x \in X$. Η (x_n) συγκλίνει στον X, άρα είναι ακολουθία Cauchy στον X (Πρόταση 2.1.1). Η απόσταση $\tilde{d}$ στον Y είναι απλώς ο περιορισμός της d, άρα η (x_n) είναι Cauchy στον Y. Ο Y είναι πλήρης ως προς την $\tilde{d}$, άρα η (x_n) συγκλίνει *σε σημείο του* Y. Η σύγκλιση αυτή είναι ταυτόχρονα σύγκλιση ως προς την d στον X, και από μοναδικότητα του ορίου, το όριο πρέπει να είναι το x. Δηλαδή, $x \in Y$. Αυτό αποδεικνύει ότι το Y είναι κλειστό υποσύνολο του X.

(β) Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον Y. Αφού $x_n \in Y \subseteq X$, η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy στον X. Ο X είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $x_n \to x$. Επομένως, $x \in \overline{Y}$. Όμως το Y είναι κλειστό, άρα $x \in Y$. Δηλαδή, $x_n \to x$ στον Y. $\square$

2.2 Πλήρεις μετρικοί χώροι - παραδείγματα

Μια γενική παρατήρηση για τον τρόπο με τον οποίο δείχνουμε ότι ένας μετρικός χώρος είναι πλήρης: θεωρούμε τυχούσα ακολουθία (x_n) που είναι Cauchy στον (X,d), και

(α) εντοπίζουμε το σημείο x στο οποίο θα πρέπει να συγκλίνει η (x_n) (στα κλασικά παραδείγματα, πολύ συχνά μάς βοηθάει η πληρότητα της πραγματικής ευθείας).

(β) δείχνουμε ότι $x \in X$.

(γ) δείχνουμε ότι $x_n \to x$ ως προς τη μετρική d.

Πρόταση 2.2.1. *Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^m$ με μετρική την*

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{m} (\xi_k - \eta_k)^2 \right)^{1/2}$$

είναι πλήρης.

Απόδειξη: Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον $\mathbb{R}^m$. Γράφουμε $x_n = (\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nm})$, $\xi_{nk} \in \mathbb{R}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Η (x_n) είναι Cauchy, επομένως υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$n, s \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, x_s) < \varepsilon.$$

Στην περίπτωσή μας αυτό σημαίνει ότι

$$(*) \qquad n, s \geq n_0 \Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{m} (\xi_{nk} - \xi_{sk})^2 \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Η βασική παρατήρηση είναι ότι

$$\forall k = 1, \ldots, m, \qquad |\xi_{nk} - \xi_{sk}| \leq \left(\sum_{k=1}^{m} (\xi_{nk} - \xi_{sk})^2 \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Επομένως, αν $n, s \geq m_0$, τότε για κάθε $k = 1, \ldots, m$ χωριστά έχουμε

$$|\xi_{nk} - \xi_{sk}| < \varepsilon.$$

Αυτό σημαίνει ότι: για κάθε $k = 1, \ldots, m$ η ακολουθία (ξ_{nk}) είναι Cauchy στο $\mathbb{R}$. Από την πληρότητα του $\mathbb{R}$ έπεται ότι υπάρχουν $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\xi_{n1} \to \xi_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad \xi_{nm} \to \xi_m$$

καθώς $n \to \infty$. *Ορίζουμε* $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$, και μένει να δείξουμε ότι $d(x_n, x) \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Επιστρέφουμε στην $(*)$: για κάθε $n, s \geq n_0$ έχουμε

$$\left(\sum_{k=1}^{m} (\xi_{nk} - \xi_{sk})^2 \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Σταθεροποιούμε το n και αφήνουμε το s να πάει στο άπειρο:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} (\xi_{nk} - \xi_{sk})^2 \right)^{1/2} \to \left(\sum_{k=1}^{m} (\xi_{nk} - \xi_k)^2 \right)^{1/2}.$$

Άρα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$d(x_n, x) = \left(\sum_{k=1}^{m} (\xi_{nk} - \xi_k)^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, βλέπουμε ότι $d(x_n, x) \to 0$. Δηλαδή, $x_n \to x$. $\square$

Πρόταση 2.2.2. *Ο χώρος ℓ_∞ των φραγμένων ακολουθιών, με μετρική την*

$$d(x,y) = \sup\{|\xi_k - \eta_k| : k \in \mathbb{N}\}$$

είναι πλήρης.

Απόδειξη: Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον ℓ_∞. Γράφουμε $x_n = (\xi_{nk}) = (\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nk}, \ldots)$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Η (x_n) είναι Cauchy, άρα υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$(*) \qquad \forall n, s \geq n_0, \ \ \sup\{|\xi_{nk} - \xi_{sk}| : k \in \mathbb{N}\} < \varepsilon.$$

Επομένως, αν $n, s \geq n_0$ έχουμε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ χωριστά

$$(**) \qquad |\xi_{nk} - \xi_{sk}| < \varepsilon.$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η ακολουθία (ξ_{nk}) είναι Cauchy (ως προς n) στο $\mathbb{R}$. Άρα, υπάρχουν $\xi_k \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\xi_{n1} \to \xi_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad \xi_{nk} \to \xi_k, \ldots \quad (n \to \infty).$$

Ορίζουμε $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots)$. Πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι $x \in \ell_\infty$.

Επιστρέφοντας στην $(*)$ και σταθεροποιώντας $s = n_0$, έχουμε

$$\forall n \geq n_0 \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \ |\xi_{nk} - \xi_{n_0k}| < \varepsilon$$

και, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$|\xi_{nk} - \xi_{n_0k}| \to |\xi_k - \xi_{n_0k}|$$

καθώς $n \to \infty$. Άρα, $|\xi_k - \xi_{n_0k}| \leq \varepsilon$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \ |\xi_k| \leq |\xi_{n_0k}| + \varepsilon.$$

Όμως $x_{n_0} \in \ell_\infty$. Άρα, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|\xi_{n_0k}| \leq M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $\sup_k |\xi_k| \leq M + \varepsilon$, δηλαδή $x \in \ell_\infty$.

Επίσης, από την $(**)$, αφήνοντας το $s \to \infty$ έχουμε:

$$\forall n \geq n_0 \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \ |\xi_{nk} - \xi_k| \leq \varepsilon,$$

δηλαδή, για κάθε $n \geq n_0$,

$$d(x_n, x) = \sup\{|\xi_{nk} - \xi_k| : k \in \mathbb{N}\} \leq \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $x_n \to x$ ως προς την d. □

Ορισμός. Ο *χώρος* c αποτελείται από όλες τις συγκλίνουσες ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη, επομένως ο c είναι υποσύνολο του ℓ_∞. Τον βλέπουμε σαν υπόχωρο του ℓ_∞, με μετρική την

$$d(x,y) = \sup\{|\xi_k - \eta_k| : k \in \mathbb{N}\}.$$

Θεωρούμε επίσης το χώρο c_0 των μηδενικών ακολουθιών ($x = (\xi_k) \in c_0$ αν και μόνο αν $\xi_k \to 0$ όταν $k \to \infty$) σαν υπόχωρο του c.

Πρόταση 2.2.3. *Οι c και c_0 είναι πλήρεις μετρικοί χώροι.*

Απόδειξη: Ο c είναι εξ ορισμού υπόχωρος του ℓ_∞. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.5, για να δείξουμε ότι είναι πλήρης αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞.

Έστω $x = (\xi_k) \in \bar{c}$. Δηλαδή, υπάρχουν $x_n = (\xi_{nk}) \in c$ με $x_n \to x$. Πρέπει να δείξουμε ότι $x \in c$, δηλαδή ότι η (ξ_k) συγκλίνει στο $\mathbb{R}$. Αρκεί να δείξουμε ότι η (ξ_k) είναι Cauchy στο $\mathbb{R}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $d(x, x_n) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή,

$$(1) \qquad \forall n \geq n_0 \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \ |\xi_k - \xi_{nk}| < \varepsilon.$$

Κρατάμε ένα μόνο n: τον n_0. Η $x_{n_0} = (\xi_{n_0 k})$ ανήκει στον c, δηλαδή συγκλίνει, δηλαδή είναι Cauchy. Άρα, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$(2) \qquad \forall s, r \geq k_0, \ \ |\xi_{n_0 s} - \xi_{n_0 r}| < \varepsilon.$$

Τότε, χρησιμοποιώντας τις (1) και (2) βλέπουμε ότι, για κάθε $s, r \geq k_0$,

$$\begin{aligned} |\xi_s - \xi_r| &\leq |\xi_s - \xi_{n_0 s}| + |\xi_{n_0 s} - \xi_{n_0 r}| + |\xi_{n_0 r} - \xi_r| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα, η (ξ_k) είναι Cauchy, δηλαδή $x \in c$. Αφού $\overline{c} \subseteq c$, ο c είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞.

Για το δεύτερο ισχυρισμό, έστω $x = (\xi_k) \in \overline{c_0}$. Δηλαδή, υπάρχουν $x_n = (\xi_{nk}) \in c_0$ με $x_n \to x$. Πρέπει να δείξουμε ότι $x \in c_0$, δηλαδή ότι $\xi_k \to 0$ όταν $k \to \infty$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $d(x, x_n) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή,

$$(3) \qquad \forall n \geq n_0 \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \ |\xi_k - \xi_{nk}| < \varepsilon.$$

Η $x_{n_0} = (\xi_{n_0 k})$ ανήκει στον c_0, άρα, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$(4) \qquad \forall k \geq k_0, \ \ |\xi_{n_0 k}| < \varepsilon.$$

Τότε, χρησιμοποιώντας τις (3) και (4) βλέπουμε ότι, για κάθε $k \geq k_0$,

$$|\xi_k| \leq |\xi_k - \xi_{n_0 k}| + |\xi_{n_0 k}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Άρα, $\xi_k \to 0$ όταν $k \to \infty$, δηλαδή $x \in c_0$. □

Πρόταση 2.2.4. *Ο χώρος ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$, είναι πλήρης.*

Απόδειξη: Θα μιμηθούμε την απόδειξη της Πρότασης 2.2.1. Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον ℓ_p. Γράφουμε $x_n = (\xi_{nk}) = (\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nk}, \ldots)$, $\xi_{nk} \in \mathbb{R}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Η (x_n) είναι Cauchy, επομένως υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$(*) \qquad n, s \geq n_0 \Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk} - \xi_{sk}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Άρα, για κάθε $n, s \geq n_0$ και κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$|\xi_{nk} - \xi_{sk}| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk} - \xi_{sk}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Δηλαδή, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η ακολουθία (ξ_{nk}) είναι Cauchy (ως προς n) στο $\mathbb{R}$. Από την πληρότητα του $\mathbb{R}$, υπάρχουν $\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\xi_{n1} \to \xi_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad \xi_{nk} \to \xi_k, \ldots$$

καθώς $n \to \infty$. *Ορίζουμε* $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots)$. Πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι $x \in \ell_p$.

Κρατάμε $N \in \mathbb{N}$ σταθερό, και από την $(*)$ έχουμε

$$\forall n, s \geq m_0, \qquad \left(\sum_{k=1}^{N} |\xi_{nk} - \xi_{sk}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon,$$

και

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |\xi_{nk} - \xi_{sk}|^p \right)^{1/p} \to \left(\sum_{k=1}^{N} |\xi_{nk} - \xi_{k}|^p \right)^{1/p}$$

καθώς $s \to \infty$, οπότε

$$\forall n \geq n_0, \qquad \left(\sum_{k=1}^{N} |\xi_{nk} - \xi_k|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon,$$

και αφήνοντας το $N \to \infty$ παίρνουμε

$$(**) \qquad \forall n \geq n_0, \qquad \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk} - \xi_k|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon.$$

Δηλαδή, π.χ. για $n = n_0$, η $(\xi_{nk} - \xi_k) \in \ell_p$, και αφού $(\xi_{nk}) \in \ell_p$, από την ανισότητα του Minkowski βλέπουμε ότι $x = (\xi_k) = ((\xi_k - \xi_{nk}) + \xi_{nk}) \in \ell_p$.

Επιπλέον, η $(**)$ είναι ισοδύναμη με την

$$\forall n \geq n_0, \ \ d(x, x_n) \leq \varepsilon,$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $x_n \to x$. $\square$

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με μερικά σημαντικά παραδείγματα μετρικών χώρων που *δεν* είναι πλήρεις:

(α) Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών, με μετρική την $d(x,y) = |x-y|$. Ο $(\mathbb{Q}, d)$ δεν είναι πλήρης: είναι υπόχωρος της πραγματικής ευθείας, κι αν ήταν πλήρης θα έπρεπε να είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Όμως, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

(β) Θεωρούμε το χώρο $C[a,b]$ των συνεχών συναρτήσεων $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, με μετρική την

$$d(f,g) = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|.$$

Ο $(C[a,b], d)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος (άσκηση). Θεωρούμε τον υπόχωρο X του $C[a,b]$ που αποτελείται από τα πολυώνυμα $p : [a,b] \to \mathbb{R}$. Από το Θεώρημα του Weierstrass, για κάθε $f \in C[a,b]$ και κάθε $\varepsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε πολυώνυμο $p \in X$ τέτοιο ώστε

$$d(f,p) = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - p(t)| < \varepsilon.$$

Δηλαδή, $\overline{X} = C[a,b] \neq X$ (υπάρχουν συνεχείς f που δεν είναι πολυώνυμα). Άρα, ο X δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $C[a,b]$, και από την Πρόταση 2.1.5 συμπεραίνουμε ότι ο X δεν είναι πλήρης.

Τα παραδείγματα (α) και (β) είναι κατά κάποιον τρόπο «τεχνητά»: ξεκινήσαμε με έναν πλήρη χώρο (την πραγματική ευθεία ή το χώρο των συνεχών συναρτήσεων στο $[a,b]$), και πήραμε ένα γνήσιο πυκνό υποσύνολό του (τους ρητούς ή τα πολυώνυμα) σαν υπόχωρό του, με την επαγόμενη δηλαδή μετρική. Αφού ο υπόχωρός μας δεν είναι κλειστός, δεν μπορεί να είναι πλήρης μετρικός χώρος. Ας δούμε κι ένα πιο ουσιαστικό παράδειγμα:

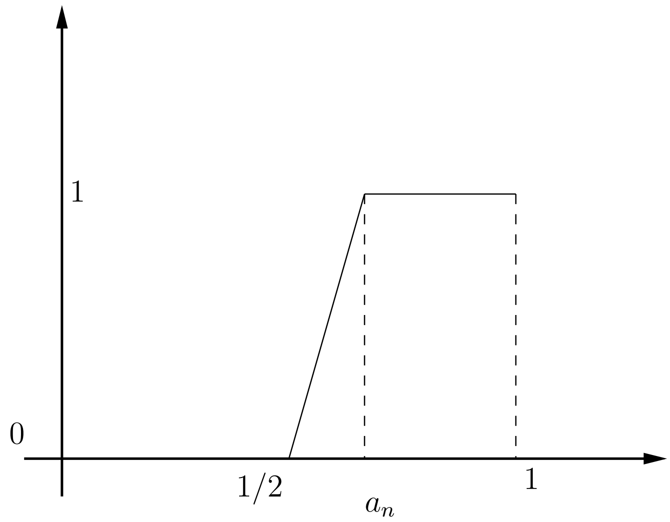
(γ) Θεωρούμε το χώρο X των συνεχών συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, τώρα όμως με μια άλλη μετρική:

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η d ικανοποιεί τα αξιώματα (M1)$-$(M4).

Ο (X,d) δεν είναι πλήρης: Ορίζουμε μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων (f_n), $n \geq 3$, στον X ως εξής:

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ n\left(t - \frac{1}{2}\right) & , \frac{1}{2} < t < a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1 & , a_n \leq t \leq 1. \end{cases}$$



Σχήμα 2.1: Τα γραφήματα των συναρτήσεων f_n

(1) Η (f_n) είναι ακολουθία Cauchy ως προς την d: έστω $n > m$. Τότε,

$$a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = a_n,$$

και (βλέπε Σχήμα 2.1),

$$\begin{aligned} d(f_n, f_m) &= \int_0^{1/2} |f_n - f_m| + \int_{1/2}^{a_m} |f_n - f_m| + \int_{a_m}^1 |f_n - f_m| \\ &= \int_{1/2}^{a_m} |f_n - f_m| \leq a_m - \frac{1}{2} = \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, και αν $n, m \geq n_0$, τότε

$$d(f_n, f_m) \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

δηλαδή, η (f_n) είναι Cauchy.

(2) Ας υποθέσουμε ότι $f_n \to f$ (ως προς την d) για κάποια συνεχή $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$\int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt \to 0$$

καθώς $n \to \infty$. Ειδικότερα,

$$0 \leq \int_0^{1/2} |f(t)| dt = \int_0^{1/2} |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt \to 0,$$

και αφού η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, πρέπει να ισχύει $f(t) = 0$, $t \in [0, 1/2]$.

Έστω τώρα $\delta \in (1/2, 1)$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$f_n(t) = 1, \qquad t \in [\delta, 1].$$

Όμως,

$$0 \leq \int_\delta^1 |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt \to 0,$$

άρα

$$\int_{\delta}^{1} |1 - f(t)|dt = 0$$

(γιατί;). Από τη συνέχεια της f, συμπεραίνουμε ότι $f(t) = 1$ για κάθε $t \in [\delta, 1]$, και αφού το δ ήταν τυχόν στο $(1/2, 1)$, έπεται ότι $f(t) = 1$ για κάθε $t \in (1/2, 1]$. Έπεται ότι η f είναι ασυνεχής στο σημείο $t_0 = 1/2$, το οποίο είναι άτοπο αφού η f υποτέθηκε συνεχής στο $[0, 1]$.

Βρήκαμε ακολουθία Cauchy (f_n) στον X, η οποία δεν συγκλίνει (ως προς την d) σε στοιχείο του X. Άρα, ο (X, d) δεν είναι πλήρης. □

2.3 Πλήρωση μετρικού χώρου*

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών με τη συνήθη μετρική $d(x, y) = |x - y|$ δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος. «Προσθέτοντάς» του όμως κάποια σημεία, παίρνουμε την πλήρη πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$. Το $\mathbb{R}$ είναι η «πλήρωση» του $\mathbb{Q}$. Το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ αποτελείται ακριβώς από τα όρια εκείνων των ακολουθιών Cauchy στο $\mathbb{Q}$ που *δεν* συγκλίνουν στο $\mathbb{R}$ (τα όρια που «λείπουν»).

Θα δούμε (εν συντομία) με ποιόν τρόπο κάθε μετρικός χώρος X μπορεί να «γίνει» πυκνός μέσα σε έναν πλήρη μετρικό χώρο $\hat{X}$ (ο οποίος είναι με μια έννοια μοναδικός και λέγεται *πλήρωση* του X). Η διαδικασία της πλήρωσης βασίζεται ακριβώς στο μοντέλο «$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$».

Ορισμός Έστω (X, d) και (Y, ρ) δύο μετρικοί χώροι. Μια απεικόνιση $T : (X, d) \to (Y, \rho)$ λέγεται *ισομετρία* αν διατηρεί τις αποστάσεις. Δηλαδή, αν για κάθε $x_1, x_2 \in X$ ισχύει

$$\rho(T(x_1), T(x_2)) = d(x_1, x_2).$$

Παρατηρήστε ότι μια ισομετρία είναι πάντα ένα προς ένα: αν $T(x_1) = T(x_2)$, τότε

$$0 = \rho(T(x_1), T(x_2)) = d(x_1, x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Δύο μετρικοί χώροι X και Y λέγονται *ισομετρικοί* αν υπάρχει $T : X \to Y$ ισομετρία επί. Δύο ισομετρικοί χώροι ουσιαστικά ταυτίζονται, αφού τα σημεία τους βρίσκονται σε αντιστοιχία ένα προς ένα και οι αποστάσεις διατηρούνται.

Θεώρημα 2.3.1. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Υπάρχει πλήρης μετρικός χώρος $(\hat{X}, \hat{d})$ ο οποίος έχει πυκνό υπόχωρο W που είναι ισομετρικός με τον (X, d).*

Ιδέα της απόδειξης: Φανταστείτε τον X σαν μη πλήρη χώρο, όπως στο Σχήμα 2.2 (και έχετε στο μυαλό σας το $\mathbb{Q}$). Υπάρχουν ακολουθίες Cauchy στον X που δεν έχουν όριο στον X (π.χ. η (x_n) που καταλήγει στο κενό: δε «βρίσκει» το όριό της μέσα στο χώρο). Άλλες, όπως η (y_n), συγκλίνουν σε κάποιο $y \in X$.

(1) Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο σύνολο των ακολουθιών Cauchy του X:

$$(x_n) \sim (x'_n) \Longleftrightarrow d(x_n, x'_n) \to 0.$$

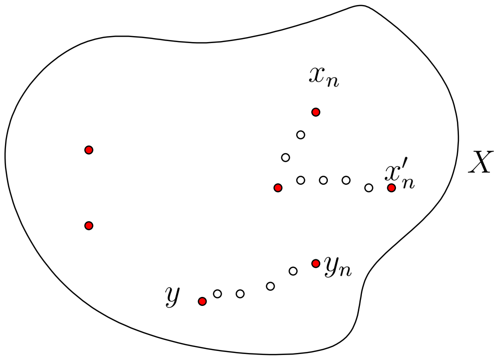
Ακολουθίες, όπως η (y_n), που συγκλίνουν σε $y \in X$ είναι ισοδύναμες με σταθερές ακολουθίες:

$$y_n \to y \in X \Longleftrightarrow (y_n) \sim (y, y, \ldots).$$

Θεωρούμε το σύνολο $\hat{X}$ των κλάσεων ισοδυναμίας της $\sim$ (πρέπει βέβαια πρώτα να δείξετε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας).

(2) Ο X μπορεί να θεωρηθεί σαν υποσύνολο του $\hat{X}$: αν $y \in X$, στο y αντιστοιχεί φυσιολογικά η σταθερή ακολουθία Cauchy $(y, y, \ldots)$, καθώς και η κλάση της, που είναι στοιχείο του $\hat{X}$.

Αν $y \neq y'$ στον X, τότε δεν μπορεί να ισχύει $(y, y, \ldots) \sim (y', y', \ldots)$ (γιατί;) Άρα, διαφορετικά σημεία του X ορίζουν διαφορετικές κλάσεις στον $\hat{X}$.



Σχήμα 2.2: Απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1

(3) Συμβολίζουμε τα στοιχεία του $\hat{X}$ με $\hat{x}, \hat{y}, \ldots$.

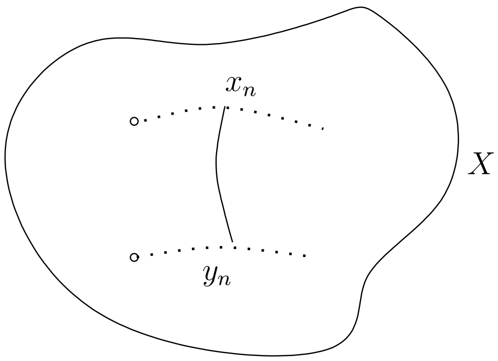
(4) Πως ορίζουμε μετρική $\hat{d}$ στον $\hat{X}$; Έστω $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{X}$. Θεωρούμε τυχόντες αντιπροσώπους $(x_n) \in \hat{X}$, $(y_n) \in \hat{Y}$, και θέτουμε

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

Πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι αυτό το όριο υπάρχει. Θυμηθείτε ότι οι $(x_n), (y_n)$ είναι ακολουθίες Cauchy: από την τριγωνική ανισότητα,

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) \to 0$$

καθώς $n, m \to \infty$. Άρα, η $(d(x_n, y_n))$ είναι Cauchy στο $\mathbb{R}$, και έχει όριο.



Σχήμα 2.3: Χρήση της τριγωνικής ανισότητας στην απόδειξη

Πρέπει ακόμα να δείξουμε ότι η επιλογή των αντιπροσώπων $(x_n) \in \hat{x}$ και $(y_n) \in \hat{y}$ δεν έχει σημασία, και ότι η $\hat{d}$ ικανοποιεί τα αξιώματα της μετρικής (Άσκηση). Έτσι, ορίστηκε ο $(\hat{X}, \hat{d})$.

(5) Ορίζουμε $W = \{\hat{b} : b \in X\}$, όπου $\hat{b}$, $b \in X$, είναι η κλάση της σταθερής ακολουθίας $(b, b, \ldots)$.

Παρατηρήστε ότι $\hat{d}(\hat{b_1}, \hat{b_2}) = \lim_{n\to\infty} d(b_1, b_2) = d(b_1, b_2)$ αν $b_1, b_2 \in X$. Δηλαδή, η $T : (X, d) \to (W, \hat{d})$ με $b \to \hat{b}$ είναι ισομετρία επί.

(6) Τέλος, δείχνουμε ότι ο $(\hat{X}, \hat{d})$ είναι πλήρης, και ότι $\overline{W} = \hat{X}$ (Άσκηση).

(7) Αν $(\tilde{X}, \tilde{d})$ είναι ένας άλλος πλήρης μετρικός χώρος που έχει πυκνό υπόχωρο ισομετρικό με τον (X, d), τότε αποδεικνύεται ότι οι $(\hat{X}, \hat{d})$ και $(\tilde{X}, \tilde{d})$ είναι ισομετρικοί. Δηλαδή, η πλήρωση του (X, d) γίνεται «κατά μοναδικό τρόπο».

Δεν θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα που περιγράψαμε. Για μια λεπτομερή απόδειξη, δείτε π.χ. το βιβλίο του E. Kreyszig.

2.4 Το Θεώρημα του Baire

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε το θεώρημα του Baire στην ακόλουθη μορφή:

Θεώρημα 2.4.1. *Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος. Αν (F_n) είναι μια ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X τέτοια ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, τότε τουλάχιστον ένα από τα F_n έχει μη κενό εσωτερικό.*

Ορισμός. Έστω (X,d) μετρικός χώρος, και έστω $\emptyset \neq A \subseteq X$. Η *διάμετρος* του A ορίζεται από την

$$\mathrm{diam}(A) := \sup\{d(x,y) | x,y \in A\}.$$

Παρατηρησεις.

(i) $0 \leq \mathrm{diam}(A) \leq +\infty$.

(ii) $\mathrm{diam}(A) < +\infty \Leftrightarrow$ το A είναι φραγμένο.

(iii) $\mathrm{diam}(\overline{A}) = \mathrm{diam}(A)$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος του Baire θα χρειαστούμε τον εξής χαρακτηρισμό του πλήρους μετρικού χώρου (Cantor):

Θεώρημα 2.4.2. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Ο X είναι πλήρης αν και μόνο αν για κάθε φθίνουσα ακολουθία $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_n \supseteq \ldots$ κλειστών μη κενών υποσυνόλων του X με $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$, υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$.*

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Αρκεί να δείξουμε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. Γιατί, αν $x,y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ τότε

$$0 \leq d(x,y) \leq \mathrm{diam}(F_n) \to 0,$$

δηλαδή $d(x,y) = 0$, άρα $x = y$. Αν λοιπόν το $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι μη κενό, τότε θα είναι μονοσύνολο.

Για να δείξουμε ότι το $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι μη κενό, δουλεύουμε ως εξής: αφού κάθε $F_n \neq \emptyset$, μπορούμε να επιλέξουμε $x_n \in F_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Ισχυρισμός. Η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy στον X.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: για κάθε $n \geq n_0$, $\mathrm{diam}(F_n) < \varepsilon$. Αν $n > m \geq n_0$, τότε $x_n, x_m \in F_m$ (η (F_n) είναι φθίνουσα), άρα

$$d(x_n, x_m) \leq \mathrm{diam}(F_m) < \varepsilon. \quad \square$$

Ο X είναι πλήρης και η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, άρα υπάρχει $x \in X$ με $x_n \to x$. Θα δείξουμε ότι $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$:

Έστω $m \in \mathbb{N}$. Έχουμε $x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots \in F_m$ και $x_n \to x$, άρα $x \in \overline{F_m} = F_m$. Αφού το m ήταν τυχόν, $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m$.

$(\Leftarrow)$ Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον X. Ορίζουμε:

$$F_n' = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\} = \{x_m : m \geq n\},$$

και $F_n = \overline{F_n'}$. Αφού η (F_n') είναι φθίνουσα ακολουθία μη κενών συνόλων, η (F_n) είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών μη κενών συνόλων.

Ισχυρισμός. $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: για κάθε $n, m \geq n_0$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Αν λοιπόν $n \geq n_0$, τότε για κάθε $x, y \in F_n'$ ισχύει $d(x, y) < \varepsilon$ (γιατί;) επομένως

$$\mathrm{diam}(F_n) = \mathrm{diam}(F_n') \leq \varepsilon. \ \square$$

Από τον ισχυρισμό και την υπόθεσή μας, έπεται ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$ για κάποιο $x \in X$. Τότε,

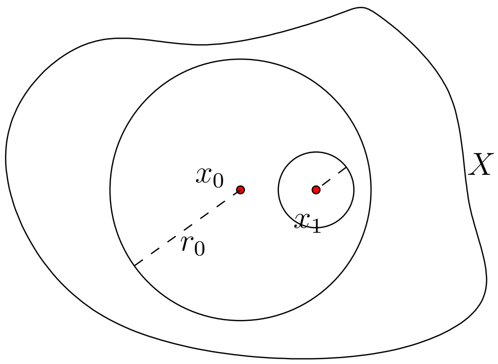
$$0 \leq d(x_n, x) \leq \mathrm{diam}(F_n) \to 0,$$

δηλαδή $x_n \to x$. Άρα, ο X είναι πλήρης. $\square$

Παρατήρηση. Η υπόθεση $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$ δεν είναι περιττή. Πάρτε $F_n = [n, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Κάθε F_n είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, και $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_n \supseteq \ldots$, όμως $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ (γιατί;).

Πριν δώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος του Baire ας δούμε μια κάπως απλούστερη πρόταση:

Πρόταση 2.4.1. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος, και G_1, G_2 ανοιχτά πυκνά υποσύνολα του X. Τότε, το $G_1 \cap G_2$ είναι (ανοιχτό) πυκνό υποσύνολο του X.*



Σχήμα 2.4:

Απόδειξη: Έστω $D(x_0, r_0)$ ανοιχτή μπάλα στον X. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$D(x_0, r_0) \cap G_1 \cap G_2 \neq \emptyset.$$

Το G_1 είναι πυκνό στον X, άρα υπάρχει $x_1 \in D(x_0, r_0) \cap G_1$. Το $D(x_0, r_0) \cap G_1$ είναι ανοιχτό, άρα το x_1 είναι εσωτερικό του σημείο. Επομένως, υπάρχει $r_1 > 0$ τέτοιος ώστε

$$D(x_1, r_1) \subseteq D(x_0, r_0) \cap G_1.$$

Όμως το G_2 είναι πυκνό, άρα υπάρχει

$$x_2 \in D(x_1, r_1) \cap G_2 \subseteq D(x_0, r_0) \cap G_1 \cap G_2.$$

Δηλαδή, $D(x_0, r_0) \cap G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. $\square$

Είναι φανερό ότι, επαγωγικά, μπορούμε να δείξουμε ότι αν $G_1, \ldots, G_m$ είναι ανοιχτά πυκνά υποσύνολα του μετρικού χώρου (X, d), τότε το ίδιο ισχύει και για την τομή τους. Αν ο (X, d) είναι πλήρης, μπορούμε να δείξουμε κάτι παραπάνω (Baire):

Θεώρημα 2.4.3. *Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος. Αν (G_n) είναι μια ακολουθία ανοιχτών πυκνών υποσυνόλων του X, τότε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη: Έστω $D(x_0, r_0)$ ανοιχτή μπάλα στον X. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$D(x_0, r_0) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right) \neq \emptyset.$$

Αφού το G_1 είναι πυκνό, υπάρχει $x_1 \in D(x_0, r_0) \cap G_1$, κι αφού το $D(x_0, r_0) \cap G_1$ είναι ανοιχτό, υπάρχει $r_1 > 0$ (μπορούμε μάλιστα να υποθέσουμε ότι $r_1 \leq 1$, μικραίνοντάς το αν χρειαστεί) ώστε

$$\overline{D(x_1, r_1)} \subseteq D(x_0, r_0) \cap G_1.$$

(Πάρτε πρώτα κατάλληλη ανοιχτή μπάλα με κέντρο το x_1, και μετά, κλειστή με μικρότερη ακτίνα). Το G_2 είναι πυκνό, άρα υπάρχει $x_2 \in D(x_1, r_1) \cap G_2$, και το $D(x_1, r_1) \cap G_2$ είναι ανοιχτό, επομένως μπορούμε να βρούμε $0 < r_2 \leq 1/2$ τέτοιο ώστε

$$\overline{D(x_2, r_2)} \subseteq D(x_1, r_1) \cap G_2.$$

Επαγωγικά, βρίσκουμε $x_n \in X$ και $0 < r_n \leq 1/n$, τέτοια ώστε

$$\overline{D(x_n, r_n)} \subseteq D(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap G_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Από την κατασκευή,

$$\overline{D(x_1, r_1)} \supseteq \overline{D(x_2, r_2)} \supseteq \ldots \supseteq \overline{D(x_n, r_n)} \supseteq \ldots$$

και $\mathrm{diam}(\overline{D(x_n, r_n)}) \leq 2r_n \to 0$. Ο X είναι πλήρης, οπότε το Θεώρημα του Cantor μας εξασφαλίζει ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{D(x_n, r_n)} = \{x\}$$

για κάποιο $x \in X$. Τότε,

(i) $x \in \overline{D(x_n, r_n)} \subseteq D(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap G_n \subseteq G_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$.

(ii) $x \in \overline{D(x_1, r_1)} \subseteq D(x_0, r_0) \cap G_1 \subseteq D(x_0, r_0)$.

Δηλαδή,

$$D(x_0, r_0) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right) \neq \emptyset. \quad \square$$

Το Θεώρημα 2.4.1 είναι συνέπεια του Θεωρήματος 2.4.3:

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.1: Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος, και (F_n) ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X, τέτοια ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Υποθέτουμε ότι $F_n^{\circ} = \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $G_n = X \setminus F_n$. Κάθε G_n είναι ανοιχτό, και

$$\overline{G_n} = \overline{X \setminus F_n} = X \setminus F_n^{\circ} = X \setminus \emptyset = X,$$

δηλαδή κάθε G_n είναι ανοιχτό και πυκνό στον X. Από το Θεώρημα 2.4.3,

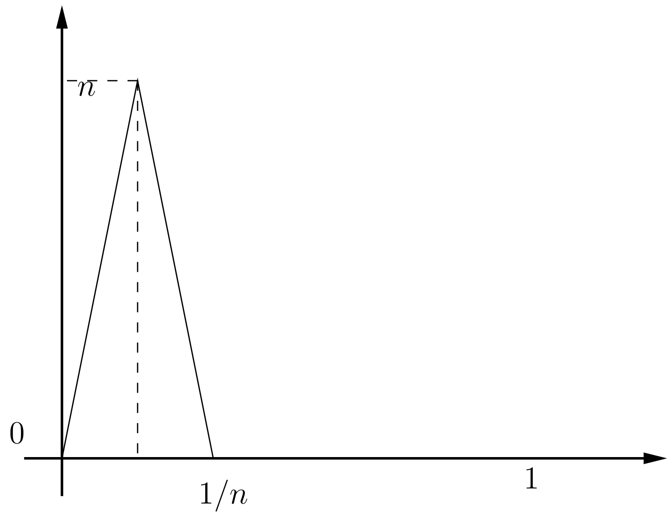
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset \Longrightarrow X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

Αυτό αντιφάσκει προς την υπόθεση. Άρα, τουλάχιστον ένα από τα F_n έχει μη κενό εσωτερικό. $\square$

Το Θεώρημα του Baire θα παίξει πολύ σημαντικό ρόλο στη μελέτη των χώρων Banach. Για την ώρα, δίνουμε τρείς εφαρμογές από τις οποίες γίνεται φανερή η ισχύς του:

(1) **Το θεώρημα του Osgood** (1897) *Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι για κάθε $t \in [0,1]$ η ακολουθία $(f_n(t))$ είναι φραγμένη. Τότε, υπάρχουν $[a,b] \subseteq [0,1]$ και $M > 0$ τέτοια ώστε*

$$\forall t \in [a,b] \; \forall n \in \mathbb{N}, \;\; |f_n(t)| \leq M.$$



Σχήμα 2.5: Το γράφημα της f_n

(Δηλαδή, η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $[a,b]$.)

Ένα παράδειγμα πριν από την απόδειξη: πάρτε σαν f_n την συνάρτηση στο Σχήμα 2.5. Εύκολα ελέγχουμε ότι για κάθε $t \in [0,1]$, $f_n(t) \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Άρα, η $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη για κάθε t.

Η (f_n) δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $[0,1]$, γιατί $\max_{t\in[0,1]} |f_n(t)| = n \to \infty$. Όμως η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη π.χ. στο $[\frac{1}{2},1]$, γιατί $f_n \equiv 0$ στο $[\frac{1}{2},1]$ αν $n \geq 2$, και $|f_1(t)| \leq 1$ στο $[\frac{1}{2},1]$. Δηλαδή,

$$\forall t \in [1/2,1]\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |f_n(t)| \leq 1.$$

Απόδειξη του θεωρήματος: Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_m = \{t \in [0,1] : \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(t)| \leq m\}.$$

(α) Κάθε A_m είναι κλειστό: αν $t_k \in A_m$ και $t_k \to t$, τότε

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(t_k)| \leq m$$

και, από την συνέχεια των f_n έχουμε $f_n(t_k) \to f_n(t)$ καθώς $k \to \infty$, άρα

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(t)| \leq m,$$

δηλαδή $t \in A_m$.

(β) $[0,1] = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$: Έστω $t \in [0,1]$. Από την υπόθεση, η $(f_n(t))$ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M_t > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(t)| \leq M_t$. Υπάρχει $m = m(t) \in \mathbb{N}$ με $m \geq M_t$, και γι' αυτό το m έχουμε $t \in A_m$.

(γ) Ο $[0,1]$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, οπότε το Θεώρημα του Baire μας εξασφαλίζει ότι κάποιο A_{m_0} έχει μη κενό εσωτερικό, δηλαδή υπάρχει διάστημα $[a,b] \subseteq A_{m_0}$. Όμως τότε, η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $[a,b]$:

$$\forall t \in [a,b]\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(t)| \leq m_0. \quad \square$$

(2) **Πρόταση**. *Έστω $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα:*

$$\forall x \geq 1, \quad \lim_{n\to\infty} f(nx) = 0.$$

Τότε, $f(y) \to 0$ καθώς $y \to \infty$.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Ορίζουμε

$$A_m = \{x \geq 1 : \forall n \geq m \; |f(nx)| \leq \varepsilon\}.$$

(α) Κάθε A_m είναι κλειστό: αν $x_k \in A_m$ και $x_k \to x$, τότε για κάθε $n \geq m$, από την συνέχεια της f στο nx,

$$|f(nx)| = \lim_{k\to\infty} |f(nx_k)| \leq \varepsilon.$$

Άρα, $x \in A_m$.

(β) $[1, \infty) = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$: Έστω $x \geq 1$. Από την υπόθεση, $f(nx) \to 0$. Άρα, υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n \geq m_0$, $|f(nx)| \leq \varepsilon$. Δηλαδή, $x \in A_{m_0}$.

(γ) Ο $[1, \infty)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος (κλειστό υποσύνολο της πραγματικής ευθείας). Από το Θεώρημα του Baire, κάποιο A_m έχει μη κενό εσωτερικό. Δηλαδή, υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και $[\gamma, \delta] \subseteq A_m$. Παρατηρούμε τα εξής:

1. Αν $x \in [\gamma, \delta]$, τότε $|f(nx)| \leq \varepsilon$ για κάθε $n \geq m$. Δηλαδή, $|f(y)| \leq \varepsilon$ για κάθε

$$(*) \qquad y \in [m\gamma, m\delta] \cup [(m+1)\gamma, (m+1)\delta] \cup \ldots$$

2. Υπάρχει $k \geq m$ τέτοιος ώστε, για κάθε $s \geq k$, $s\delta > (s+1)\gamma$ (αρκεί να διαλέξουμε $k > \gamma/(\delta - \gamma)$.) Τότε,

$$[k\gamma, k\delta] \cup [(k+1)\gamma, (k+1)\delta] \cup \ldots = [k\gamma, \infty).$$

Από την $(*)$ έπεται ότι, για κάθε $y \geq k\gamma$, $|f(y)| \leq \varepsilon$.

Για τυχόν $\varepsilon > 0$ βρήκαμε $M(= k\gamma) > 0$ τέτοιον ώστε $|f(y)| \leq \varepsilon$ για κάθε $y \geq M$. Άρα, $\lim_{y\to\infty} f(y) = 0$. $\square$

(3) **Πρόταση**. *Θεωρούμε το χώρο $C[0,1]$ των συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$, με μετρική την $d(f,g) = \max_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$. Το σύνολο M των $f \in C[0,1]$ που δεν έχουν παράγωγο σε κανένα σημείο του $[0,1]$ είναι πυκνό στον $C[0,1]$.*

Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα του Baire και το εξής Λήμμα:

Λήμμα 2.4.1. *Για κάθε συνεχή $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και κάθε $\varepsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχή και κατά τμήματα γραμμική, με την ιδιότητα $d(f,g) < \varepsilon$.*

[Η g λέγεται *κατά τμήματα γραμμική* αν υπάρχει διαμέριση $P = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1\}$ τέτοια ώστε η g να είναι γραμμική σε κάθε (t_{i-1}, t_i), $i = 1, \ldots, N$.]

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε την ομοιόμορφη συνέχεια της f: Για το δοσμένο $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε: αν $t, s \in [0,1]$ και $|t - s| < \delta$ τότε $|f(s) - f(t)| < \varepsilon/2$.

Βρίσκουμε φυσικό αριθμό N που ικανοποιεί την $1/N < \delta$, και χωρίζουμε το $[0,1]$ σε N ίσα τμήματα. Παίρνουμε δηλαδή τη διαμέριση $P = \left\{0, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}, 1\right\}$. Ορίζουμε g έτσι ώστε να είναι γραμμική σε κάθε $\left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right]$, $i = 1, \ldots, N$, και στα άκρα κάθε υποδιαστήματος να συμπίπτει με την f:

$$g(i/N) = f(i/N), \qquad i = 0, 1, \ldots, N.$$

Έστω $t \in [0,1]$. Υπάρχει δείκτης $1 \leq i \leq N$ τέτοιος ώστε $\frac{i-1}{N} \leq t \leq \frac{i}{N}$. Τότε,

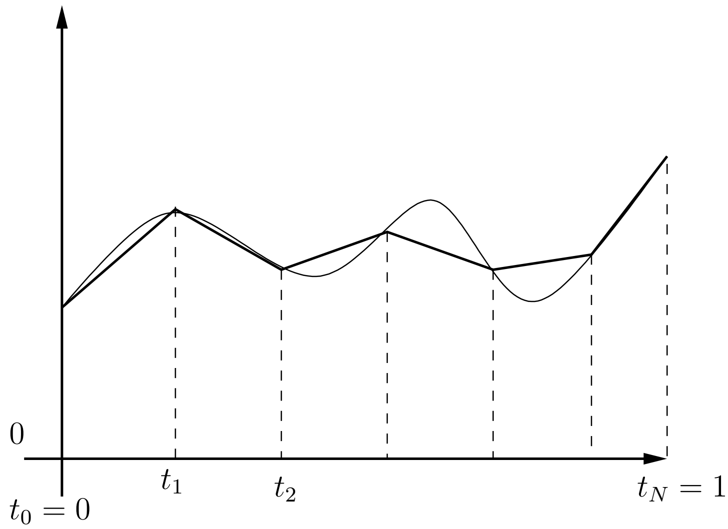
$$(*) \qquad |f(t) - g(t)| \leq |f(t) - f(i/N)| + |f(i/N) - g(t)|.$$

Όμως,

$$\left| t - \frac{i}{N} \right| < \delta \Longrightarrow \bigl|f(t) - f(i/N)\bigr| < \frac{\varepsilon}{2},$$

και, από τη γραμμικότητα της g στο $[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]$ και το γεγονός ότι $|\frac{i}{N} - \frac{i-1}{N}| = \frac{1}{N} < \delta$, βλέπουμε ότι

$$\left| f\left(\frac{i}{N}\right) - g(t) \right| = \left| g\left(\frac{i}{N}\right) - g(t) \right| \leq \left| g\left(\frac{i}{N}\right) - g\left(\frac{i-1}{N}\right) \right| = \left| f\left(\frac{i}{N}\right) - f\left(\frac{i-1}{N}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$



Σχήμα 2.6: Προσέγγιση μιας συνεχούς f από μια κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση g

Επιστρέφοντας στην $(*)$, βλέπουμε ότι $|f(t) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Αφού το t ήταν τυχόν, $d(f, g) < \varepsilon$. □

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο

$$D_n = \Big\{ f \in C[0,1] : \forall t \in [0,1] \; \exists y \in \big(t - \frac{1}{n}, t + \frac{1}{n}\big) \cap (0,1) : |f(y) - f(t)| > n|y - t| \Big\}.$$

Ισχυρισμός. Κάθε $f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ είναι συνεχής, πουθενά παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Απόδειξη: Έστω $f \in \bigcap_n D_n$. Για κάθε $t \in [0,1]$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $y_n = y_n(t) \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $|t - y_n| < \frac{1}{n}$ και $|f(y_n) - f(t)| > n|y_n - t|$. Αφού $y_n \neq t$, $y_n \to t$, και

$$\lim_{n \to \infty} \Big| \frac{f(y_n) - f(t)}{y_n - t} \Big| = \infty,$$

δεν υπάρχει η $f'(t)$.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το $\bigcap_n D_n$ είναι πυκνό στον $C[0,1]$, και, σύμφωνα με το Θεώρημα του Baire, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε D_n είναι ανοιχτό και πυκνό.

Ισχυρισμός. Κάθε D_n είναι ανοιχτό υποσύνολο του $C[0,1]$.

Απόδειξη: Είναι πιο εύκολο να δείξουμε ότι το συμπλήρωμα D_n^c του D_n είναι κλειστό. Έστω $f_k \in D_n^c$ και $f_k \to f$ ως προς την d (αυτό σημαίνει ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη - γιατί;)

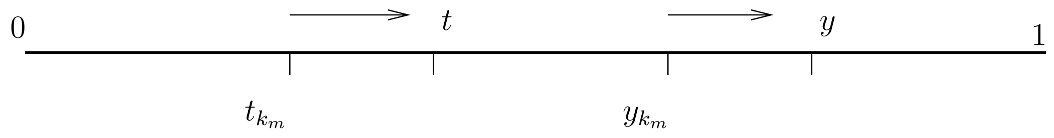
Αφού $f_k \in D_n^c$, υπάρχει $t_k \in [0,1]$ τέτοιο ώστε, για κάθε $y \in (0,1)$ με $|y - t_k| < 1/n$ να ισχύει $|f(y) - f(t_k)| \leq n|y - t_k|$.

Αφού $t_k \in [0,1]$, υπάρχουν $t \in [0,1]$ και υπακολουθία (t_{k_m}) της (t_k) με $t_{k_m} \to t$. Θα δείξουμε ότι αν $y \in (0,1)$ και $|y - t| < 1/n$, τότε $|f(y) - f(t)| \leq n|y - t|$ (οπότε, $f \in D_n^c$.)

Έστω $\varepsilon > 0$ και $y \in (0,1)$ με $|y - t| < 1/n$. Παρατηρούμε τα εξής:

(i) Αν $y_{k_m} = y + (t_{k_m} - t)$, τότε $y_{k_m} \to y$. Άρα, για μεγάλα m έχουμε $y_{k_m} \in (0,1)$ και $|y_{k_m} - t_{k_m}| = |y - t| < 1/n$. Οπότε,

$$\big| f_{k_m}(y_{k_m}) - f_{k_m}(t_{k_m}) \big| \leq n|y - t|.$$



Σχήμα 2.7:

(ii) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής και $t_{k_m} \to t$. Επίσης, $y_{k_m} - y = t_{k_m} - t \to 0$. Άρα, για μεγάλα m ισχύουν οι

$$|f(t) - f(t_{k_m})| < \varepsilon \quad , \quad |f(y) - f(y_{k_m})| < \varepsilon.$$

(iii) Πάλι για μεγάλα m, $d(f_{k_m}, f) < \varepsilon$ (αφού $f_{k_m} \to f$.)

Παίρνουμε m τόσο μεγάλο που να ικανοποιούνται τα (i), (ii) και (iii), και γράφουμε

$$\begin{aligned} |f(y) - f(t)| &\leq |f(y) - f(y_{k_m})| + |f(y_{k_m}) - f_{k_m}(y_{k_m})| + |f_{k_m}(y_{k_m}) - f_{k_m}(t_{k_m})| \\ &+ |f_{k_m}(t_{k_m}) - f(t_{k_m})| + |f(t_{k_m}) - f(t)| \\ &< \varepsilon + d(f, f_{k_m}) + n|y - t| + d(f_{k_m}, f) + \varepsilon \\ &< n|y - t| + 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $|f(y) - f(t)| \leq n|y - t|$. Αυτό ισχύει για το τυχόν $y \in (0, 1)$ με $|y - t| < 1/n$, άρα $f \in D_n^c$. □

Ισχυρισμός. Κάθε D_n είναι πυκνό υποσύνολο του $C[0, 1]$.

Απόδειξη: Έστω $f \in C[0, 1]$ και έστω $\varepsilon > 0$. Από το Λήμμα, υπάρχει $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής, κατά τμήματα γραμμική, τέτοια ώστε $d(f, g) < \varepsilon/2$. Επομένως, αρκεί να βρούμε $h \in D_n$ τέτοια ώστε $d(g, h) < \varepsilon/2$.

Η g είναι κατά τμήματα γραμμική, δηλαδή υπάρχουν $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ τέτοια ώστε η g να είναι γραμμική σε κάθε (t_{i-1}, t_i). Έστω l_i η κλίση της g στο (t_{i-1}, t_i).

Ορίζουμε μια μικρή «οδοντωτή» συνάρτηση $w : [0, 1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $0 \leq w(t) < \varepsilon/2$ στο $[0, 1]$, και οι κλίσεις της w είναι (κατ' απόλυτη τιμή ίσες και) μεγαλύτερες από $n + \max\{|l_j| : j = 1, \ldots, N\}$. Θέτουμε $h = g + w$, οπότε

$$d(g, h) = \max_{t \in [0,1]} |w(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θα δείξουμε ότι $h \in D_n$: Έστω $t \in [0, 1]$. Υπάρχει δείκτης $i \leq N$ για τον οποίο $t \in [t_{i-1}, t_i]$. Επιλέγουμε $|s| < 1/n$ τόσο μικρό ώστε στο διάστημα με άκρα τα $t, t + s$ οι g και w να είναι και οι δύο γραμμικές (το s μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό). Αν y είναι ένα σημείο του ανοιχτού διαστήματος με άκρα $t, t + s$, έχουμε $y \in (0, 1)$, $|y - t| < 1/n$, και

$$\begin{aligned} |h(y) - h(t)| &\geq |w(y) - w(t)| - |g(y) - g(t)| \\ &> \left(n + \max_j |l_j|\right) |y - t| - |l_i||y - t| \\ &= n|y - t|. \end{aligned}$$

Άρα, $h \in D_n$. □

2.5 Ασκήσεις

1. Έστω (x_n) φραγμένη ακολουθία στον (X, d). Είναι η (x_n) Cauchy; Συγκλίνει;

2. Έστω (x_n) και (y_n) δύο ακολουθίες Cauchy στο μετρικό χώρο (X, d). Δείξτε ότι η ακολουθία πραγματικών αριθμών $a_n = d(x_n, y_n)$ συγκλίνει.

3. Θεωρούμε δύο μετρικές d_1 και d_2 στο ίδιο σύνολο X. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε: για κάθε $x, y \in X$,

$$ad_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq bd_1(x, y).$$

Δείξτε ότι μια ακολουθία (x_n) στον X είναι Cauchy στον (X, d_1) αν και μόνο αν είναι Cauchy στον (X, d_2).

4. Έστω (x_n) ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο (X, d), τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < +\infty.$$

Δείξτε ότι η (x_n) είναι Cauchy.

5. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Αν κάθε κλειστή μπάλα $B(x, r)$ του X είναι πλήρης μετρικός χώρος ως προς την επαγόμενη μετρική, τότε ο X είναι πλήρης.

6. Έστω (X, d) μετρικός χώρος, και M πυκνό υποσύνολο του X. Αν κάθε ακολουθία Cauchy στοιχείων του M συγκλίνει στον X, τότε ο X είναι πλήρης.

7. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων με μετρική την $d(m, n) = |m - n|$. Δείξτε ότι ο $(\mathbb{Z}, d)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

8. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών με μετρική την $d(m, n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$. Δείξτε ότι ο (X, d) δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος.

9. Έστω U μη κενό, ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\rho(x, y) = |x - y| + \left| \frac{1}{d(x, U^c)} - \frac{1}{d(y, U^c)} \right|$$

στο $U \times U$. Δείξτε ότι ο (U, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος.

10. (α) Δείξτε ότι ο χώρος $C[a, b]$ των συνεχών συναρτήσεων $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με μετρική την $d(f, g) = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$ είναι πλήρης.

[Δείξτε πρώτα ότι $d(f_n, f) \to 0$ αν και μόνο αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα.]

11. Έστω $c_{00} \subseteq \ell_\infty$ ο υπόχωρος που αποτελείται από όλες τις ακολουθίες $x = (\xi_k)$ των οποίων οι όροι είναι τελικά μηδέν. Δηλαδή, $x \in c_{00}$ αν και μόνο αν υπάρχει $n_x \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\xi_k = 0$ για κάθε $k \geq n_x$.

Δείξτε ότι ο c_{00} δεν είναι πλήρης.

12. Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με μετρική την $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$. Δείξτε ότι η d είναι μετρική, αλλά ο $(\mathbb{R}, d)$ δεν είναι πλήρης.

13. Θεωρούμε τον υπόχωρο Y του $C[a, b]$ που αποτελείται από όλες τις συνεχείς $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $f(a) = f(b)$. Δείξτε ότι ο Y είναι πλήρης.

14. Δείξτε ότι κάθε μη κενό σύνολο X με τη διακριτή μετρική γίνεται πλήρης μετρικός χώρος.

15. Θεωρούμε τον $C[a, b]$ με μετρική την $d(f, g) = \int_0^1 |f - g|$. Δείξτε ότι η (f_n) με

$$f_n(t) = \begin{cases} n & , 0 \leq t \leq \frac{1}{n^2}, \\ \\ \frac{1}{\sqrt{t}} & , \frac{1}{n^2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

είναι ακολουθία Cauchy, αλλά δεν συγκλίνει.

16. Θεωρούμε τον c_{00} με μετρική την $d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k-\eta_k|$. (Παρατηρήστε ότι αυτό είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα: υπάρχει $n(x,y)\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\xi_k=\eta_k=0$ για κάθε $k\geq n(x,y)$.) Δείξτε ότι η ακολουθία $x_n=(1,\frac{1}{2^2},\ldots,\frac{1}{n^2},0,0,\ldots)$ είναι ακολουθία Cauchy ως προς την d, αλλά δεν συγκλίνει στον (c_{00},d).

17. Έστω X πλήρης μετρικός χώρος, Y μετρικός χώρος, και $f:X\to Y$ συνεχής. Δείξτε ότι αν (A_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών υποσυνόλων του X με $\mathrm{diam}(A_n)\to 0$, τότε $f(\bigcap_n A_n)=\bigcap_n f(A_n)$.

Υποδείξεις - απαντήσεις

1. Όχι. Πάρτε ας πούμε την ακολουθία $a_k = (-1)^k$ στο $\mathbb{R}$. Είναι φραγμένη, αλλά $|a_k - a_{k+1}| = 2$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, οπότε η (a_k) δεν είναι ακολουθία Cauchy. Αφού δεν είναι Cauchy, δεν συγκλίνει.

2. Για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n),$$

δηλαδή,

$$a_n \leq d(x_n, x_m) + a_m + d(y_n, y_m) \Longrightarrow a_n - a_m \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m).$$

Λόγω συμμετρίας,

$$|a_n - a_m| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m).$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού οι $(x_n), (y_n)$ είναι Cauchy, μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε αν $n, m \geq n_0$, τότε

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad d(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Τότε, για κάθε $n, m \geq n_0$,

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Άρα, η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$, οπότε συγκλίνει.

3. Υποθέτουμε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy στον (X, d_1). Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, αν $m, n \geq n_0$ τότε $d_1(x_n, x_m) < \varepsilon/b$. Τότε, αν $m, n \geq n_0$,

$$d_2(x_n, x_m) \leq b \cdot d(x_n, x_m) < b\frac{\varepsilon}{b} = \varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy στον (X, d_2). Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι εντελώς ανάλογη.

4. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < +\infty$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\sum_{n=N}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon.$$

Αν $k > l \geq N$, τότε

$$\begin{aligned} d(x_l, x_k) &\leq d(x_l, x_{l+1}) + d(x_{l+1}, x_{l+2}) + \cdots + d(x_{k-1}, x_k) \\ &\leq \sum_{n=l}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq \sum_{n=N}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα, η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy.

5. Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον X. Έχουμε δεί ότι κάθε ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη. Υπάρχουν λοιπόν $x \in X$ και $r > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n \in B(x, r).$$

Η $B(x, r)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος με την επαγόμενη μετρική (από την υπόθεση), και η (x_n) είναι Cauchy στον X, άρα Cauchy και στον $(B(x, r), d)$. Επομένως, υπάρχει $x_0 \in B(x, r)$ τέτοιο ώστε $d(x_n, x_0) \to 0$. Δηλαδή, $x_n \to x_0$ στον X.

Η (x_n) ήταν τυχούσα ακολουθία Cauchy στον X, άρα ο (X, d) είναι πλήρης.

6. Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον X. Το M είναι πυκνό υποσύνολο του X, άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $w_n \in M$ με την ιδιότητα $d(x_n, w_n) < 1/n$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) είναι Cauchy, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: για κάθε $n, m \geq n_0$,

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Επίσης, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $1/n_1 < \varepsilon/3$. Αν θέσουμε $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, τότε για κάθε $n, m \geq n_2$ έχουμε

$$\begin{aligned} d(w_n, w_m) &\leq d(w_n, x_n) + d(x_n, x_m) + d(x_m, w_m) \\ &< \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{m} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Επομένως, η (w_n) είναι Cauchy στο M. Από την υπόθεσή μας, υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $d(w_n, x) \to 0$. Όμως, $d(w_n, x_n) \leq 1/n$, δηλαδή $d(w_n, x_n) \to 0$. Άρα,

$$0 \leq d(x_n, x) \leq d(x_n, w_n) + d(w_n, x) \to 0 + 0 = 0.$$

Δηλαδή, $x_n \to x$. Αφού η (x_n) ήταν τυχούσα ακολουθία Cauchy στον X, ο (X, d) είναι πλήρης.

7. Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{Z}$. Για $\varepsilon = 1/2 > 0$, βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε, αν $n, m \geq n_0$ τότε $d(x_n, x_m) < 1/2$. Ειδικότερα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$d(x_n, x_{n_0}) < \frac{1}{2}.$$

Όμως, από τον ορισμό της μετρικής, έχουμε $d(y, x_{n_0}) \geq 1$ αν $y \neq x_{n_0}$. Αυτό σημαίνει ότι $x_n = x_{n_0}$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή, η (x_n) είναι τελικά σταθερή, οπότε συγκλίνει (γιατί;).

8. Ορίζουμε $x_n = n$. Η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy στον $(\mathbb{N}, d)$: έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $1/n_0 < \varepsilon/2$. Τότε, αν $m, n \geq n_0$ έχουμε

$$d(x_n, x_m) = d(n, m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon.$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $x_n \to k$ ως προς την d. Τότε,

$$d(x_n, k) \to 0 \Longleftrightarrow \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{k}\right| \to 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{n} \to \frac{1}{k}$$

καθώς $n \to \infty$. Όμως, $1/n \to 0$, άρα $1/k = 0$ το οποίο είναι άτοπο.

Βρήκαμε ακολουθία Cauchy στον $(\mathbb{N}, d)$, η οποία δεν συγκλίνει ως προς την d. Άρα, ο $(\mathbb{N}, d)$ δεν είναι πλήρης.

9. Παρατηρούμε ότι αν $x, y \in U$, τότε $d(x, U^c) > 0$ και $d(y, U^c) > 0$ (γιατί το U^c είναι κλειστό και $x, y \notin U^c$). Άρα, η ρ ορίζεται καλά.

Δεν είναι δύσκολο να ελέγξετε ότι η ρ είναι μετρική. Το πιο ενδιαφέρον σημείο είναι ότι

$$\rho(x, y) = 0 \Longrightarrow |x - y| + \left|\frac{1}{d(x, U^c)} - \frac{1}{d(y, U^c)}\right| = 0 \Longrightarrow |x - y| = 0 \Longrightarrow x = y.$$

Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον (U, ρ). Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, αν $m, n \geq n_0$ τότε

$$0 \leq |x_n - x_m| \leq \rho(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

άρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Υπάρχει λοιπόν $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|x_n - x| \to 0$. Επίσης,

$$0 \leq \left|\frac{1}{d(x_n, U^c)} - \frac{1}{d(x_m, U^c)}\right| \leq \rho(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

δηλαδή, η $(1/d(x_n, U^c))$ είναι Cauchy στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, άρα είναι φραγμένη. Υπάρχει λοιπόν $M > 0$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{d(x_n, U^c)} \leq M \Longrightarrow d(x_n, U^c) \geq \frac{1}{M}.$$

Αφού $x_n \to x$ ως προς την $|\cdot|$, έχουμε $d(x_n, U^c) \to d(x, U^c)$, και

$$d(x, U^c) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, U^c) \geq \frac{1}{M} > 0,$$

δηλαδή $x \in U$. Τέλος,

$$\rho(x, x_n) = |x - x_n| + \left|\frac{1}{d(x, U^c)} - \frac{1}{d(x_n, U^c)}\right| \to 0.$$

10. Από τον ορισμό της μετρικής του $C[a,b]$,

$$\begin{aligned} d(f_n,f)\to 0 &\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\ \forall n\geq n_0\ \ d(f_n,f)<\varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\ \forall n\geq n_0\ \ \max_{t\in[a,b]}|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\ \forall n\geq n_0\ \forall t\in[a,b]\ \ |f_n(t)-f(t)|<\varepsilon, \end{aligned}$$

το οποίο είναι ακριβώς ο ορισμός της ομοιόμορφης σύγκλισης της (f_n) στην f.

Έστω τώρα (f_n) ακολουθία Cauchy στον $C[a,b]$. Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\forall n,m\geq n_0\ \ d(f_n,f_m)<\varepsilon,$$

δηλαδή,

$$\forall n,m\geq n_0\ \forall t\in[a,b]\ \ |f_n(t)-f_m(t)|<\varepsilon.$$

Αυτό σημαίνει ότι η (f_n) είναι ομοιόμορφα Cauchy. Από γνωστό θεώρημα (Ανάλυση ΙΙ), υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f_n\to f$ ομοιόμορφα. Όπως είδαμε παραπάνω, αυτό γράφεται ισοδύναμα στη μορφή $d(f_n,f)\to 0$.

Αφού η (f_n) ήταν τυχούσα ακολουθία Cauchy στον $C[a,b]$, ο $C[a,b]$ είναι πλήρης.

11. Αρκεί να δείξουμε ότι ο c_{00} δεν είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞ (γιατί ο ℓ_∞ είναι πλήρης).

Ορίζουμε

$$x_n=\big(1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},0,\ldots\big),\qquad x=\big(1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\ldots\big)\in\ell_\infty\backslash c_{00}.$$

Τότε,

$$d(x_n,x)=\sup\left\{|1-1|,\ldots,|\frac{1}{n}-\frac{1}{n}|,|0-\frac{1}{n+1}|,\ldots\right\}=\frac{1}{n+1}\to 0.$$

Βρήκαμε (x_n) στον c_{00} με $x_n\to x\in\ell_\infty\backslash c_{00}$. Άρα, ο c_{00} δεν είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞.

12. Δεν είναι δύσκολο να ελέγξετε τα αξιώματα της μετρικής. Το μόνο σημείο που χρειάζεται προσοχή είναι η αιτιολόγηση της συνεπαγωγής

$$d(x,y)=|\arctan x-\arctan y|=0\Longrightarrow x=y,$$

η οποία όμως προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι η $f(x)=\arctan x$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα ένα προς ένα, στο $\mathbb{R}$.

Για να δείξουμε ότι ο $(\mathbb{R},d)$ δεν είναι πλήρης, ορίζουμε $x_n=n$. Η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy στον $(\mathbb{R},d)$: έστω $\varepsilon>0$. Αφού $\lim_{x\to\infty}\arctan x=\pi/2$, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|\pi/2-\arctan n|<\varepsilon/2$ για κάθε $n\geq n_0$. Τότε, αν $m,n\geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &= d(n,m)=|\arctan n-\arctan m| \\ &\leq |\pi/2-\arctan n|+|\pi/2-\arctan m| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $w\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $x_n\to w$ ως προς την d. Τότε,

$$d(x_n,w)\to 0\Longleftrightarrow|\arctan n-\arctan w|\to 0\Longleftrightarrow\arctan n\to\arctan w$$

καθώς $n\to\infty$. Όμως τότε $\arctan w=\pi/2$, το οποίο είναι άτοπο.

Βρήκαμε ακολουθία Cauchy στον $(\mathbb{R},d)$, η οποία δεν συγκλίνει ως προς την d. Άρα, ο $(\mathbb{R},d)$ δεν είναι πλήρης.

13. Ο $C[a,b]$ είναι πλήρης, επομένως αρκεί να δείξουμε ότι ο Y είναι κλειστό υποσύνολο του $C[a,b]$. Έστω $f,f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $f_n\in Y$ και $d(f_n,f)\to 0$.

Από την υπόθεση που κάνουμε, $f_n(x)\to f(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$, άρα

$$f_n(a)\to f(a),\quad f_n(b)\to f(b).$$

Όμως $f_n\in Y$, άρα $f_n(a)=f_n(b)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$f(a)=\lim_{n\to\infty}f_n(a)=\lim_{n\to\infty}f_n(b)=f(b),$$

δηλαδή $f\in Y$. Αυτό αποδεικνύει ότι το Y είναι κλειστό υποσύνολο του $C[a,b]$.

14. Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον X. Για $\varepsilon = 1/2 > 0$, βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε, αν $n, m \geq n_0$ τότε $d(x_n, x_m) < 1/2$. Ειδικότερα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$d(x_n, x_{n_0}) < \frac{1}{2}.$$

Όμως, η d είναι η διακριτή μετρική, δηλαδή $d(y, x_{n_0}) = 1$ αν $y \neq x_{n_0}$. Αυτό σημαίνει ότι $x_n = x_{n_0}$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή, η (x_n) είναι τελικά σταθερή, οπότε συγκλίνει (γιατί;).

15. Κάντε ένα σχήμα. Έστω $m < n$. Οι f_n, f_m συμπίπτουν στο $[\frac{1}{m^2}, 1]$ (ίσες με $1/\sqrt{t}$). Άρα,

$$\begin{aligned} d(f_n, f_m) &= \int_0^{1/n^2} |n-m|dt + \int_{1/n^2}^{1/m^2} \big|\frac{1}{\sqrt{t}} - m\big|dt \\ &= \frac{n-m}{n^2} + 2\sqrt{t}\Big|_{1/n^2}^{1/m^2} - m\big(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\big) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{m}{n^2} + \frac{2}{m} - \frac{2}{n} - \frac{1}{m} + \frac{m}{n^2} \\ &= \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Αν $n > m \geq n_0$, τότε

$$d(f_n, f_m) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Άρα, η (f_n) είναι ακολουθία Cauchy.

Έστω ότι υπάρχει $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τέτοια ώστε $d(f_n, f) \to 0$. Για κάθε $\delta > 0$ βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $1/n_0^2 < \delta$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\delta^1 \big|\frac{1}{\sqrt{t}} - f(t)\big|dt \leq \int_{1/n^2}^1 \big|\frac{1}{\sqrt{t}} - f(t)\big|dt \\ &= \int_{1/n^2}^1 |f_n(t) - f(t)|dt \leq \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|dt \\ &= d(f_n, f) \to 0. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_\delta^1 \big|\frac{1}{\sqrt{t}} - f(t)\big|dt = 0 \Longrightarrow f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad t \in [\delta, 1].$$

Το $\delta \in (0,1)$ ήταν τυχόν, άρα $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ στο $(0,1]$. Όμως τότε, $\lim_{t\to 0^+} f(t) = +\infty$, το οποίο είναι άτοπο αφού $f \in C[0,1]$.

16. Αν $n > m$, τότε

$$d(x_n, x_m) = \sum_{k=1}^m \big|\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2}\big| + \sum_{k=m+1}^n \big|\frac{1}{k^2} - 0\big| + \sum_{k=n+1}^\infty |0-0| = \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=m+1}^\infty \frac{1}{k^2}.$$

Όμως η σειρά $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, άρα αν μάς δώσουν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $m \geq n_0$

$$\sum_{k=m+1}^\infty \frac{1}{k^2} < \varepsilon.$$

Έπεται ότι: αν $n > m \geq n_0$, τότε $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Δηλαδή, η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy στον c_{00}.

Ας υποθέσουμε ότι $x_n \to x = (\xi_k)_k \in c_{00}$. Θα δείξουμε ότι $\xi_k = \frac{1}{k^2}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, το οποίο είναι άτοπο (γιατί τότε, $x \notin c_{00}$). Έστω ότι υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\xi_{k_0} \neq 1/k_0^2$. Δηλαδή, $\big|\xi_{k_0} - \frac{1}{k_0^2}\big| = \alpha > 0$. Τότε, για κάθε $n > k_0$ ισχύει

$$d(x_n, x) = \sum_{k=1}^n \big|\frac{1}{k^2} - \xi_k\big| + \sum_{k=n+1}^\infty |\xi_k| \geq \big|\frac{1}{k_0^2} - \xi_{k_0}\big| = \alpha,$$

το οποίο είναι άτοπο αφού $d(x_n, x) \to 0$.

Άλλος τρόπος: δείξτε ότι ο c_{00} με αυτή τη μετρική δεν είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_1 (γιατί αυτό είναι αρκετό;).

17. Έχουμε $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq A_m$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, άρα

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \subseteq f(A_m) \text{ για κάθε } m \in \mathbb{N}.$$

Έπεται ότι

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} f(A_m) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(A_n).$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό: έστω $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f(A_n)$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $x_n \in A_n$ τέτοιο ώστε $f(x_n) = y$.

Αφού $\mathrm{diam}(A_n) \to 0$, η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy (θυμηθείτε την απόδειξη του θεωρήματος του Cantor). Ο X είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in X$ για το οποίο $x_n \to x$. Αυτό το σημείο x ανήκει στο $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ (για την ακρίβεια, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$ - θυμηθείτε πάλι την απόδειξη του θεωρήματος του Cantor). Τέλος, αφού η f είναι συνεχής, έχουμε

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} y = y.$$

Δηλαδή, $y = f(x) \in f\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\big)$.

Κεφάλαιο 3

Χώροι με νόρμα

3.1 Γραμμικοί χώροι

3.1.1 Ένα μη κενό σύνολο X λέγεται *γραμμικός χώρος* (ή *διανυσματικός χώρος*) πάνω από το $\mathbb{R}$ αν είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις

$+ : X \times X \to X$ (την πρόσθεση)

και

$\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$ (τον πολλαπλασιασμό)

που ικανοποιούν τα εξής:

(I) *Αξιώματα της πρόσθεσης:* για κάθε $x, y, z \in X$,

1. $x + y = y + x$.
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$.
3. Υπάρχει ένα στοιχείο $\vec{0} \in X$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in X$, $\vec{0} + x = x$.
4. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει (μοναδικό) $-x \in X$ τέτοιο ώστε $x + (-x) = \vec{0}$.

Δηλαδή, το X είναι αντιμεταθετική ομάδα με την πράξη της πρόσθεσης.

(II) *Αξιώματα του πολλαπλασιασμού:* για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

1. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.
2. $1x = x$.
3. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.
4. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Άμεσες συνέπειες των αξιωμάτων του γραμμικού χώρου είναι, για παράδειγμα, οι

$$0x = \vec{0}, \quad \lambda\vec{0} = \vec{0}, \quad -x = (-1)x.$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα τέτοιου είδους ιδιότητες (η δομή του γραμμικού χώρου θα θεωρηθεί, σε γενικές γραμμές, γνωστή). Τα στοιχεία του X θα λέγονται σημεία (ή και διανύσματα).

3.1.2. Παραδείγματα (α) Ο $\mathbb{R}^m$ γίνεται γραμμικός χώρος με πράξεις τις

$$(\xi_1, \ldots, \xi_m) + (\eta_1, \ldots, \eta_m) = (\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_m + \eta_m),$$

$$\lambda(\xi_1, \dots, \xi_m) = (\lambda\xi_1, \dots, \lambda\xi_m).$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι $\vec{0} = (0, \dots, 0)$ και $-(\xi_1, \dots, \xi_m) = (-\xi_1, \dots, -\xi_m)$.

(β) Το σύνολο s των ακολουθιών πραγματικών αριθμών γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά συντεταγμένη: αν $x = (\xi_k)$, $y = (\eta_k)$, και $\lambda \in \mathbb{R}$, θέτουμε

$$x + y = (\xi_k + \eta_k) \quad , \quad \lambda x = (\lambda\xi_k).$$

(γ) Αν $A \neq \emptyset$ και $F(A)$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{R}$, τότε το $F(A)$ γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά σημείο: αν $f, g \in F(A)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $f+g, \lambda f \in F(A)$ θέτοντας

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) \quad , \quad (\lambda f)(t) = \lambda f(t) \quad , \quad t \in A.$$

3.1.3 Αν X είναι ένας γραμμικός χώρος και Y ένα μη κενό υποσύνολο του X, το Y λέγεται (γραμμικός) *υπόχωρος* του X αν για κάθε $x, y \in Y$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έχουμε $\lambda x + \mu y \in Y$.

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο Y είναι υπόχωρος του X αν και μόνο αν ο Y είναι γραμμικός χώρος με πράξεις τους περιορισμούς των $+, \cdot$ στα $Y \times Y$ και $\mathbb{R} \times Y$ αντίστοιχα. Ο Y λέγεται *γνήσιος υπόχωρος* του X αν είναι υπόχωρος του X και $Y \neq \{0\}, X$.

Πολλά από τα κλασικά παραδείγματα χώρων που παρουσιάζουν ενδιαφέρον για τη Συναρτησιακή Ανάλυση είναι υπόχωροι του s ή κάποιου $F(A)$:

(1) Ο ℓ_∞ είναι γραμμικός χώρος: αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $x = (\xi_k), y = (\eta_k)$ είναι φραγμένες ακολουθίες, τότε η $\lambda x + \mu y = (\lambda\xi_k + \mu y_k)$ είναι φραγμένη.

(2) Ο c είναι γραμμικός χώρος: αν $x = (\xi_k), y = (\eta_k) \in c$, τότε υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\xi_k \to a$, $\eta_k \to b$. Τότε, για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έχουμε $\lambda\xi_k + \mu\eta_k \to \lambda a + \mu b$. Δηλαδή, $\lambda x + \mu y \in c$.

(3) Ο c_0 είναι γραμμικός χώρος: αν $x = (\xi_k), y = (\eta_k) \in c_0$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε

$$\xi_k \to 0,\ \eta_k \to 0 \Longrightarrow \lambda\xi_k + \mu\eta_k \to 0 \Longrightarrow \lambda x + \mu y \in c_0.$$

(4) Ο ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$ είναι γραμμικός χώρος: αν

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < +\infty \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p < +\infty,$$

τότε, για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, από την ανισότητα του Minkowski,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda\xi_k + \mu\eta_k|^p\right)^{1/p} \leq |\lambda| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + |\mu| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right)^{1/p} < +\infty,$$

δηλαδή $(\lambda\xi_k + \mu\eta_k) \in \ell_p$.

(5) Ο $B(A)$ είναι γραμμικός χώρος: αν οι $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένες συναρτήσεις και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε η $\lambda f + \mu g$ είναι φραγμένη συνάρτηση.

(6) Ο $C[a, b]$ είναι γραμμικός χώρος: αν οι $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, τότε η $\lambda f + \mu g$ είναι συνεχής για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τελείως ανάλογα, οι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις $C^1[a, b]$, οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $D[a, b]$, οι Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $I[a, b]$ είναι γραμμικοί υπόχωροι του $F[a, b]$.

3.1.4 Αν $x_1, \dots, x_m$ είναι διανύσματα του γραμμικού χώρου X, τότε *γραμμικός συνδυασμός* των x_i είναι κάθε διάνυσμα της μορφής

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Αν $M \subseteq X$, $M \neq \emptyset$, τότε ο *υπόχωρος που παράγεται από το* M (γράφουμε $\text{span}(M)$ ή $\langle M \rangle$) είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του M:

$$\text{span}(M) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m : \lambda_i \in \mathbb{R}, x_i \in M, m \in \mathbb{N}\}.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι ο $\text{span}(M)$ είναι όντως υπόχωρος του X.

3.1.5 Αν $x_1, \ldots, x_m \in X$, λέμε ότι τα x_i είναι *γραμμικά ανεξάρτητα* αν

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

Ισοδύναμα, αν κανένα x_i δεν γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των x_j, $j \neq i$. Λέμε ότι το πεπερασμένο σύνολο $\{x_1, \ldots, x_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν τα $x_1, \ldots, x_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πιό γενικά, ένα μη κενό $M \subseteq X$ λέγεται *γραμμικά ανεξάρτητο* αν κάθε *πεπερασμένο* υποσύνολό του είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Τα $x_1, \ldots, x_m$ λέγονται *εξαρτημένα* αν υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{R}$ όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = \vec{0}$. Ένα $M \neq \emptyset$ λέγεται εξαρτημένο αν έχει πεπερασμένο εξαρτημένο υποσύνολο, αν δηλαδή υπάρχουν εξαρτημένα $x_1, \ldots, x_m \in M$.

Παραδείγματα. (α) Στον $C[a,b]$, το σύνολο $M = \{1, t, \ldots, t^N, \ldots\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο: Ας υποθέσουμε ότι $\lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_N t^N = \vec{0}$ για κάποιο $N \in \mathbb{N}$, και $\lambda_N \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $P(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_N t^N$ μηδενίζεται ταυτοτικά στο $[a,b]$. Άρα και η N-στή του παράγωγος είναι ταυτοτικά 0 στο $[a,b]$. Όμως,

$$P^{(N)}(t) \equiv N! \lambda_N \neq 0,$$

άτοπο. Άρα, το M είναι γραμμικά ανεξάρτητο (γιατί;).

(β) Ορίζουμε $\delta_{nk} = 0$ αν $n \neq k$ και $\delta_{nk} = 1$ αν $n = k$. Το σύνολο $M = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ (όπου $e_n = (\delta_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$) είναι γραμμικά ανεξάρτητο στον s (εξηγήστε), άρα και στους $\ell_p, 1 \leq p \leq \infty$, c, και c_0.

3.1.6 Λέμε ότι ο χώρος X έχει *πεπερασμένη διάσταση* αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

1. Στον X υπάρχουν n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $x_1, \ldots, x_n$.
2. Αν $k \geq n+1$, οποιαδήποτε k διανύσματα του X είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Έπεται ότι τα $x_1, \ldots, x_n$ παράγουν το χώρο: $X = \text{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ (άσκηση).

Ο X έχει άπειρη διάσταση αν $X \neq \{0\}$ και ο X δεν έχει πεπερασμένη διάσταση. Δηλαδή, αν περιέχει άπειρο γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο.

Παράδειγμα: Ο $C[a,b]$ και οι χώροι ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$ είναι απειροδιάστατοι.

3.1.7 Ένα υποσύνολο M του X λέγεται *βάση* (Hamel βάση) του X αν είναι γραμμικά ανεξάρτητο και παράγει τον X. Αναβάλλουμε την απόδειξη του Θεωρήματος Ύπαρξης Βάσης:

Θεώρημα *Κάθε γραμμικός χώρος X έχει βάση. Οποιεσδήποτε δύο βάσεις του X έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.*

Το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης του X λέγεται *διάσταση* του X.

3.2 Χώροι με νόρμα - Χώροι Banach

Ορισμός. Έστω X ένας γραμμικός χώρος. Μια συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ λέγεται *νόρμα* αν ικανοποιεί τα εξής: για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$,

(N1) $\|x\| \geq 0$.

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(N3) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$.

(N4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(η νόρμα του διανύσματος x «μετράει» την απόσταση του x από το 0, και ζητάμε να έχει τις πιό φυσιολογικές ιδιότητες που η απόσταση θα έπρεπε να έχει.)

Κάθε νόρμα επάγει μια *μετρική* στον X: για κάθε $x, y \in X$, ορίζουμε

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

Πρόταση 3.2.1. *Η d είναι μετρική.*

Απόδειξη: (M1) $d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$, από την (N1).

(M2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$, από την (N2).

(M3) $d(y,x) = \|y-x\| = \|(-1)(x-y)\| = |-1|\, \|x-y\| = \|x-y\| = d(x,y)$, από την (N3).

(M4) $d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$, από την (N4). $\square$

Ορισμός. *Χώρος Banach* είναι ένας πλήρης χώρος με νόρμα (δηλαδή, ένας γραμμικός χώρος με νόρμα που είναι πλήρης ως προς τη μετρική d που επάγεται από τη νόρμα.)

Παραδείγματα. (α) Στον $\mathbb{R}^m$ ορίζουμε την $\|x\| = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_m^2}$, όπου $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα (η τριγωνική ανισότητα είναι η ανισότητα του Minkowski με $p = 2$.)

Στην Παράγραφο 2.2 είδαμε ότι ο $\mathbb{R}^m$ είναι πλήρης ως προς τη μετρική $d(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^m |\xi_k - \eta_k|^2}$. Άρα, ο $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach.

(β) Στον $\ell_p = \{x = (\xi_k) : \sum_k |\xi_k|^p < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$, ορίζουμε

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda \xi_k|^p \right)^{1/p} = \left(|\lambda|^p \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \\ &= |\lambda| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} = |\lambda|\, \|x\|. \end{aligned}$$

Η τριγωνική ανισότητα είναι η ανισότητα του Minkowski. Άρα, ο ℓ_p είναι χώρος με νόρμα. Στην Παράγραφο 2.2 είδαμε ότι ο ℓ_p είναι πλήρης ως προς τη μετρική

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|^p \right)^{1/p}.$$

Άρα, ο ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, είναι χώρος Banach.

(γ) Η $\|x\| = \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\}$ είναι νόρμα στον ℓ_∞. Έχουμε δεί ότι ο ℓ_∞ είναι πλήρης ως προς την

$$d(x,y) = \sup\{|\xi_k - \eta_k| : k \in \mathbb{N}\}.$$

Άρα, ο ℓ_∞ είναι χώρος Banach. Οι c, c_0 είναι κλειστοί υπόχωροι του ℓ_∞, άρα χώροι Banach.

(δ) Ο $C[a,b]$ είναι χώρος Banach με νόρμα την $\|f\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$. Ελέγξτε τις λεπτομέρειες.

(ε) Η $\|f\|' = \int_a^b |f(t)|dt$ είναι επίσης νόρμα στον $C[a,b]$. Είδαμε όμως ότι ο $C[a,b]$ δεν είναι πλήρης ως προς την $d(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt$. Άρα, ο $(C[a,b], \|\cdot\|')$ είναι χώρος με νόρμα, αλλά όχι χώρος Banach.

Η επόμενη πρόταση συνδέει τη γραμμική με την τοπολογική δομή ενός χώρου με νόρμα:

Πρόταση 3.2.2. *Σε κάθε χώρο με νόρμα, οι $\|\cdot\|$ και $+, \cdot$ είναι συνεχείς συναρτήσεις.*

Απόδειξη: Τι εννοούμε μ' αυτό: πρώτα-πρώτα, αν $x_n, x \in X$, τότε $x_n \to x$ στον X αν και μόνο αν $d(x_n, x) \to 0$, δηλαδή αν $\|x_n - x\| \to 0$. Κατόπιν, για να ελέγξουμε τη συνέχεια μιας συνάρτησης f, αρκεί να δείξουμε ότι

$$x_n \to x \Longrightarrow f(x_n) \to f(x).$$

(α) *Η $\|\cdot\|$ είναι συνεχής:* Ζητάμε, $x_n \to x \Longrightarrow \|x_n\| \to \|x\|$. Αυτό όμως έπεται από την

$$\big|\|x\| - \|x_n\|\big| \leq \|x - x_n\|,$$

αφού $\|x - x_n\| \to 0$.

(β) *Η $+$ είναι συνεχής:* Θέλουμε να δείξουμε ότι αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$, τότε $x_n + y_n \to x + y$. Αυτό είναι συνέπεια της

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0.$$

(γ) *Η $\cdot$ είναι συνεχής:* Θα δείξουμε ότι αν $\lambda_n \to \lambda$ και $x_n \to x$, τότε $\lambda_n x_n \to \lambda x$. Γράφουμε

$$(*) \qquad \|\lambda x - \lambda_n x_n\| = \|\lambda_n(x - x_n) + (\lambda - \lambda_n)x\| \leq |\lambda_n|\, \|x - x_n\| + \|x\|\, |\lambda - \lambda_n|.$$

Παρατηρήστε ότι, αφού $\lambda_n \to \lambda$, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|\lambda_n| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$. Οπότε, η $(*)$ γίνεται

$$\|\lambda x - \lambda_n x_n\| \leq M\|x - x_n\| + \|x\|\, |\lambda - \lambda_n| \to 0. \quad \square$$

Κάθε μετρική που επάγεται από νόρμα έχει πρόσθετες ιδιότητες: είναι «καλή» μετρική (παρατηρήστε ότι στην απόδειξη της Πρότασης 3.2.1 δεν χρησιμοποιήθηκαν *όλες* οι ιδιότητες της νόρμας):

Πρόταση 3.2.3. *Έστω X χώρος με νόρμα, και d η επαγόμενη μετρική. Τότε, για κάθε $x, y, z \in X$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, έχουμε*

1. $d(x + z, y + z) = d(x, y)$,
2. $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.

Απόδειξη: (α) $d(x + z, y + z) = \|(x + z) - (y + z)\| = \|x - y\| = d(x, y)$.

(β) $d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = \|\lambda(x - y)\| = |\lambda|\, \|x - y\| = |\lambda| d(x, y)$. $\square$

Παράδειγμα: Στον s, η

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}$$

είναι μετρική. Ο s είναι γραμμικός χώρος, όμως η d δεν επάγεται από κάποια νόρμα $\|\cdot\|$ στον s: θα έπρεπε να ικανοποιεί την

$$d(2x, 0) = \|2x\| = 2\|x\| = 2d(x, 0),$$

δηλαδή για κάθε $x = (\xi_k) \in s$ θα είχαμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{2|\xi_k|}{1 + 2|\xi_k|} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k|}{1 + |\xi_k|}.$$

Αυτό δεν ισχύει (πάρτε, για παράδειγμα, $x = (1, 0, \ldots)$.)

Ορισμός Έστω X χώρος με νόρμα. Η *μοναδιαία μπάλα* B_X του X είναι η κλειστή μπάλα με κέντρο 0 και ακτίνα 1. Δηλαδή,

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}.$$

Πρόταση 3.2.4. *Σε κάθε χώρο με νόρμα X, η μοναδιαία μπάλα B_X είναι σύνολο κλειστό, φραγμένο, κυρτό και συμμετρικό ως προς το 0, με μη κενό εσωτερικό.*

Απόδειξη: (α) Η B_X είναι φραγμένη: $B_X \subseteq D(0,2)$.

(β) Αν $\|x_n\| \leq 1$ και $x_n \to x$, τότε $\|x\| = \lim_n \|x_n\| \leq 1$. Δηλαδή, η B_X είναι κλειστό σύνολο.

(γ) Η B_X είναι κυρτή: αν $x, y \in B_X$ και $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leq \|\lambda x\| + \|(1-\lambda)y\| \leq \lambda + (1-\lambda) = 1,$$

δηλαδή, $\lambda x + (1-\lambda)y \in B_X$.

(δ) Αν $x \in B_X$, τότε $\|-x\| = \|x\| \leq 1$, δηλαδή $-x \in B_X$. Άρα, η B_X είναι συμμετρική ως προς το 0.

(ε) $D(0,1/2) \subseteq B_X$, άρα $B_X^\circ \neq \emptyset$. □

3.3 Σύγκλιση σειρών

Έχουμε δεί τον ορισμό της *συγκλίνουσας ακολουθίας* σε ένα χώρο με νόρμα: αν $x_n, x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, τότε λέμε ότι $x_n \to x$ αν $\|x_n - x\| \to 0$.

Τελείως ανάλογα, μια ακολουθία (x_n) στον X λέγεται *ακολουθία Cauchy* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$n, m \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Ο X είναι γραμμικός χώρος, επομένως μπορούμε να *προσθέτουμε* τους όρους μιάς ακολουθίας στον X. Αυτό οδηγεί σε μια φυσιολογική γενίκευση της έννοιας της *συγκλίνουσας σειράς* σε αυθαίρετο χώρο με νόρμα:

Ορισμός (α) Έστω (x_k) ακολουθία στον X. Η ακολουθία (s_n) των *μερικών αθροισμάτων* της (x_k) ορίζεται από την

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Αν υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $s_n \to x$, τότε λέμε ότι *η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει στο x*, και γράφουμε

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

(β) Λέμε ότι *η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει απολύτως*, αν

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < +\infty$$

(δηλαδή, αν η σειρά πραγματικών αριθμών $\|x_1\| + \|x_2\| + \cdots$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.)

Πρόταση 3.3.1. *Έστω X χώρος Banach. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει απολύτως στον X, τότε συγκλίνει στον X.*

Απόδειξη: Έστω (x_k) ακολουθία στον X, με την ιδιότητα $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$. Αν μάς δώσουν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n > m \geq n_0$,

$$\|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| < \varepsilon.$$

Τότε, αν $n > m \geq n_0$,

$$\|s_n - s_m\| = \|x_{m+1} + \cdots + x_n\| \leq \|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| < \varepsilon.$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η (s_n) είναι Cauchy. Ο X είναι πλήρης, άρα η s_n συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$. Αυτό εξ' ορισμού σημαίνει ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει στο x. □

Η ιδιότητα της Πρότασης 3.3.1 χαρακτηρίζει τους πλήρεις χώρους με νόρμα:

Πρόταση 3.3.2. *Αν σε ένα χώρο X με νόρμα, κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά συγκλίνει, τότε ο X είναι πλήρης (είναι χώρος Banach).*

Απόδειξη: Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον X. Για $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots$, μπορούμε να βρούμε (γιατί;) $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ τέτοια ώστε

$$\forall n > m \geq n_k, \quad \|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^k}.$$

Ειδικότερα,

$$n_2 > n_1 \geq n_1 \Longrightarrow \|x_{n_2} - x_{n_1}\| < \frac{1}{2},$$

$$n_3 > n_2 \geq n_2 \Longrightarrow \|x_{n_3} - x_{n_2}\| < \frac{1}{2^2},$$

και, γενικά,

$$n_{k+1} > n_k \geq n_k \Longrightarrow \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 1 < +\infty.$$

Η $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ συγκλίνει απολύτως, οπότε (από την υπόθεσή μας) συγκλίνει: υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{k=1}^{m}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \to x,$$

δηλαδή, $x_{n_{m+1}} - x_{n_1} \to x$. Άρα, $x_{n_k} \to x + x_{n_1}$. Δείξαμε ότι η (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Είναι όμως και ακολουθία Cauchy, άρα συγκλίνει στον X (Πρόταση 2.1.3). Έπεται ότι ο X είναι πλήρης. $\square$

Έχοντας στη διάθεσή μας την έννοια της συγκλίνουσας σειράς, μπορούμε να ορίσουμε μια έννοια «βάσης» διαφορετική από αυτήν της Hamel βάσης:

Ορισμός Μια ακολουθία (e_n) λέγεται *βάση Schauder* του χώρου X, αν $e_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, και κάθε $x \in X$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$

(υπάρχουν δηλαδή μοναδικοί $a_n = a_n(x) \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\|x - (a_1 e_1 + \ldots + a_m e_m)\| \to 0$$

καθώς $m \to \infty$.) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ είναι το *ανάπτυγμα* του x ως προς τη βάση (e_n).

Παράδειγμα Αν $1 \leq p < +\infty$, η ακολουθία (e_n) με $e_n = (\delta_{nk})$ είναι βάση Schauder του ℓ_p (εξηγήστε).

Πρόταση 3.3.3. *Έστω X χώρος με νόρμα. Αν ο X έχει βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τότε ο X είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη: Ορίζουμε $M = \{\sum_{n=1}^{m} q_n e_n : m \in \mathbb{N}, q_n \in \mathbb{Q}\}$. Το M είναι αριθμήσιμο. Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n,$$

άρα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$\left\|x - \sum_{n=1}^{m} a_n e_n\right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Για κάθε $n = 1, \ldots, m$, βρίσκουμε $q_n \in \mathbb{Q}$ τέτοιους ώστε

$$|q_n - a_n| \, \|e_n\| < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Τότε, $\sum_{n=1}^{m} q_n e_n \in M$, και

$$\begin{aligned}\|x - \sum_{n=1}^{m} q_n e_n\| &\leq \|x - \sum_{n=1}^{m} a_n e_n\| + \|\sum_{n=1}^{m} (a_n - q_n) e_n\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{m} |a_n - q_n| \, \|e_n\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + m\frac{\varepsilon}{2m} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Άρα, $\overline{M} = X$. □

Σημείωση: Το 1936, ο Mazur ρώτησε αν ισχύει το αντίστροφο της Πρότασης 3.3.3: αν δηλαδή, κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach έχει βάση Schauder. Το ερώτημα αποδείχθηκε εξαιρετικά δύσκολο: το 1973, ο Per Enflo έδωσε αρνητική απάντηση.

3.4 Ασκήσεις

1. Αν Y και Z είναι υπόχωροι του X, δείξτε ότι ο $Y \cap Z$ είναι υπόχωρος του X, ενώ ο $Y \cup Z$ είναι υπόχωρος του X αν και μόνο αν είτε $Y \subseteq Z$ είτε $Z \subseteq Y$.

2. (α) Δείξτε ότι, αν $1 \leq p < r \leq \infty$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\|x\|_r \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \|x\|_r.$$

Βρείτε διανύσματα x για τα οποία ισχύει ισότητα στις παραπάνω ανισότητες.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: αν $N < p < +\infty$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq (1+\varepsilon)\|x\|_\infty.$$

3. Έστω X χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι η κλειστή θήκη $\overline{Y}$ ενός γραμμικού υποχώρου Y του X είναι γραμμικός υπόχωρος του X.

4. Δείξτε ότι σε έναν χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$, για κάθε $x \in X$ και $r > 0$ ισχύει

$$B(x,r) = \overline{D(x,r)}.$$

5. Έστω X χώρος με νόρμα, και Y ένας γραμμικός υπόχωρος του X. Δείξτε ότι αν $Y^\circ \neq \emptyset$, τότε $Y = X$.

6. Έστω X γραμμικός χώρος, και $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ δύο νόρμες στον X. Δείξτε ότι $\|x\| \leq \|x\|'$ για κάθε $x \in X$, αν και μόνο αν $B_{(X,\|\cdot\|')} \subseteq B_{(X,\|\cdot\|)}$.

7. Ο c_{00} περιέχεται σε κάθε ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$. Δείξτε ότι είναι πυκνός στον ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$, όχι όμως στον ℓ_∞.

8. Θεωρούμε το $S = \{x \in \ell_\infty : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leq 1\}$. Δείξτε ότι το S είναι κλειστό στον ℓ_1 (και στον ℓ_∞) ως προς την $\|x\| = \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\}$ και έχει κενό εσωτερικό.

Δείξτε ότι ο ℓ_1 με νόρμα την $\|x\| = \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι χώρος Banach.

9. Στον ℓ_1 ορίζουμε

$$\|x\|' = 2\left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\right| + \sum_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) |\xi_k|.$$

Δείξτε ότι η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα. Είναι ισοδύναμη με την $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$; Είναι ο $(\ell_1, \|\cdot\|')$ χώρος Banach;

10. Έστω X n-διάστατος πραγματικός γραμμικός χώρος, και $x_1,\dots,x_m$ διανύσματα που παράγουν τον X. Τότε, για κάθε $x\in X$ υπάρχουν $\lambda_1,\dots,\lambda_m\in\mathbb{R}$ (όχι αναγκαστικά μοναδικά), τέτοια ώστε $x=\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$. Ορίζουμε

$$\|x\| = \inf\left\{ \sum_{i=1}^m |\lambda_i| : \lambda_i\in\mathbb{R}, x=\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right\}.$$

Δείξτε ότι ο $(X,\|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα.

11. Έστω $C^1[0,1]$ ο χώρος των συνεχώς παραγωγίσιμων $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, με νόρμα την

$$\|f\| = \max\left\{ \max_{0\leq t\leq 1} |f(t)|, \max_{0\leq t\leq 1} |f'(t)| \right\}.$$

Δείξτε ότι η $\|\cdot\|$ είναι όντως νόρμα, και ότι ο $(C^1[0,1],\|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach.

12. Στον c_0 θεωρούμε την $\|x\|' = \sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|}{2^k}$. Δείξτε ότι ο $(c_0,\|\cdot\|')$ είναι χώρος με νόρμα, αλλά δεν είναι χώρος Banach.

13. Θεωρούμε τον c_{00} σαν υπόχωρο του ℓ_∞. Έστω $y_n=\left(0,\dots,0,\frac{1}{n^2},0,\dots\right)$, $n\in\mathbb{N}$. Δείξτε ότι η $\sum_n \|y_n\|$ συγκλίνει, αλλά η $\sum_n y_n$ δεν συγκλίνει στον Y. Τι συμπεραίνετε;

.

Υποδείξεις - απαντήσεις

1. (α) Για την τομή: υποθέτουμε ότι $x, y \in Y \cap Z$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Αφού $x, y \in Y$ και ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X, παίρνουμε $\lambda x + \mu y \in Y$. Ομοίως, $\lambda x + \mu y \in Z$. Δηλαδή, $\lambda x + \mu y \in Y \cap Z$.

(β) Για την ένωση: αν $Y \subseteq Z$ τότε $Y \cup Z = Z$, ενώ αν $Z \subseteq Y$ τότε $Y \cup Z = Y$. Σε κάθε περίπτωση, ο $Y \cup Z$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι ο $Y \cup Z$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X. Με την υπόθεση ότι υπάρχουν $y \in Y \setminus Z$ και $z \in Z \setminus Y$, θα καταλήξουμε σε άτοπο. Πράγματι, αφού $y, z \in Y \cup Z$, έχουμε $y + z \in Y \cup Z$.

Αν $y + z \in Y$ τότε $(y + z) - y \in Y$ γιατί ο Y είναι υπόχωρος, δηλαδή $z \in Y$ το οποίο είναι άτοπο.

Αν $y + z \in Z$ τότε $(y + z) - z \in Z$ γιατί ο Z είναι υπόχωρος, δηλαδή $y \in Z$ το οποίο είναι πάλι άτοπο.

Αφού δεν μπορούν να ισχύουν ταυτόχρονα οι $Y \setminus Z \neq \emptyset$ και $Z \setminus Y \neq \emptyset$, έχουμε είτε $Y \subseteq Z$ είτε $Z \subseteq Y$.

2. (α) Δείξτε την εξής ανισότητα: αν $r \geq 1$ και $a, b \geq 0$, τότε $(a + b)^r \geq a^r + b^r$. Επαγωγικά βλέπουμε ότι αν $r \geq 1$ και $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, τότε

$$(a_1 + \cdots + a_n)^r \geq a_1^r + \cdots + a_n^r.$$

Έστω $p < r$. Αν $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, έχουμε

$$\|x\|_p^r = (|\xi_1|^p + \cdots + |\xi_n|^p)^{r/p} \geq (|\xi_1|^p)^{r/p} + \cdots + (|\xi_n|^p)^{r/p} = |\xi_1|^r + \cdots + |\xi_n|^r = \|x\|_r^r,$$

οπότε $\|x\|_r \leq \|x\|_p$ (χρησιμοποιήσαμε την προηγούμενη ανισότητα για τα $r/p > 1$ και $a_k = |\xi_k|^p$). Ισότητα ισχύει αν $x = \vec{0}$ ή $x = e_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Για την άλλη ανισότητα χρησιμοποιούμε την ανισότητα του Hölder:

$$\begin{aligned} \|x\|_p^p &= |\xi_1|^p \cdot 1 + \cdots + |\xi_n|^p \cdot 1 \\ &\leq \left((|\xi_1|^p)^{r/p} + \cdots + (|\xi_n|^p)^{r/p} \right)^{\frac{p}{r}} (1 + \cdots + 1)^{1 - \frac{p}{r}} \\ &= \|x\|_r^p n^{1 - \frac{p}{r}}, \end{aligned}$$

άρα $\|x\|_p \leq \|x\|_r n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}$. Ισότητα ισχύει αν $x = (1, \ldots, 1)$. Η περίπτωση $r = \infty$ είναι απλή.

(β) Από το (α) έχουμε $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$ για κάθε $p \geq 1$ και κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $n^{1/p} \to 1$ όταν $p \to \infty$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n^{1/p} < 1 + \varepsilon$ για κάθε $p > N$. Τότε, για κάθε $p > N$ ισχύει η

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq (1 + \varepsilon) \|x\|_\infty, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

3. Έστω $z, w \in \overline{Y}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Υπάρχουν $z_n, w_n \in Y$ με $z_n \to z$ και $w_n \to w$. Αφού ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\lambda z_n + \mu w_n \in Y$.

Όμως οι πράξεις του X είναι συνεχείς ως προς τη νόρμα, άρα

$$\lambda z_n + \mu w_n \to \lambda z + \mu w.$$

Αυτό σημαίνει ότι $\lambda z + \mu w \in \overline{Y}$.

4. Η $B(x, r)$ είναι κλειστό σύνολο και $D(x, r) \subseteq B(x, r)$. Άρα,

$$\overline{D(x, r)} \subseteq B(x, r).$$

Αντίστροφα, έστω $y \in B(x, r)$, $y \neq x$. Ορίζουμε $y_n = x + \lambda_n (y - x)$, όπου (λ_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών με όριο το 1. Τότε $y_n \to x + (y - x) = y$ και

$$\|x - y_n\| = \|\lambda_n (y - x)\| = \lambda_n \|y - x\| < \|y - x\| \leq r,$$

δηλαδή $y_n \in D(x, r)$ και $y_n \to y$. Έπεται ότι $y \in \overline{D(x, r)}$, και αφού το $y \in B(x, r)$, $y \neq x$ ήταν τυχόν, $B(x, r) \subseteq \overline{D(x, r)}$.

5. Αφού $Y^\circ \neq \emptyset$, υπάρχουν $y \in X$ και $r > 0$ τέτοια ώστε $D(y, r) \subseteq Y$. Ειδικότερα, $y \in Y$.

Έστω $x \in X$, $x \neq y$. Τότε, $y + \frac{r}{2}\frac{x-y}{\|x-y\|} \in D(y,r)$ (γιατί;), άρα

$$y + \frac{r}{2}\frac{x-y}{\|x-y\|} \in Y.$$

Όμως ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X, οπότε χρησιμοποιώντας την παρατήρηση ότι $y \in Y$ παίρνουμε

$$\frac{r}{2}\frac{x-y}{\|x-y\|} \in Y \Longrightarrow x - y \in Y \Longrightarrow x \in Y.$$

Το x ήταν τυχόν, άρα $Y = X$.

6. Έστω ότι $\|x\| \leq \|x\|'$ για κάθε $x \in X$. Αν $x \in B_{(X,\|\cdot\|')}$, τότε $\|x\|' \leq 1$. Άρα, $\|x\| \leq \|x\|' \leq 1$, το οποίο σημαίνει ότι $x \in B_{(X,\|\cdot\|)}$. Δηλαδή, $B_{(X,\|\cdot\|')} \subseteq B_{(X,\|\cdot\|)}$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $B_{(X,\|\cdot\|')} \subseteq B_{(X,\|\cdot\|)}$ και θεωρούμε τυχόν $x \in X\backslash\{0\}$. Τότε,

$$\left\|\frac{x}{\|x\|'}\right\|' = 1 \Longrightarrow \frac{x}{\|x\|'} \in B_{(X,\|\cdot\|')} \subseteq B_{(X,\|\cdot\|)},$$

δηλαδή

$$\left\|\frac{x}{\|x\|'}\right\| \leq 1 \Longrightarrow \frac{\|x\|}{\|x\|'} \leq 1.$$

Η $\|0\| \leq \|0\|'$ ισχύει σαν ισότητα, οπότε δείξαμε ότι $\|x\| \leq \|x\|'$ για κάθε $x \in X$.

7. (α) Έστω $x = (\xi_k) \in \ell_p$, $1 \leq p < +\infty$ και $\varepsilon > 0$. Αφού $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < +\infty$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k|^p < \varepsilon^p$.

Ορίζουμε $w = (\xi_1, \ldots, \xi_N, 0, \ldots) \in c_{00}$. Τότε,

$$\|x - w\| = \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} < \varepsilon,$$

δηλαδή $D(x,\varepsilon) \cap c_{00} \neq \emptyset$. Αφού το $\varepsilon > 0$ και το $x \in \ell_p$ ήταν τυχόντα, συμπεραίνουμε ότι ο c_{00} είναι πυκνός στον ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$.

(β) Θεωρούμε το $x = (1, \ldots, 1, \ldots) \in \ell_\infty$. Αν $w \in c_{00}$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $w_k = 0$ για κάθε $k \geq N$. Άρα,

$$\|x - w\| = \sup\{|1 - w_k| : k \in \mathbb{N}\} \geq |1 - w_N| = 1.$$

Δηλαδή $d(x, c_{00}) \geq 1$, το οποίο σημαίνει ότι $D(x,1) \cap c_{00} = \emptyset$. Άρα, ο c_{00} δεν είναι πυκνός στον ℓ_∞.

8. (α) Έστω $x_n = (\xi_{nk}) \in S$, δηλαδή $\sum_k |\xi_{nk}| \leq 1$ για κάθε n. Υποθέτουμε ότι $x_n \to x = (\xi_k) \in \ell_\infty$. Τότε,

$$\sup\{|\xi_{nk} - \xi_k| : k \in \mathbb{N}\} \to 0$$

καθώς $n \to \infty$, άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\xi_{nk} \to \xi_k$ καθώς $n \to \infty$. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^{N} |\xi_{nk}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk}| \leq 1,$$

άρα

$$\sum_{k=1}^{N} |\xi_k| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |\xi_{nk}| \leq 1.$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε N, έπεται ότι $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leq 1$, δηλαδή $x \in S$. Αυτό αποδεικνύει ότι το S είναι κλειστό στον ℓ_∞.

(β) Θα δείξουμε ότι το S έχει κενό εσωτερικό στον $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ - άρα και στον ℓ_∞. Έστω ότι υπάρχουν $x \in S$ και $\varepsilon > 0$ με την ιδιότητα

$$\{z \in \ell_1 : \|z - x\|_{\ell_\infty} < \varepsilon\} \subseteq S.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχουν άπειροι δείκτες $k_1 < k_2 < \ldots < k_N < \ldots$ για τους οποίους $\xi_{k_j} \geq 0$ (αλλιώς δουλεύουμε με τα αρνητικά ξ_k). Βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ τόσο μεγάλο ώστε $N\varepsilon/2 > 1$ και ορίζουμε $\xi'_{k_1} = \xi_{k_1} + \frac{\varepsilon}{2}, \ldots, \xi'_{k_N} = \xi_{k_N} + \frac{\varepsilon}{2}$, και $\xi'_k = \xi_k$ για όλους τους άλλους k. Τότε το $x' = (\xi'_k) \in \ell_1$, $\|x - x'\|_{\ell_\infty} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, και

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi'_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| + \frac{N\varepsilon}{2} > 1,$$

δηλαδή $x' \notin S$. Άτοπο, γιατί είχαμε υποθέσει ότι $\ell_1 \cap D(x,\varepsilon) \subseteq S$.

(γ) Έστω ότι ο $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ είναι χώρος Banach. Τότε, ο ℓ_1 είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞ ως προς την $\|\cdot\|_{\ell_\infty}$ (γιατί;). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$F_n = nS = \{x \in \ell_1 : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leq n\}.$$

Κάθε F_n είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_1 ως προς την $\|\cdot\|_{\ell_\infty}$, και έχει κενό εσωτερικό στον $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$: αν το nS περιείχε μπάλα ακτίνας $r > 0$, τότε το S θα περιείχε μπάλα ακτίνας r/n, άτοπο από το (β).

Τα F_n είναι κλειστά υποσύνολα του ℓ_1 με κενό εσωτερικό και $\ell_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ (γιατί;). Αυτό είναι άτοπο από το θεώρημα του Baire. Άρα, ο $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ δεν είναι χώρος Banach.

9. Η $\|\cdot\|'$ ορίζεται καλά, γιατί αν $x \in \ell_1$ έχουμε

$$2\Big|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\Big| + \sum_{k=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)|\xi_k| \leq 2\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k| + \frac{3}{2}\sum_{k=2}^{\infty}|\xi_k| < +\infty.$$

Η μόνη ιδιότητα της νόρμας που χρειάζεται προσοχή, είναι η $\|x\|' = 0 \Longrightarrow x = 0$. Έχουμε

$$\|x\|' = 0 \Longrightarrow 2\Big|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\Big| + \sum_{k=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)|\xi_k| = 0,$$

απ' όπου παίρνουμε $\xi_k = 0$ για κάθε $k \geq 2$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = 0$. Αυτά τα δύο μάς δίνουν και την $\xi_1 = 0$, άρα $x = 0$.

Θα δείξουμε ότι η $\|\cdot\|'$ και η συνήθης νόρμα $\|\cdot\|$ στον ℓ_1 είναι ισοδύναμες. Αφού ο $(\ell_1, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach, αυτό δείχνει αμέσως ότι ο ℓ_1 είναι πλήρης ως προς την $\|\cdot\|'$ (γιατί;). Έχουμε:

$$\|x\|' \leq 2\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k| + \frac{3}{2}\sum_{k=2}^{\infty}|\xi_k| \leq 2\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k| + \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k| = \frac{7}{2}\|x\|,$$

και

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k| = |\xi_1| + \sum_{k=2}^{\infty}|\xi_k| \\
&= \Big|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k - \sum_{k=2}^{\infty}\xi_k\Big| + \sum_{k=2}^{\infty}|\xi_k| \\
&\leq \Big|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\Big| + |\sum_{k=2}^{\infty}\xi_k| + \sum_{k=2}^{\infty}|\xi_k| \\
&\leq \Big|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\Big| + 2\sum_{k=2}^{\infty}|\xi_k| \\
&\leq 2\left(2|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k| + \sum_{k=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)|\xi_k|\right) \\
&= 2\|x\|'.
\end{aligned}$$

Είδαμε ότι $\frac{1}{2}\|x\| \leq \|x\|' \leq \frac{7}{2}\|x\|$ για κάθε $x \in \ell_1$, άρα οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

10. Τα x_i παράγουν τον X, επομένως κάθε $x \in X$ γράφεται με τουλάχιστον έναν τρόπο στη μορφή $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$. Άρα, το

$$\left\{\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i| : x = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\right\}$$

είναι μη κενό και κάτω φραγμένο από το 0, οπότε η

$$\|x\| = \inf\left\{\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i| : x = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\right\}$$

ορίζεται καλά. Προφανώς, $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x \in X$.

Για το $(N2)$: Έστω ότι $\|x\| = 0$. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $\lambda_i^{(k)}$ τέτοιοι ώστε $\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i^{(k)}| < \frac{1}{k}$ και $x = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{(k)}x_i$. Αφού $|\lambda_i^{(k)}| < 1/k$, έχουμε $\lambda_i^{(k)} \to 0$ για κάθε $i \leq m$. Πάρτε οποιαδήποτε νόρμα $\|\cdot\|'$ στον X. Τότε, $x = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{(k)}x_i \to \sum_{k=1}^{m} 0 \cdot x_i = \vec{0}$ ως προς την $\|\cdot\|'$, άρα $x = \vec{0}$.

Για το $(N3)$: Έστω $x \in X$ και $a \in \mathbb{R}$. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ και $\|x\| \leq \sum_{i=1}^m |\lambda_i| < \|x\| + \varepsilon$. Τότε, $ax = \sum_{i=1}^m (a\lambda_i)x_i$ και

$$\sum_{i=1}^m |a\lambda_i| < |a| \cdot \|x\| + |a|\varepsilon \Longrightarrow \|ax\| < |a| \cdot \|x\| + |a|\varepsilon.$$

Αφού το ε ήταν τυχόν, $\|ax\| \leq |a| \cdot \|x\|$. Τελείως ανάλογα δείχνουμε την αντίστροφη ανισότητα.

Για το $(N4)$: Έστω $x, y \in X$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$, $y = \sum_{i=1}^m \mu_i x_i$ και

$$\sum_{i=1}^m |\lambda_i| < \|x\| + \varepsilon, \quad \sum_{i=1}^m |\mu_i| < \|y\| + \varepsilon.$$

Τότε, $x + y = \sum_{i=1}^m (\lambda_i + \mu_i)x_i$ και

$$\sum_{i=1}^m |\lambda_i + \mu_i| \leq \sum_{i=1}^m |\lambda_i| + \sum_{i=1}^m |\mu_i| < \|x\| + \|y\| + 2\varepsilon.$$

Άρα,

$$\|x + y\| \leq \sum_{i=1}^m |\lambda_i + \mu_i| < \|x\| + \|y\| + 2\varepsilon,$$

και αφού το ε ήταν τυχόν, παίρνουμε την $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

11. Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον $C^1[0,1]$. Ας υποθέσουμε ότι (f_n) είναι μια ακολουθία Cauchy στον $C^1[0,1]$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: αν $n, m \geq n_0$, τότε $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$, δηλαδή $\|f_n - f_m\|^* < \varepsilon$ και $\|f_n' - f_m'\|^* < \varepsilon$, όπου $\|\cdot\|^*$ η συνήθης νόρμα στον $C[0,1]$. Ο $C[0,1]$ είναι πλήρης, οι (f_n) και (f_n') είναι ακολουθίες Cauchy, άρα υπάρχουν συνεχείς $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f_n \to f$ και $f_n' \to g$ ομοιόμορφα. Από γνωστό θεώρημα (Ανάλυση ΙΙ), η f είναι παραγωγίσιμη και $f' = g$. Αφού η g είναι συνεχής, έχουμε $f \in C^1[0,1]$. Τέλος, $\|f_n - f\|^* \to 0$ και $\|f_n' - f'\|^* \to 0$, άρα

$$\|f_n - f\| = \max\{\|f_n - f\|^*, \|f_n' - f'\|^*\} \to 0.$$

Δηλαδή, $f_n \to f$ στον $C^1[0,1]$. Η (f_n) ήταν τυχούσα ακολουθία Cauchy, άρα ο $(C^1[0,1], \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach.

12. Η $\|\cdot\|'$ ορίζεται καλά: αν $x = (\xi_k) \in c_0$, τότε $|\xi_k| \to 0$, άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|\xi_k| \leq M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{|\xi_k|}{2^k} \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{M}{2^k} = M < +\infty.$$

Τα αξιώματα της νόρμας ελέγχονται εύκολα.

Θα ορίσουμε ακολουθία Cauchy στον $(c_0, \|\cdot\|')$, η οποία δεν συγκλίνει. Αυτό θα δείξει ότι ο $(c_0, \|\cdot\|')$ δεν είναι χώρος Banach.

Ορίζουμε $x_n = (1, \ldots, 1, 0, \ldots) \in c_0$ (n μονάδες). Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $1/2^{n_0} < \varepsilon$. Αν $n > m \geq n_0$, τότε

$$\|x_n - x_m\| = \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^m} < \varepsilon,$$

δηλαδή η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy ως προς την $\|\cdot\|'$. Έστω ότι υπάρχει $x = (\xi_k) \in c_0$ τέτοιο ώστε $\|x_n - x\|' \to 0$. Αφού $\xi_k \to 0$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|\xi_{k_0}| < 1/2$. Αν $n \geq k_0$, τότε

$$\|x_n - x\|' = \sum_{k=1}^n \frac{|1 - \xi_k|}{2^k} + \sum_{k=n+1}^\infty \frac{|\xi_k|}{2^k} \geq \frac{|1 - \xi_{k_0}|}{2^{k_0}} \geq \frac{1}{2^{k_0+1}}.$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι $\|x_n - x\|' \to 0$.

13. Έχουμε $\sum_{n=1}^\infty \|y_n\| = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < +\infty$. Τα μερικά αθροίσματα της $\sum_n y_n$ είναι

$$s_k = y_1 + \cdots + y_k = (1, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{k^2}, 0, \ldots) \to x = (1/n^2)_{n \in \mathbb{N}}$$

στον ℓ_∞. Αν υπήρχε $y \in c_{00}$ για το οποίο $s_k \to y$, από μοναδικότητα του ορίου (στον ℓ_∞) θα είχαμε $y = x \notin c_{00}$, άτοπο. Βρήκαμε σειρά στον c_{00} η οποία συγκλίνει απολύτως αλλά δεν συγκλίνει. Άρα, ο $(c_{00}, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ δεν είναι χώρος Banach.

Κεφάλαιο 4

Χώροι πεπερασμένης διάστασης

4.1 Βασικές ιδιότητες

Η πρώτη κλάση χώρων με νόρμα που θα μελετήσουμε είναι αυτή των χώρων που, σαν γραμμικοί χώροι, έχουν πεπερασμένη διάσταση. Είναι λογικό να περιμένει κανείς ότι η δομή τους θα είναι απλούστερη. Στο Κεφάλαιο αυτό θα δούμε αρκετές καλές τους ιδιότητες, καθώς και μερικές σημαντικές διαφορές τους από τους χώρους άπειρης διάστασης.

Λήμμα 4.1.1. *Έστω X χώρος με νόρμα, και έστω $x_1, \ldots, x_m$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον X. Υπάρχει μια σταθερά $c > 0$ (που εξαρτάται από τη νόρμα και από τα $x_1, \ldots, x_m$), τέτοια ώστε για κάθε $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ να ισχύει*

$$c\,(|a_1| + \cdots + |a_m|) \leq \|a_1x_1 + \cdots + a_mx_m\|.$$

(δηλαδή, αν οι συντελεστές a_i είναι «μεγάλοι», τότε το διάνυσμα $a_1x_1 + \cdots + a_mx_m$ δεν μπορεί να έχει «αυθαίρετα» μικρή νόρμα.)

Απόδειξη: Θα δείξουμε πρώτα ότι υπάρχει $c > 0$ τέτοιος ώστε

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{m} |\beta_i| = 1 \Longrightarrow \|\beta_1x_1 + \cdots + \beta_mx_m\| \geq c.$$

Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $\beta_1^{(k)}, \ldots, \beta_m^{(k)} \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^{m} |\beta_i^{(k)}| = 1$ και

$$\|\beta_1^{(k)}x_1 + \cdots + \beta_m^{(k)}x_m\| < \frac{1}{k}.$$

Δηλαδή, αν θέσουμε $y^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i^{(k)}x_i$, έχουμε $\|y^{(k)}\| \to 0$.

Σκεφτόμαστε ως εξής: αφού για κάθε k ισχύει η $\sum_{i=1}^{m} |\beta_i^{(k)}| = 1$, ειδικότερα για κάθε k έχουμε $|\beta_1^{(k)}| \leq 1$. Άρα, υπάρχει υπακολουθία $(\beta_1^{(k_s)})$ της $(\beta_1^{(k)})$ που συγκλίνει σε κάποιον $\beta_1 \in \mathbb{R}$.

Κοιτάμε τώρα την $(\beta_2^{(k_s)})$: πάλι, $|\beta_2^{(k_s)}| \leq 1$, επομένως υπάρχει υπακολουθία $(\beta_2^{(k_{l_s})})$ της $(\beta_2^{(k_s)})$ με $\beta_2^{(k_{l_s})} \to \beta_2 \in \mathbb{R}$. Όμως τότε, $\beta_1^{(k_{l_s})} \to \beta_1$ (είναι υπακολουθία της $(\beta_1^{(k_s)})$.)

Κάνοντας m βήματα, βρίσκουμε $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$ και $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$ τέτοιους ώστε

$$\forall i = 1, \ldots, m, \qquad \beta_i^{(k_n)} \to \beta_i.$$

Ορίζουμε $y = \beta_1x_1 + \cdots + \beta_mx_m$. Τότε,

$$\|y - y^{(k_n)}\| = \|\sum_{i=1}^{m} (\beta_i - \beta_i^{(k_n)})x_i\| \leq \sum_{i=1}^{m} |\beta_i - \beta_i^{(k_n)}|\, \|x_i\| \to 0.$$

Άρα, $y^{(k_n)} \to y$ και αφού $\|y^{(k_n)}\| \to 0$,

$$\|y\| = \lim_{n\to\infty} \|y^{(k_n)}\| = 0,$$

δηλαδή, $y = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m = \vec{0}$. Τα $x_1, \ldots, x_m$ έχουν υποτεθεί γραμμικά ανεξάρτητα, άρα $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = 0$. Όμως,

$$\sum_{i=1}^{m} |\beta_i| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} |\beta_i^{(k_n)}| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

το οποίο είναι άτοπο. Αυτό αποδεικνύει την $(*)$.

Έστω τώρα τυχόντες $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. Αν $a_1 = \ldots = a_m = 0$, τότε

$$0 = \|a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m\| \geq c \sum_{i=1}^{m} |a_i| = 0.$$

Αν $A = \sum_{i=1}^{m} |a_i| \neq 0$, ορίζουμε $\beta_i = a_i / A$. Τότε, $\sum_{i=1}^{m} |\beta_i| = 1$, οπότε η $(*)$ δίνει

$$\Big\| \frac{1}{A}(a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m) \Big\| = \|\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m\| \geq c,$$

ή, ισοδύναμα,

$$\|a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m\| \geq cA = c \sum_{i=1}^{m} |a_i|. \quad \Box$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το Λήμμα, δείχνουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των χώρων πεπερασμένης διάστασης:

Θεώρημα 4.1.1. *Έστω X χώρος με νόρμα, και έστω Y υπόχωρος του X που έχει πεπερασμένη διάσταση. Τότε, ο Y είναι πλήρης. Ειδικότερα, κάθε χώρος πεπερασμένης διάστασης με νόρμα είναι πλήρης.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $\dim Y = n$, και σταθεροποιούμε μια βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του Y. Έστω $(y^{(m)})$ ακολουθία Cauchy στον Y. Κάθε $y^{(m)}$ γράφεται μονοσήμαντα σαν γραμμικός συνδυασμός των e_i:

$$y^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(m)} e_i.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $(y^{(m)})$ είναι ακολουθία Cauchy, υπάρχει $m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: αν $m, s \geq m_0$, τότε $\|y^{(m)} - y^{(s)}\| < \varepsilon$. Δηλαδή, για κάθε $m, s \geq m_0$,

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} (a_i^{(m)} - a_i^{(s)}) e_i \Big\| < \varepsilon.$$

Τα e_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα, από το Λήμμα υπάρχει $c > 0$ τέτοιος ώστε: για κάθε $m, s \geq m_0$,

$$c \sum_{i=1}^{n} |a_i^{(m)} - a_i^{(s)}| \leq \Big\| \sum_{i=1}^{n} (a_i^{(m)} - a_i^{(s)}) e_i \Big\| < \varepsilon.$$

Ειδικότερα, για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και κάθε $m, s \geq m_0$,

$$|a_i^{(m)} - a_i^{(s)}| < \frac{\varepsilon}{c}$$

(γιατί;). Άρα, για κάθε $i = 1, \ldots, n$, η $(a_i^{(m)})$ είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$. Οπότε, υπάρχουν $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$a_1^{(m)} \to a_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad a_n^{(m)} \to a_n.$$

Ορίζουμε $y = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n \in Y$. Τότε,

$$\|y - y^{(m)}\| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i - a_i^{(m)}| \, \|e_i\| \to 0,$$

δηλαδή, $y^{(m)} \to y$. Άρα, ο Y είναι πλήρης. $\square$

Σημείωση: Στην Πρόταση 2.1.5(α) είδαμε ότι αν (X,d) είναι ένας μετρικός χώρος, τότε κάθε πλήρης υπόχωρός του είναι κλειστός. Η παρατήρηση αυτή και το Θεώρημα 4.1.1 έχουν την εξής άμεση συνέπεια:

Θεώρημα 4.1.2. *Έστω X χώρος με νόρμα, και έστω Y υπόχωρος του X που έχει πεπερασμένη διάσταση. Τότε, ο Y είναι κλειστός στον X.*

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 4.1.1, ο Y είναι πλήρης. $\square$

Εφαρμογή: *Αν X είναι ένας απειροδιάστατος χώρος Banach, τότε κάθε βάση Hamel του X είναι υπεραριθμήσιμη.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι ο X έχει άπειρη αριθμήσιμη βάση Hamel

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$$

Ορίζουμε $Y_n = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$. Κάθε Y_n έχει πεπερασμένη διάσταση, επομένως είναι κλειστός υπόχωρος του X.

Από την άλλη πλευρά, κάθε $x \in X$ είναι *πεπερασμένος* γραμμικός συνδυασμός των e_n, άρα

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n.$$

Όμως, ο X είναι *πλήρης*. Το Θεώρημα του Baire μας λέει ότι κάποιος Y_n έχει *μη κενό εσωτερικό*. Υπάρχουν δηλαδή $n \in \mathbb{N}$, $x \in Y_n$ και $r > 0$ τέτοια ώστε

$$\{z \in X : \|z - x\| < r\} \subseteq Y_n.$$

Αυτό οδηγεί σε άτοπο: έστω $w \in X$. Υπάρχει $\lambda > 0$ για το οποίο $\|\lambda w\| < r$. Τότε, $x + \lambda w \in Y_n$ (γιατί;). Όμως $x \in Y_n$, και ο Y_n είναι γραμμικός υπόχωρος του X. Άρα,

$$w = \frac{1}{\lambda}\left((x + \lambda w) - x\right) \in Y_n.$$

Έπεται ότι $Y_n = X$. Αυτό είναι άτοπο, γιατί ο X είναι απειροδιάστατος. $\square$

Συνέπεια: Αν X είναι ένας γραμμικός χώρος που έχει άπειρη αριθμήσιμη διάσταση, τότε όποια νόρμα κι αν ορίσουμε στον X αποκλείεται να πάρουμε χώρο Banach. Ένα τέτοιο παράδειγμα μας δίνει ο χώρος $P[a,b]$ των πολυωνύμων στο $[a,b]$ (εξηγήστε).

Ορισμός Έστω X ένας γραμμικός χώρος. Δύο νόρμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ στον X λέγονται *ισοδύναμες* αν υπάρχουν θετικοί αριθμοί a, b τέτοιοι ώστε, για κάθε $x \in X$

$$a\|x\| \leq \|x\|' \leq b\|x\|.$$

Πρόταση 4.1.1. *Έστω $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ ισοδύναμες νόρμες στον X. Αν $x_n, x \in X$, τότε*

$$\|x - x_n\| \to 0 \Leftrightarrow \|x - x_n\|' \to 0.$$

(δηλαδή, $x_n \to x$ στον $(X, \|\cdot\|)$ αν και μόνο αν $x_n \to x$ στον $(X, \|\cdot\|')$: οι δύο χώροι έχουν ακριβώς τις ίδιες συγκλίνουσες ακολουθίες.)

Απόδειξη: Αν $\|x - x_n\|' \to 0$, τότε $\|x - x_n\| \leq \frac{1}{a}\|x - x_n\|' \to 0$. Δηλαδή, $\|x - x_n\| \to 0$.

Όμοια, αν $\|x - x_n\| \to 0$, τότε $\|x - x_n\|' \leq b\|x - x_n\| \to 0$, δηλαδή $\|x - x_n\|' \to 0$. $\square$

Πρόταση 4.1.2. *Έστω $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ ισοδύναμες νόρμες στον X. Αν $A \subseteq X$, τότε το A είναι κλειστό στον $(X, \|\cdot\|)$ αν και μόνο αν το A είναι κλειστό στον $(X, \|\cdot\|')$.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι το A είναι κλειστό στον $(X, \|\cdot\|)$. Έστω $x_n \in A$ με $x_n \to x$ ως προς την $\|\cdot\|'$. Από την Πρόταση 4.1.1, $x_n \to x$ ως προς την $\|\cdot\|$, και αφού το A είναι κλειστό ως προς την $\|\cdot\|$, έπεται ότι $x \in A$. Άρα, το A είναι κλειστό ως προς την $\|\cdot\|'$.

Η αντίστροφη συνεπαγωγή αποδεικνύεται εντελώς ανάλογα. □

Οι δύο αυτές Προτάσεις οδηγούν στο εξής:

Θεώρημα 4.1.3. *Δύο ισοδύναμες νόρμες στον γραμμικό χώρο X ορίζουν την ίδια τοπολογία στον X.*

Απόδειξη: Ένα $A \subseteq X$ είναι ανοιχτό ως προς την $\|\cdot\|$ αν και μόνο αν είναι ανοιχτό ως προς την $\|\cdot\|'$ (γιατί;). □

Αυτό που μπορεί να δείξει κανείς είναι ότι, σε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης οποιεσδήποτε δύο νόρμες είναι ισοδύναμες:

Θεώρημα 4.1.4. *Έστω X γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Αν $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ είναι δύο νόρμες στον X, τότε υπάρχουν $a, b > 0$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$,*

$$a\|x\| \leq \|x\|' \leq b\|x\|.$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $\dim X = n$, και έστω $\{e_1, \ldots, e_n\}$ μια βάση του X. Από το Λήμμα 4.1.1 (το εφαρμόζουμε για την $\|\cdot\|$ *και* για την $\|\cdot\|'$), υπάρχουν c, c' τέτοια ώστε, για κάθε $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$c\sum_{i=1}^{n}|a_i| \leq \|a_1e_1 + \cdots + a_ne_n\|,$$

και

$$c'\sum_{i=1}^{n}|a_i| \leq \|a_1e_1 + \cdots + a_ne_n\|'.$$

Έστω $x \in X$. Υπάρχουν $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $x = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \|a_1e_1 + \cdots + a_ne_n\| \leq \sum_{i=1}^{n}|a_i|\ \|e_i\| \\
&\leq \left(\max_{i\leq n}\|e_i\|\right)\sum_{i=1}^{n}|a_i| \\
&\leq \frac{\max\|e_i\|}{c'}c'\sum_{i=1}^{n}|a_i| \\
&\leq \frac{\max\|e_i\|}{c'}\|a_1e_1 + \cdots + a_ne_n\|' \\
&= \frac{1}{a}\|x\|',
\end{aligned}$$

όπου $a = c'/\max\|e_i\|$. Όμοια,

$$\|x\|' = \|a_1e_1 + \cdots + a_ne_n\|' \leq \frac{\max\|e_i\|'}{c}\|x\| = b\|x\|.$$

Άρα το ζητούμενο ισχύει με

$$a = \frac{c'}{\max\|e_i\|} \quad , \quad b = \frac{\max\|e_i\|'}{c}. \quad \square$$

Το Θεώρημα 4.1.4 μας λέει λοιπόν ότι σε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης, όλες οι νόρμες επάγουν *την ίδια τοπολογία*: ένα σύνολο είναι ανοιχτό ως προς όλες τις δυνατές νόρμες στον X ή δεν είναι ανοιχτό για καμμία απ' αυτές.

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με ένα παράδειγμα νορμών που *δεν* είναι ισοδύναμες. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο c_{00} των ακολουθιών $x = (\xi_k)$ που έχουν πεπερασμένους το πλήθος μη μηδενικούς όρους. Δηλαδή,

$$x \in c_{00} \Longleftrightarrow \exists n_x \in \mathbb{N} : \forall k > n_x, \quad \xi_k = 0.$$

Ορίζουμε δύο νόρμες στον c_{00}:

$$\|x\|_\infty = \max\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\} \quad , \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|.$$

Προφανώς, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$. Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει $b > 0$ τέτοιος ώστε

$$\forall x \in X, \qquad \|x\|_1 \leq b\|x\|_\infty.$$

Αν υπήρχε τέτοιος b, θέτοντας $x_n = (1, \ldots, 1, 0, \ldots)$ θα είχαμε

$$n = \|x_n\|_1 \leq b\|x_n\|_\infty = b,$$

κι αυτό για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άτοπο. Ο X είναι βέβαια απειροδιάστατος.

4.2 Συμπάγεια και πεπερασμένη διάσταση

Ο ορισμός της συμπάγειας που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αυτός της *ακολουθιακής συμπάγειας*: Έστω X χώρος με νόρμα. Ένα μη κενό υποσύνολο M του X λέγεται *συμπαγές* αν για κάθε ακολουθία (x_m) στο M υπάρχουν $x \in M$ και υπακολουθία (x_{k_m}) της (x_m) τέτοια ώστε $\|x - x_{k_m}\| \to 0$.

Πρόταση 4.2.1. *Αν το M είναι συμπαγές, τότε είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη: (α) Το M είναι κλειστό: έστω $x \in \overline{M}$. Υπάρχει (x_m) στο M με $x_m \to x$. Αφού το M είναι συμπαγές, υπάρχουν $y \in M$ και $x_{k_m} \to y$. Αφού όμως $x_m \to x$, θα πρέπει $x_{k_m} \to x$. Άρα, $x = y \in M$. Δηλαδή, $\overline{M} \subseteq M$.

(β) Θα δείξουμε ότι υπάρχει $A > 0$ τέτοιος ώστε $\|x\| \leq A$ για κάθε $x \in M$. Αλλιώς υπάρχουν $x_m \in M$, $m \in \mathbb{N}$, με $\|x_m\| > m$. Από συμπάγεια, υπάρχουν $x \in M$ και $x_{k_m} \to x$. Τότε, $\|x_{k_m}\| \to \|x\|$. Όμως, από την επιλογή των x_m, $\|x_{k_m}\| \to \infty$. Άτοπο. □

Το αντίστροφο της Πρότασης 4.2.1 δεν είναι σωστό. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το $M = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ στον ℓ_1. Αν $n \neq m$, τότε $\|e_n - e_m\|_1 = 2$.

Το M είναι κλειστό και φραγμένο (δείξτε το), αλλά δεν είναι συμπαγές. Η ακολουθία (e_n) στο M δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία: αν είχε, οι όροι της θα έπρεπε να είναι τελικά ο ένας κοντά στον άλλον, ενώ οποιοιδήποτε δύο απ' αυτούς έχουν απόσταση ίση με 2.

Θεώρημα 4.2.1. *Έστω X χώρος πεπερασμένης διάστασης με νόρμα, και έστω $\emptyset \neq M \subseteq X$. Τότε, το M είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη: ($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $\dim X = n$, και έστω $\{e_1, \ldots, e_n\}$ μιά βάση του X. Έστω $x_m = a_1^{(m)}e_1 + \cdots + a_n^{(m)}e_n$, ακολουθία στο M.

Το M είναι φραγμένο, άρα υπάρχει $A > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|a_1^{(m)}e_1 + \cdots + a_n^{(m)}e_n\| = \|x_m\| \leq A, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Από το Λήμμα, υπάρχει $c > 0$ τέτοιος ώστε

$$c\sum_{i=1}^{n} |a_i^{(m)}| \leq \|x_m\| \leq A, \quad m \in \mathbb{N},$$

και, όπως ακριβώς στην απόδειξη του Λήμματος 4.1.1, βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \ldots < k_m < \ldots$ και $a_i \in \mathbb{R}$ τέτοιους ώστε

$$a_1^{(k_m)} \to a_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad a_n^{(k_m)} \to a_n.$$

Ορίζουμε $x = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$. Τότε,

$$\|x - x_{k_m}\| = \Big\|\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_i^{(k_m)})e_i\Big\| \leq \sum_{i=1}^{n}|a_i - a_i^{(k_m)}|\,\|e_i\| \to 0,$$

δηλαδή $x_{k_m} \to x$. Τέλος, $x \in M$ αφού $x_{k_m} \in M$ και το M είναι κλειστό. Κάθε ακολουθία του M έχει συγκλίνουσα (στο M) υπακολουθία, άρα το M είναι συμπαγές. □

Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης, τα συμπαγή είναι ακριβώς τα κλειστά και φραγμένα σύνολα. Στους απειροδιάστατους χώρους αυτό παύει να ισχύει. Και μάλιστα, η μοναδιαία μπάλα B_X ενός απειροδιάστατου χώρου X δεν είναι *ποτέ* συμπαγής. Η απόδειξη αυτού του αποτελέσματος βασίζεται σε ένα γεωμετρικό λήμμα:

Λήμμα του F. Riesz (1918) *Έστω X χώρος με νόρμα, και Y, Z υπόχωροι του X. Υποθέτουμε ότι ο Y είναι κλειστός, γνήσιος υπόχωρος του Z. Τότε, για κάθε $\theta \in (0,1)$ υπάρχει $z \in Z$ τέτοιο ώστε $\|z\| = 1$ και*

$$d(z, Y) = \inf\{\|z - y\| : y \in Y\} \geq \theta.$$

Απόδειξη: Ο Y είναι γνήσιος υπόχωρος του Z, άρα υπάρχει $v \in Z \setminus Y$. Ο Y είναι κλειστός και $v \notin Y$, επομένως υπάρχει $r > 0$ τέτοιος ώστε $D(v, r) \cap Y = \emptyset$. Δηλαδή, $\|v - y\| \geq r$ για κάθε $y \in Y$. Έπεται ότι

$$d(v, Y) = \inf\{\|v - y\| : y \in Y\} = a > 0.$$

Αφού $\theta \in (0,1)$, έχουμε $a/\theta > a$. Άρα, υπάρχει $y_0 \in Y$ τέτοιο ώστε

$$\|v - y_0\| < \frac{a}{\theta}.$$

Ορίζουμε $z = \frac{v - y_0}{\|v - y_0\|}$ (προφανώς $y_0 \neq v$, άρα $\|v - y_0\| \neq 0$.) Τότε, $\|z\| = 1$, και $z \in Z$ γιατί $v, y_0 \in Z$ και ο Z είναι γραμμικός υπόχωρος του X.

Θα δείξουμε ότι $\|z - y\| \geq \theta$ για κάθε $y \in Y$. Πράγματι, αν $y \in Y$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\|z - y\| &= \left\|\frac{v - y_0}{\|v - y_0\|} - y\right\| = \left\|\frac{v - (y_0 + \|v - y_0\|y)}{\|v - y_0\|}\right\| \\
&= \frac{\|v - (y_0 + \|v - y_0\|y)\|}{\|v - y_0\|} \geq \frac{\|v - (y_0 + \|v - y_0\|y)\|}{a/\theta} \\
&\geq \frac{a}{a/\theta} = \theta,
\end{aligned}$$

γιατί $y_0 + \|v - y_0\|y \in Y$ (ο Y είναι υπόχωρος). □

Θεώρημα 4.2.2. *Έστω X χώρος με νόρμα. Ο X έχει πεπερασμένη διάσταση αν και μόνο αν η B_X είναι συμπαγής.*

Απόδειξη: Αν ο X έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε η B_X είναι συμπαγής: έχουμε δεί ότι η B_X είναι πάντα κλειστό και φραγμένο σύνολο, οπότε το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα 4.2.1.

Μένει να δείξουμε ότι αν ο X είναι απειροδιάστατος, τότε η B_X δεν είναι συμπαγής. Θα το δείξουμε κατασκευάζοντας μιά ακολουθία (x_n) στον X με $\|x_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, που ικανοποιεί την

$$n \neq m \Longrightarrow \|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}.$$

(τότε, η (x_n) περιέχεται στην B_X και είναι φανερό ότι δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.)

1. Σαν x_1 επιλέγουμε οποιοδήποτε διάνυσμα του X με $\|x_1\| = 1$.

2. *Επιλογή του x_2:* Ο $Y_1 = \langle x_1 \rangle$ έχει πεπερασμένη διάσταση, άρα είναι κλειστός υπόχωρος του X. Αφού ο X είναι απειροδιάστατος, ο Y_1 είναι γνήσιος υπόχωρος του X. Εφαρμόζουμε το Λήμμα του Riesz με $Y = Y_1$, $Z = X$ και $\theta = \frac{1}{2}$: υπάρχει $x_2 \in X$ με $\|x_2\| = 1$ και $d(x_2, Y_1) \geq 1/2$. Ειδικότερα, αφού $x_1 \in Y_1$, βλέπουμε ότι $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$.

3. *Επαγωγικό βήμα:* Υποθέτουμε ότι έχουν επιλεγεί τα $x_1, \ldots, x_k$ έτσι ώστε $\|x_n - x_m\| \geq 1/2$ αν $n \neq m$, $n, m \in \{1, \ldots k\}$. Ορίζουμε $Y_k = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$. Όπως πριν, ο Y_k έχει πεπερασμένη διάσταση, άρα είναι κλειστός και γνήσιος υπόχωρος του X. Από το Λήμμα του Riesz με $Y = Y_k$, $Z = X$ και $\theta = \frac{1}{2}$, υπάρχει $x_{k+1} \in X$ με $\|x_{k+1}\| = 1$ και $d(x_{k+1}, Y_k) \geq 1/2$. Αφού $x_1, \ldots, x_k \in Y_k$, έπεται ότι

$$\|x_{k+1} - x_j\| \geq \frac{1}{2}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Μαζί με την επαγωγική υπόθεση, αυτό σημαίνει ότι

$$\|x_1\| = \|x_2\| = \ldots = \|x_{k+1}\| = 1,$$

και, αν $n \neq m$ στο $\{1, \ldots, k+1\}$, τότε

$$\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}.$$

Επαγωγικά, ορίζουμε ακολουθία (x_n) με τις ιδιότητες που θέλουμε. $\square$

Ας θυμηθούμε τώρα μερικές εφαρμογές της συμπάγειας στις συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων:

(α) *Αν $T : (X, d) \to (Y, \rho)$ συνεχής συνάρτηση, και $M \subseteq X$ συμπαγές, τότε το $T(M)$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη: Έστω (y_k) ακολουθία στο $T(M)$. Για κάθε k υπάρχει $x_k \in M$ τέτοιο ώστε $T(x_k) = y_k$. Το M είναι συμπαγές, άρα υπάρχουν (x_{k_n}) και $x \in M$ με $x_{k_n} \to x$. Η T είναι συνεχής, άρα $T(x_{k_n}) \to T(x)$. Όμως, $T(x_{k_n}) = y_{k_n}$. Άρα,

$$y_{k_n} \to T(x) \in T(M). \quad \square$$

(β) *Αν $T : (X, d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ συνεχής και $M \subseteq X$ συμπαγές, τότε η T παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο M.*

Απόδειξη: Το $T(M)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα κλειστό και φραγμένο. Αφού είναι φραγμένο έχει sup και inf, και αφού είναι κλειστό, το sup είναι max και το inf είναι min. Δηλαδή, υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $a \leq T(x) \leq b$ για κάθε $x \in M$, και τα a, b είναι τιμές της T στο M: Υπάρχουν $x_1, x_2 \in M$ τέτοια ώστε

$$T(x_1) = a \leq T(x) \leq b = T(x_2)$$

για κάθε $x \in M$. $\square$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.2, πρέπει κανείς να είναι πολύ προσεκτικός με αντίστοιχες προτάσεις για κλειστά και φραγμένα υποσύνολα απειροδιάστατων χώρων: τα κλειστά και φραγμένα δεν είναι πάντα συμπαγή, και η συμπάγεια ήταν πολύ ουσιαστική για την απόδειξη των (α) και (β).

4.3 Ασκήσεις

1. Έστω $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ δύο ισοδύναμες νόρμες στο γραμμικό χώρο X. Δείξτε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $f : B_{(X, \|\cdot\|)} \to B_{(X, \|\cdot\|')}$. Δηλαδή, η f είναι συνεχής, ένα προς ένα και επί, και η f^{-1} είναι συνεχής.

2. (α) Δείξτε ότι για κάθε $1 \leq p < q < +\infty$, ο ℓ_p περιέχεται γνήσια στον ℓ_q, και ο ℓ_q περιέχεται γνήσια στον c_0.

(β) Εξετάστε αν οι νόρμες $\|\cdot\|_p$ και $\|\cdot\|_q$ είναι ισοδύναμες στον ℓ_p $(p < q)$.

(γ) Εξετάστε αν ισχύει $c_0 = \bigcup_{1 \leq p < +\infty} \ell_p$.

3. Δείξτε την εξής παραλλαγή του Λήμματος του Riesz: αν ο Y είναι υπόχωρος του X που έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ και $d(x, Y) = 1$.

Υπόδειξη: Πάρτε $v \in X \backslash Y$. Ο Y είναι κλειστός, άρα $d(v, Y) = a > 0$. Βρείτε $y_n \in Y$ τέτοια ώστε $a \leq \|v - y_n\| < a + \frac{1}{n}$. Η (y_n) περιέχεται σε κατάλληλη κλειστή μπάλα του Y, η οποία είναι *συμπαγής*.

4. Δείξτε ότι ένας μετρικός χώρος (X, d) που έχει άπειρα σημεία και μετρική την διακριτή μετρική, δεν είναι συμπαγής.

5. Αν ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος και το M κλειστό υποσύνολο του X, τότε το M είναι συμπαγές.

6. Κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος.

Υπόδειξη: Θυμηθείτε τον ισοδύναμο ορισμό της συμπάγειας από την «Ανάλυση ΙΙ».

7. Έστω X, Y μετρικοί χώροι, ο X συμπαγής, και $T : X \to Y$ συνεχής, ένα προς ένα και επί. Δείξτε ότι η $T^{-1} : Y \to X$ είναι συνεχής.

8. Στον χώρο $C[0, 1]$ θεωρούμε τη συνήθη νόρμα $\|f\| = \max_{t \in [0,1]} |f(t)|$. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, βρείτε το σύνολο

$$\{g \in K : \|f - g\| = d(f, K)\}.$$

(α) K είναι το σύνολο των σταθερών συναρτήσεων, f τυχούσα στον $C[0, 1]$.

(β) $K = \{ax : a \in \mathbb{R}\}$, f σταθερή.

(γ) $K = \{g \in C[0, 1] : g \geq 0, \int_0^1 g(t)dt \geq g(0) + 1\}$, $f \equiv 0$.

Υποδείξεις - απαντήσεις

1. Οι $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ είναι ισοδύναμες, άρα υπάρχουν $a,b>0$ τέτοιοι ώστε $a\|x\|\leq\|x\|'\leq b\|x\|$ για κάθε $x\in X$.

Ορίζουμε $f:B_{(X,\|\cdot\|)}\to B_{(X,\|\cdot\|')}$ με $f(\vec{0})=\vec{0}$ και

$$f(x)=\frac{\|x\|}{\|x\|'}x,\quad x\neq\vec{0}.$$

(α) Η f είναι καλά ορισμένη: αν $x\in B_{(X,\|\cdot\|)}$, $x\neq\vec{0}$, τότε $\|x\|\leq 1$ άρα

$$\|f(x)\|'=\frac{\|x\|}{\|x\|'}\|x\|'=\|x\|\leq 1,$$

δηλαδή $f(x)\in B_{(X,\|\cdot\|')}$. Αν $x=\vec{0}$, τότε $f(x)=\vec{0}\in B_{(X,\|\cdot\|')}$.

(β) Δείχνουμε πρώτα τη συνέχεια της f: αν $x_n\to x_0$ ως προς την $\|\cdot\|$ και $x_0\neq\vec{0}$, τότε από την ισοδυναμία των νορμών παίρνουμε $\|x_n\|\to\|x_0\|$, $x_n\to x_0$ ως προς την $\|\cdot\|'$ (γιατί;) και $\|x_n\|'\to\|x_0\|'>0$, οπότε από τη συνέχεια του πολλαπλασιασμού ως προς την $\|\cdot\|'$ συμπεραίνουμε ότι

$$f(x_n)=\frac{\|x_n\|}{\|x_n\|'}x_n\to\frac{\|x_0\|}{\|x_0\|'}x_0=f(x_0)$$

ως προς την $\|\cdot\|'$.

Αν $\|x_n\|\to 0$ τότε $\|x_n\|'\to 0$ από την ισοδυναμία των νορμών, και $\|x_n\|/\|x_n\|'\leq 1/a$ αν $x_n\neq\vec{0}$ ή $f(x_n)=\vec{0}$ αν $x_n=\vec{0}$. Σε κάθε περίπτωση,

$$\|f(x_n)\|'\leq\frac{1}{a}\|x_n\|'\leq\frac{b}{a}\|x_n\|\to 0,$$

δηλαδή $f(x_n)\to\vec{0}=f(\vec{0})$. Έπεται ότι η f είναι συνεχής.

(γ) Η f είναι επί: αν $y\neq\vec{0}$ και $\|y\|'\leq 1$, τότε το $x=(\|y\|'/\|y\|)y$ έχει νόρμα $\|x\|=\|y\|'\leq 1$ και (ελέγξτε το)

$$f(x)=\frac{\|x\|}{\|x\|'}x=y.$$

(δ) Η f είναι ένα προς ένα: αν $f(x)=f(x_1)$ και $x\neq\vec{0}$, τότε $x_1\neq\vec{0}$ (γιατί;) και

$$(*)\qquad\frac{\|x\|}{\|x\|'}x=\frac{\|x_1\|}{\|x_1\|'}x_1.$$

Αυτό σημαίνει ότι τα x,x_1 είναι συγγραμμικά και μάλιστα $x=tx_1$, $t>0$. Άρα, η $(*)$ παίρνει τη μορφή

$$\frac{\|x\|}{\|x\|'}x=\frac{t\|x\|}{t\|x\|'}tx\Longrightarrow x=tx\Longrightarrow t=1,$$

οπότε $x_1=x$. Αν πάλι $x=\vec{0}$ και $f(x_1)=f(\vec{0})=\vec{0}$, είναι φανερό ότι $x_1=\vec{0}=x$.

(ε) Η $f^{-1}:B_{(X,\|\cdot\|')}\to B_{(X,\|\cdot\|)}$ ορίζεται από την

$$f^{-1}(y)=\frac{\|y\|'}{\|y\|}y.$$

Όπως στο (β) δείχνουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής. Άρα, η f είναι ομοιομορφισμός.

2. (α) Έστω $x=(\xi_k)\in\ell_p$. Τότε $\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p<+\infty$, άρα $|\xi_k|\to 0$. Για μεγάλα k έχουμε $0\leq|\xi_k|<1$ και αφού $p<q$ βλέπουμε ότι $0\leq|\xi_k|^q\leq|\xi_k|^p$. Από κριτήριο σύγκρισης $\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^q<+\infty$, δηλαδή $x\in\ell_q$. Άρα, $\ell_p\subseteq\ell_q$.

Ο εγκλεισμός είναι γνήσιος. Το $x=(1/k^{1/p})\in\ell_q\setminus\ell_p$ (γιατί;).

(β) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $x_n=(1,\dots,1,0,\dots)$ (n μονάδες και μετά μηδενικά). Τότε,

$$\frac{\|x_n\|_p}{\|x_n\|_q}=\frac{n^{1/p}}{n^{1/q}}=n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\to+\infty$$

όταν $n\to\infty$. Δηλαδή, δεν υπάρχει $b>0$ τέτοιο ώστε $\|x\|_p\leq b\|x\|_q$ για κάθε $x\in\ell_p$. Άρα, οι δύο νόρμες δεν είναι ισοδύναμες.

(γ) Παίρνουμε $\xi_k = \frac{1}{\ln(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$. Τότε, $\xi_k \to 0$ όταν $k \to \infty$, όμως το κριτήριο συμπύκνωσης δείχνει ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(k+1)]^p} = +\infty$$

για κάθε $p \geq 1$. Άρα $x = (\frac{1}{\ln(k+1)})_{k\in\mathbb{N}} \in c_0 \setminus \cup_{p\geq 1} \ell_p$.

3. Έστω $v \in X \setminus Y$. Αφού ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση, είναι κλειστός υπόχωρος του X, και αφού $v \notin Y$ έχουμε $d(v, Y) = a > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $y_n \in Y$ με την ιδιότητα

$$a \leq \|v - y_n\| < a + \frac{1}{n}$$

(θυμηθείτε τον ορισμό της $d(v, Y)$). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\|y_n - y_1\| \leq \|y_n - v\| + \|v - y\| < 2a + 1 + \frac{1}{n} \leq 2a + 2.$$

Δηλαδή, η ακολουθία (y_n) περιέχεται στην $B(y_1, 2a + 2)$ που είναι συμπαγές σύνολο γιατί ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση. Άρα, υπάρχει υπακολουθία (y_{k_n}) της (y_n) με $y_{k_n} \to y \in Y$.

Τότε, $\|v - y\| = \lim \|v - y_n\| = a$. Δηλαδή, υπάρχει πλησιέστερο προς το v σημείο του Y. Συνεχίζουμε όπως στην απόδειξη του Λήμματος του Riesz. Ορίζουμε $x = \frac{1}{a}(v - y)$. Τότε $\|x\| = 1$ και για κάθε $z \in Y$

$$\|x - z\| = \|\frac{v - y}{a} - z\| = \|\frac{v - (y + az)}{a}\| = \frac{\|v - (y + az)\|}{a} \geq \frac{d(v, Y)}{a} = 1,$$

γιατί $y + az \in Y$ (ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X). Δείξαμε ότι $d(x, Y) \geq 1$ και αφού $d(x, Y) \leq \|x - \vec{0}\| = \|x\| = 1$, έχουμε $d(x, Y) = 1$.

4. Υπάρχει ακολουθία (x_n) στον X με $x_i \neq x_j$ αν $i \neq j$ (ο μετρικός μας χώρος έχει άπειρα σημεία). Η (x_n) δεν μπορεί να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία: αν (x_{k_n}) είναι οποιαδήποτε υπακολουθία της (x_n), τότε για κάθε $n \neq m$ έχουμε $d(x_{k_n}, x_{k_m}) = 1$ (γιατί;), οπότε η (x_{k_n}) δεν είναι Cauchy (άρα, δεν συγκλίνει). Βρήκαμε ακολουθία στον X που δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Άρα, ο X δεν είναι συμπαγής.

5. Έστω (x_n) ακολουθία στο M. Αφού $x_n \in X$ και ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) και $x \in X$ τέτοια ώστε $x_{k_n} \to x$. Όμως $x_{k_n} \in M$ και το M είναι κλειστό, άρα $x \in M$. Αυτό αποδεικνύει ότι το M είναι συμπαγές (γιατί;).

6. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να γράφουμε

$$X = \bigcup_{x\in X} D(x, 1/n).$$

Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $x_{n1}, \ldots, x_{nk(n)} \in X$ τέτοια ώστε

$$X = D(x_{n1}, 1/n) \cup \ldots \cup D(x_{nk(n)}, 1/n).$$

Ορίζουμε $M = \{x_{nj} : n \in \mathbb{N}, j = 1, \ldots, k(n)\}$. Το M είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων. Θα δείξουμε ότι είναι πυκνό στον X.

Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $1/n < \varepsilon$ και υπάρχει $j \leq k(n)$ τέτοιο ώστε $x \in D(x_{nj}, 1/n)$. Τότε, $x_{nj} \in M$ και $d(x, x_{nj}) < 1/n < \varepsilon$, δηλαδή $D(x, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$. Άρα το M είναι πυκνό και, αφού το M είναι αριθμήσιμο, ο X είναι διαχωρίσιμος.

7. Έστω ότι η $T^{-1} : Y \to X$ δεν είναι συνεχής σε κάποιο y_0. Τότε υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και $y_n \to y_0$ τέτοια ώστε $d(T^{-1}y_n, T^{-1}y_0) \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τα $x_n = T^{-1}y_n$ και $x_0 = T^{-1}y_0 \in X$.

Ο X είναι συμπαγής, άρα υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) με $x_{k_n} \to w \in X$. Από τη συνέχεια της T παίρνουμε $y_{k_n} = Tx_{k_n} \to Tw$. Αφού $y_n \to y_0$, έχουμε $y_{k_n} \to y_0$, άρα $y_0 = Tw$. Δηλαδή,

$$x_{k_n} = T^{-1}y_{k_n} \to w = T^{-1}y_0.$$

Αυτό είναι άτοπο, γιατί $d(T^{-1}y_{k_n}, T^{-1}y_0) \geq \varepsilon$ για κάθε n. Το άτοπο δείχνει ότι η T^{-1} είναι συνεχής.

8. (α) Έστω $f \in C[0, 1]$ και $M = \max\{f(t) : 0 \leq t \leq 1\}$, $m = \min\{f(t) : 0 \leq t \leq 1\}$. Αν $g \in K$, τότε $g(x) = c \in \mathbb{R}$ στο $[0, 1]$. Διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις:

1. $c \leq m \Longrightarrow \|f-g\| = M - c \geq M - m$.

2. $c \geq M \Longrightarrow \|f-g\| = c - m \geq M - m$.

3. $m \leq c \leq M \Longrightarrow \|f-g\| = \max\{M-c, c-m\} \geq \frac{M-m}{2}$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι $d(f,K) = \frac{M+m}{2} = d(f,g_0)$ όπου $g_0(x) = \frac{M+m}{2}$ στο $[0,1]$.

(β) Έστω $f(x) = c$, $x \in [0,1]$. Τότε, για κάθε $g(x) = ax$ στο K έχουμε $\|f-g\| = \max_{0\leq x\leq 1} |c - ax|$.

1. Αν $c \geq 0$, τότε όλες οι $g(x) = ax$ με $0 \leq a \leq 2c$ ικανοποιούν την $\|f-g\| = c = d(f,K)$.

2. Αν $c < 0$, τότε όλες οι $g(x) = ax$ με $2c \leq a \leq 0$ ικανοποιούν την $\|f-g\| = |c| = d(f,K)$.

(γ) Αν $g \in K$, τότε $\|g-f\| = \max_{0\leq x\leq 1} |g(x)| = \max_{0\leq x\leq 1} g(x)$. Όμως,

$$(*) \qquad 1 \leq g(0) + 1 \leq \int_0^1 g(t)dt \leq \max_{0\leq x\leq 1} g(x).$$

Άρα $\|g-f\| \geq 1$, και αφού η $g \in K$ ήταν τυχούσα, $d(f,K) \geq 1$. Έστω ότι υπάρχει $g \in K$ για την οποία $\|g-f\| = 1$. Τότε έχουμε ισότητα στην $(*)$, άρα $0 \leq g \leq 1$ και $\int_0^1 g(t)dt = g(0) + 1 = 1$, οπότε η g είναι συνεχής συνάρτηση με $g(0) = 0$, $0 \leq g \leq 1$ και $\int_0^1 g(t)dt = 1$, το οποίο είναι άτοπο (γιατί;).

Από την άλλη πλευρά, $d(f,K) = 1$. Πράγματι, για κάθε μικρό $\varepsilon > 0$ ορίζουμε g_ε με $g_\varepsilon(0) = 0$, $g \equiv 1 + \delta$ στο $[\varepsilon, 1]$ και g_ε γραμμική στο $[0,\varepsilon]$. Αν $\delta = \frac{\varepsilon/2}{1-(\varepsilon/2)}$, τότε $\int_0^1 g_\varepsilon(t)dt = 1$. Άρα, $g_\varepsilon \in K$ και

$$\|g-f\| = 1 + \delta = 1 + \frac{\varepsilon/2}{1-(\varepsilon/2)}.$$

Έπεται ότι

$$d(f,K) \leq \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(1 + \frac{\varepsilon/2}{1-(\varepsilon/2)}\right) = 1.$$

Άρα $d(f,K) = 1$, αλλά δεν υπάρχει $g \in K$ με την ιδιότητα $\|f-g\| = d(f,K)$.

Κεφάλαιο 5

Τελεστές και συναρτησοειδή

5.1 Φραγμένοι γραμμικοί τελεστές

Έστω X και Y δύο χώροι με νόρμα. *Γραμμικός τελεστής* από τον X στον Y είναι μια απεικόνιση $T : X \to Y$ που ικανοποιεί την

$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda T(x_1) + \mu T(x_2)$$

για κάθε $x_1, x_2 \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Για συντομία θα γράφουμε Tx_1, Tx_2 κλπ, αντί για $T(x_1), T(x_2)$.

Ο *πυρήνας* του T είναι το σύνολο $\mathrm{Ker}(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$, και η *εικόνα* του T είναι το σύνολο $\mathcal{R}(T) = \{y \in Y | \exists x \in X : Tx = y\} = \{Tx : x \in X\}$. Ο πυρήνας και η εικόνα ενός γραμμικού τελεστή $T : X \to Y$ είναι γραμμικοί υπόχωροι των X και Y αντίστοιχα.

Οι X και Y έχουν τοπολογία που επάγεται από τις νόρμες τους, μας ενδιαφέρει λοιπόν να δούμε πότε ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ είναι *συνεχής*. Ξεκινάμε με τον ορισμό του *φραγμένου* τελεστή:

Ορισμοί (α) Έστω X και Y χώροι με νόρμα. Ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται *φραγμένος* αν υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$(*) \qquad \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$$

για κάθε $x \in X$ (χωρίς κίνδυνο σύγχυσης, στο εξής θα γράφουμε απλώς $\|\cdot\|$ και για τις δύο νόρμες.)

(β) Αν ο T είναι φραγμένος, ορίζουμε τη *νόρμα* $\|T\|$ του T σαν τη μικρότερη σταθερά c για την οποία η $(*)$ ισχύει για κάθε $x \in X$.

• Αυτό το min υπάρχει: θεωρούμε το σύνολο

$$C_T = \{c \geq 0 : \forall x \in X,\ \|Tx\| \leq c\|x\|\}.$$

Αν ο T είναι φραγμένος, αυτό το σύνολο είναι μη κενό και κάτω φραγμένο από το 0. Άρα, ορίζεται το $\inf C_T$ και ισχύει $\inf C_T \in C_T$ γιατί το C_T είναι κλειστό (άσκηση). Άρα, η

$$\|T\| = \min\{c \geq 0 : \forall x \in X,\ \ \|Tx\| \leq c\|x\|\}$$

ορίζεται καλά, και ικανοποιεί την

$$\|Tx\| \leq \|T\|\ \|x\|, \quad x \in X.$$

Ένας άλλος, εξίσου χρήσιμος, τρόπος ορισμού της νόρμας του T δίνεται από την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 5.1.1. *Έστω $T : X \to Y$ φραγμένος τελεστής. Τότε,*

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x \in B_X} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Απόδειξη: Αν $x \neq 0$, τότε το $y = x/\|x\|$ έχει νόρμα $\|y\| = 1$. Άρα,

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \|Ty\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Αφού το $x \neq 0$ ήταν τυχόν, και αφού $\{x : \|x\| = 1\} \subseteq B_X$,

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leq \sup_{x\in B_X} \|Tx\|. \tag{1}$$

Από την άλλη πλευρά, αν $x \in B_X \setminus \{0\}$, τότε

$$\|Tx\| \leq \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

άρα

$$\sup_{x\in B_X} \|Tx\| \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι τα τρία sup της Πρότασης είναι ίσα.

Από τον ορισμό της νόρμας έχουμε $\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\| \leq \|T\|$ για κάθε $x \in B_X$, επομένως

$$\sup_{x\in B_X} \|Tx\| \leq \|T\|. \tag{3}$$

Τέλος, αφού η $\|T\|$ είναι η μικρότερη σταθερά για την οποία $\|Tx\| \leq c\|x\|$ για κάθε $x \in X$, και αφού

$$\|Tw\| \leq \left(\sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right) \|w\|$$

για κάθε $w \in X$, έχουμε

$$\|T\| \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \tag{4}$$

Η πρώτη ισότητα της Πρότασης έπεται τώρα από τις (3) και (4). □

Η επόμενη Πρόταση δικαιολογεί τον όρο «νόρμα τελεστή»:

Πρόταση 5.1.2. *Έστω $B(X,Y)$ το σύνολο των φραγμένων τελεστών $T : X \to Y$. Το $B(X,Y)$ είναι γραμμικός χώρος, και η $\|\cdot\| : B(X,Y) \to \mathbb{R}$ με $T \to \|T\|$ είναι νόρμα.*

Απόδειξη: Αν $T, S : X \to Y$ φραγμένοι τελεστές και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

(α) $\|(\lambda T)x\| = \|\lambda Tx\| = |\lambda|\,\|Tx\| \leq |\lambda|\,\|T\|\,\|x\|$, δηλαδή ο λT είναι φραγμένος και $\|\lambda T\| \leq |\lambda|\,\|T\|$. Επιπλέον,

$$\|\lambda T\| = \sup_{\|x\|=1} \|\lambda Tx\| = \sup_{\|x\|=1} |\lambda|\,\|Tx\| = |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = |\lambda|\,\|T\|.$$

Άρα, ικανοποιείται το (N3).

(β) $\|(T+S)x\| = \|Tx+Sx\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \leq \|T\|\,\|x\| + \|S\|\,\|x\| = (\|T\| + \|S\|)\,\|x\|$, δηλαδή ο $T+S$ είναι φραγμένος, και

$$\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|.$$

Έπεται το (N4), και το ότι ο $B(X,Y)$ είναι γραμμικός χώρος (σε συνδυασμό με το προηγούμενο).

Τέλος $\|T\| \geq 0$ (προφανές), και αν $\|T\| = 0$, τότε $0 \leq \|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\| = 0$ για κάθε $x \in X$, δηλαδή $\|Tx\| = 0 \Longrightarrow Tx = 0$ για κάθε $x \in X$. Άρα, $\|T\| = 0 \Longrightarrow T \equiv 0$. □

Παραδείγματα (α) Η *ταυτοτική απεικόνιση* $I : X \to X$ είναι φραγμένος τελεστής, και

$$\|I\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ix\| = \sup_{\|x\|=1} \|x\| = 1.$$

(β) Θεωρούμε το γραμμικό χώρο $P[0,1]$ των πολυωνύμων $p : [0,1] \to \mathbb{R}$, και ορίζουμε $T : P[0,1] \to P[0,1]$ με $Tp = p'$ (η παράγωγος πολυωνύμου είναι πολυώνυμο, άρα ο T ορίζεται καλά.)

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής:

$$T(\lambda p + \mu q) = (\lambda p + \mu q)' = \lambda p' + \mu q' = \lambda Tp + \mu Tq.$$

Όμως ο T δεν είναι φραγμένος: έστω $p_n(t) = t^n$. Στον $P[0,1]$ θεωρούμε ως συνήθως την $\|p\| = \max_{t\in[0,1]} |p(t)|$, άρα $\|p_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Αλλά $p_n'(t) = nt^{n-1}$, άρα $\|p_n'\| = n$. Έπεται ότι

$$\sup_{\|p\|=1} \|Tp\| \geq \|Tp_n\| = \|p_n'\| = n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα ο T δεν είναι φραγμένος (γιατί;).

(γ) *Ολοκληρωτικοί τελεστές.* Θεωρούμε τον $C[0,1]$ με νόρμα την

$$\|f\| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|,$$

και μια συνεχή συνάρτηση

$$K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}.$$

Ορίζουμε $T : C[0,1] \to C[0,1]$ με

$$(Tf)(t) = \int_0^1 K(t,s) f(s) ds.$$

Η K λέγεται *πυρήνας* του T. Πρέπει να δείξουμε ότι ο T είναι καλά ορισμένος, δηλαδή ότι η Tf είναι συνεχής: έχουμε

$$\begin{aligned} |(Tf)(t) - (Tf)(t')| &= \left| \int_0^1 \{K(t,s) - K(t',s)\} f(s) ds \right| \\ &\leq \int_0^1 |K(t,s) - K(t',s)|\, |f(s)| ds \\ &\leq \|f\| \int_0^1 |K(t,s) - K(t',s)| ds. \end{aligned}$$

Όμως, η K είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1] \times [0,1]$, άρα αν μάς δώσουν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε

$$|t - t'| < \delta \Longrightarrow \forall s,\ |K(t,s) - K(t',s)| < \varepsilon.$$

Άρα,

$$|t - t'| < \delta \Longrightarrow |(Tf)(t) - (Tf)(t')| \leq \|f\|\varepsilon,$$

κι αυτό αποδεικνύει τη συνέχεια της Tf. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα. Για να δείξουμε ότι ο T είναι φραγμένος, παρατηρούμε ότι λόγω συνέχειας του πυρήνα K υπάρχει $M > 0$ με την ιδιότητα $|K(t,s)| \leq M$ για κάθε $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$, οπότε

$$\begin{aligned} |(Tf)(t)| &= \left| \int_0^1 K(t,s) f(s) ds \right| \leq \int_0^1 |K(t,s)||f(s)| ds \\ &\leq M\|f\| \int_0^1 ds = M\|f\| \end{aligned}$$

για κάθε $t \in [0,1]$, άρα $\|Tf\| \leq M\|f\|$.

Η Πρόταση που ακολουθεί περιγράφει τους φραγμένους γραμμικούς τελεστές που ορίζονται σε χώρους πεπερασμένης διάστασης:

Θεώρημα 5.1.1. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $\dim X = n < \infty$, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Τότε, ο T είναι φραγμένος.*

Απόδειξη: Έστω $\{e_1, \ldots, e_n\}$ μια βάση του X. Από το βασικό Λήμμα του Κεφαλαίου 4, αν $x = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n \in X$, τότε

$$c\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \|a_1e_1 + \cdots + a_ne_n\| = \|x\|,$$

όπου $c > 0$ σταθερά που εξαρτάται μόνο από τη νόρμα και τη βάση του X. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\|Tx\| &= \Big\|T\Big(\sum_{i=1}^{n} a_ie_i\Big)\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_iTe_i\Big\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|\ \|Te_i\| \leq \left(\max_{1\leq i\leq n} \|Te_i\|\right) \sum_{i=1}^{n} |a_i| \\
&\leq \frac{\max \|Te_i\|}{c}\|x\|.
\end{aligned}$$

Άρα ο T είναι φραγμένος, με $\|T\| \leq (\max_i \|Te_i\|)/c$. □

Φυσιολογικά, ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ θα λέγεται *συνεχής* αν για κάθε $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|Tx - Tx_0\| < \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, αν: $x_n \to x$ στον $X \Longrightarrow Tx_n \to Tx$ στον Y. Θα δείξουμε ότι ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι φραγμένος.

Θεώρημα 5.1.2. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής.*

(α) *Ο T είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι φραγμένος.*

(β) *Αν ο T είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε είναι παντού συνεχής.*

Απόδειξη: (α) Έστω ότι ο T είναι συνεχής. Τότε, είναι συνεχής στο 0. Παίρνοντας $\varepsilon = 1 > 0$, βρίσκουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|x\| < \delta \Longrightarrow \|Tx\| < 1.$$

Όμως τότε, για κάθε $y \neq 0$ θεωρούμε το $\delta y/2\|y\|$ (που έχει νόρμα μικρότερη από δ), και γράφουμε

$$\left\|T\left(\frac{\delta y}{2\|y\|}\right)\right\| < 1 \Longrightarrow \|Ty\| < \frac{2}{\delta}\|y\|.$$

Έπεται ότι ο T είναι φραγμένος, και $\|T\| \leq \frac{2}{\delta}$.

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι ο T είναι φραγμένος, και θεωρούμε τυχόν $x_0 \in X$. Αν $x_n \to x_0$, τότε

$$\|Tx_n - Tx_0\| = \|T(x_n - x_0)\| \leq \|T\|\ \|x_n - x_0\| \to 0,$$

άρα $Tx_n \to Tx_0$. Δηλαδή, ο T είναι συνεχής.

(β) Υποθέτουμε ότι ο T είναι συνεχής στο x_0. Έστω $y_0 \in X$ και $y_n \to y_0$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $Ty_n \to Ty_0$. Όμως, $y_n - y_0 + x_0 \to x_0$ (γιατί;), άρα

$$T(y_n - y_0 + x_0) = Ty_n - Ty_0 + Tx_0 \to Tx_0,$$

απ' όπου έπεται η $Ty_n \to Ty_0$. □

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με μερικές απλές παρατηρήσεις πάνω στους φραγμένους τελεστές:

1. Αν ο $T : X \to Y$ είναι φραγμένος, τότε ο $\mathrm{Ker}T$ είναι *κλειστός* υπόχωρος του X.

2. Αν ο $T : X \to Y$ είναι φραγμένος, και X' είναι ένας υπόχωρος του X, τότε ο περιορισμός του T στον X' είναι φραγμένος τελεστής.

3. Έστω Y χώρος Banach, και $T_0 : X_0 \to Y$ φραγμένος τελεστής που ορίζεται σ' έναν πυκνό υπόχωρο X_0 του X. Τότε, ο T_0 επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε φραγμένο τελεστή $T : X \to Y$ με $\|T\| = \|T_0\|$.

Η απόδειξη αυτών των ισχυρισμών αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη.

5.2 Γραμμικά συναρτησοειδή

Έστω X γραμμικός χώρος. *Συναρτησοειδές* είναι ένας γραμμικός τελεστής $F : X \to \mathbb{R}$. Αν ο X είναι χώρος με νόρμα, τότε το συναρτησοειδές F λέγεται *φραγμένο* αν είναι φραγμένος τελεστής από τον $(X, \|\cdot\|)$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Επομένως, ό,τι αποδείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο μεταφέρεται αυτούσιο εδώ:

Θεώρημα 5.2.1. *Έστω X χώρος με νόρμα, και $F : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές. Το F είναι φραγμένο αν υπάρχει $c > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $x \in X$,*

$$|F(x)| \leq c\|x\|.$$

Η νόρμα του F είναι η μικρότερη τέτοια σταθερά, και ισούται με

$$\|F\| = \sup_{\|x\|=1} |F(x)|. \quad \square$$

Παραδείγματα (α) Η νόρμα του χώρου $X \neq \{0\}$, $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ *δεν* είναι γραμμικό συναρτησοειδές. Αν ήταν, θα είχαμε $\|x\| + \|-x\| = \|x + (-x)\|$, δηλαδή $2\|x\| = 0$ για κάθε $x \in X$.

(β) Θεωρούμε τον $X = \mathbb{R}^n$, και σταθεροποιούμε $a = (a_1, \ldots, a_n) \in X \backslash \{0\}$. Ορίζουμε $F : X \to \mathbb{R}$, με

$$F(x) = F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n.$$

Η F είναι γραμμικό συναρτησοειδές (το «εσωτερικό γινόμενο» με το a). Αν στον $\mathbb{R}^n$ θεωρήσουμε την Ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|$, τότε από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\begin{aligned} |F(x)| &= |a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2\right)^{1/2} \\ &= \|a\|\,\|x\|. \end{aligned}$$

Δηλαδή, το F είναι φραγμένο συναρτησοειδές, και $\|F\| \leq \|a\|$. Επιπλέον,

$$|F(a)| = a_1^2 + \cdots + a_n^2 = \|a\|^2,$$

άρα

$$\|F\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|F(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|F(a)|}{\|a\|} = \|a\|.$$

Δηλαδή, $\|F\| = \|a\|$.

(γ) Ορίζουμε $F : C[a,b] \to \mathbb{R}$ με $F(g) = \int_a^b g(t)dt$. Το F είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον $C[a,b]$, και

$$|F(g)| \leq \int_a^b |g(t)|dt \leq \left(\max_{t\in[a,b]} |g(t)|\right)(b-a) = (b-a)\|g\|.$$

Άρα, το F είναι φραγμένο και $\|F\| \leq b-a$. Αν πάρουμε σαν g_0 τη σταθερή συνάρτηση $g_0(t) = 1$, τότε $\|g_0\| = 1$ και

$$\|F\| = \sup_{\|g\|=1} |F(g)| \geq |F(g_0)| = b-a.$$

Άρα, $\|F\| = b - a$.

(δ) Θεωρούμε πάλι τον $X = C[a,b]$ με νόρμα την $\|g\| = \max_{t\in[a,b]} |g(t)|$, σταθεροποιούμε κάποιο $t_0 \in [a,b]$, και ορίζουμε $F : C[a,b] \to \mathbb{R}$ με $F(g) = g(t_0)$.

Η F είναι γραμμικό συναρτησοειδές, και $|F(g)| = |g(t_0)| \leq \|g\|$. Άρα, $\|F\| \leq 1$. Παίρνοντας $g_0 \equiv 1$, ελέγχουμε ότι $\|F\| = 1$.

Ορισμός Έστω X χώρος με νόρμα. Ο *δυϊκός χώρος* του X είναι ο γραμμικός χώρος X^* των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών $F : X \to \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$X^* = B(X, \mathbb{R}).$$

Ο X^* είναι μη κενός: η $F : X \to \mathbb{R}$ με $F(x) = 0$ για κάθε $x \in X$, είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Τα παραδείγματα που προηγήθηκαν δείχνουν ότι αν π.χ. $X = \mathbb{R}^n$ ή $C[a,b]$, τότε ο X^* είναι πολύ «πλουσιότερος» από το $\{0\}$. Στην πραγματικότητα, για κάθε χώρο X με νόρμα, ο X^* περιέχει πολλά μη τετριμμένα φραγμένα συναρτησοειδή. Αυτό όμως απαιτεί αρκετή δουλειά (Θεώρημα Hahn-Banach).

Ορισμός Έστω X γραμμικός χώρος, και W γραμμικός υπόχωρος του X. Ορίζουμε το *χώρο πηλίκο* X/W σα γραμμικό χώρο ως εξής: ορίζουμε πρώτα μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στον X, θέτοντας

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in W.$$

Τότε, ο X/W είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας $[x] = x + W$ με πράξεις τις $\lambda[x] = [\lambda x]$ και $[x] + [y] = [x+y]$. Παρατηρήστε ότι $[x] = 0$ αν και μόνο αν $x \in W$.

Λέμε ότι ο W έχει *συνδιάσταση* 1 στον X αν για το χώρο πηλίκο X/W έχουμε $\dim(X/W) = 1$. Αν ο W έχει συνδιάσταση 1 και $x_0 \in X$, τότε το $x_0 + W$ λέγεται *υπερεπίπεδο.*

Η Πρόταση που ακολουθεί, δίνει τη σχέση ανάμεσα σε υποχώρους συνδιάστασης 1 και γραμμικά συναρτησοειδή:

Πρόταση 5.2.1. *Έστω X γραμμικός χώρος, και W γραμμικός υπόχωρος του X. Ο W έχει συνδιάσταση 1 αν και μόνο αν υπάρχει μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ με $\mathrm{Ker}f = W$. Δύο γραμμικά συναρτησοειδή f, g έχουν τον ίδιο πυρήνα αν και μόνο αν υπάρχει $\beta \neq 0$ τέτοιο ώστε $g = \beta f$.*

Απόδειξη: Έστω $f : X \to \mathbb{R}$, $f \neq 0$ γραμμικό συναρτησοειδές. Ο πυρήνας $W = \mathrm{Ker}f$ του f είναι γραμμικός υπόχωρος του X, και η $\tilde{f} : X/W \to \mathbb{R}$ με $\tilde{f}(x+W) = f(x)$ είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων (γιατί;). Άρα, $\dim(X/W) = 1$.

Αντίστροφα, αν ο W έχει συνδιάσταση 1 στον X, τότε υπάρχει ισομορφισμός $T : X/W \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = T(x+W)$. Το f είναι γραμμικό συναρτησοειδές, $f \neq 0$, και $\mathrm{Ker}f = W$.

Για το δεύτερο ισχυρισμό, αν $g = \beta f$, $\beta \neq 0$, τότε προφανώς $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}g$. Αντίστροφα, έστω $f, g : X \to \mathbb{R}$ γραμμικά συναρτησοειδή με $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}g$. Αν $f \equiv 0$, δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε. Έστω λοιπόν $x_0 \in X$ με $f(x_0) = 1$ (υπάρχει, γιατί;). Έπεται ότι $g(x_0) \neq 0$. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$x - f(x)x_0 \in \mathrm{Ker}f \Longrightarrow g(x - f(x)x_0) = 0 \Longrightarrow g(x) = g(x_0)f(x).$$

Δηλαδή, $g = \beta f$, με $\beta = g(x_0)$. □

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε και μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον X.

Πρόταση 5.2.2. *Έστω X χώρος με νόρμα, και έστω W υπόχωρος του X συνδιάστασης 1. Τότε, ένα από τα δύο συμβαίνει: Είτε ο W είναι κλειστός στον X ή ο W είναι πυκνός στον X.*

Απόδειξη: Ο $\overline{W}$ είναι κι αυτός γραμμικός υπόχωρος του X. Αν ο W δεν είναι κλειστός, τότε υπάρχει $x \in \overline{W} \setminus W$, και αφού ο W έχει συνδιάσταση 1 έχουμε $[z] \in \mathrm{span}([x])$ (δηλαδή $z = \lambda x + w$ για κάποια $\lambda \in \mathbb{R}$ και $w \in W$) για κάθε $z \in X$ (γιατί;), άρα $\overline{W} = X$. □

Παρατήρηση: Οι κλειστοί γραμμικοί υπόχωροι συνδιάστασης 1 είναι ακριβώς οι πυρήνες των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών: αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, τότε από τη συνέχεια του f είναι φανερό ότι ο $W = \mathrm{Ker}f = f^{-1}\{0\}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X, και από την Πρόταση 5.2.1 ο W έχει συνδιάσταση 1. Θα αποδείξουμε τον αντίστροφο ισχυρισμό σαν συνέπεια του Θεωρήματος Hahn-Banach.

5.3 Χώροι τελεστών - δυϊκοί χώροι

Έστω X, Y δύο χώροι με νόρμα. Στην Παράγραφο 5.1 είδαμε ότι ο χώρος $B(X,Y)$ των φραγμένων γραμμικών τελεστών $T : X \to Y$ είναι γραμμικός χώρος με νόρμα, όπου

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|, \quad T \in B(X,Y).$$

Το Θεώρημα που ακολουθεί απαντά στο ερώτημα: πότε ο $B(X,Y)$ είναι πλήρης;

Θεώρημα 5.3.1. *Έστω X και Y χώροι με νόρμα. Αν ο Y είναι χώρος Banach, τότε ο $B(X,Y)$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη: Έστω (T_n) ακολουθία Cauchy στον $B(X,Y)$, και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, αν $n, m \geq n_0$ τότε

$$(*) \qquad \|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Σταθεροποιούμε $x \in X$. Αν $n, m \geq n_0$, τότε

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \, \|x\| \leq \varepsilon \|x\|.$$

Αυτό σημαίνει ότι η $(T_n x)$ είναι ακολουθία Cauchy στον Y (γιατί;), και αφού ο Y είναι πλήρης, υπάρχει $y_x \in Y$ τέτοιο ώστε $T_m x \to y_x$ καθώς $m \to \infty$.

Ορίζουμε $T : X \to Y$ με

$$Tx = y_x = \lim_{m\to\infty} T_m x.$$

Ο T είναι γραμμικός τελεστής: αν $x_1, x_2 \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned} T(\lambda x_1 + \mu x_2) &= \lim_{m\to\infty} T_m(\lambda x_1 + \mu x_2) \\ &= \lim_{m\to\infty} (\lambda T_m x_1 + \mu T_m x_2) \\ &= \lambda \lim_{m\to\infty} T_m x_1 + \mu \lim_{m\to\infty} T_m x_2 \\ &= \lambda T x_1 + \mu T x_2. \end{aligned}$$

Επιστρέφουμε στην $(*)$. Έστω $x \in X$ με $\|x\| = 1$. Αν $n, m \geq n_0$, τότε

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \varepsilon \|x\| = \varepsilon,$$

και αφήνοντας το m να πάει στο άπειρο, παίρνουμε

$$\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon, \quad \|x\| = 1,$$

δηλαδή,

$$(**) \qquad \|T_n - T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon.$$

Αυτό δείχνει δύο πράγματα: (α) για κάθε $n \geq n_0$, $T_n - T \in B(X,Y)$, και αφού ο $B(X,Y)$ είναι γραμμικός χώρος και $T_n \in B(X,Y)$,

$$T = T_n - (T_n - T) \in B(X,Y).$$

(β) Από την $(**)$, για κάθε $n \geq n_0(\varepsilon)$ έχουμε $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$. Άρα, $T_n \to T$ στον $B(X,Y)$. $\square$

Πόρισμα 5.3.1. Αν ο X είναι χώρος με νόρμα, τότε ο X^* με νόρμα την $\|F\| = \sup_{\|x\|=1} |F(x)|$ είναι χώρος Banach.

Απόδειξη: Ο X^* είναι ο $B(X,\mathbb{R})$. Ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης ως προς την $|\cdot|$, οπότε το ζητούμενο προκύπτει αμέσως από το Θεώρημα 5.3.1. $\square$

Ορισμός (α) Ο $T : X \to Y$ λέγεται *ισομορφισμός* αν είναι γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής, και οι $T : X \to Y$, $T^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένοι τελεστές.

(β) Ο $T : X \to Y$ λέγεται *ισομετρικός ισομορφισμός* αν είναι ισομορφισμός και, επιπλέον, για κάθε $x \in X$ ισχύει $\|Tx\| = \|x\|$.

Παρατηρήσεις (i) Ο T είναι ένα προς ένα αν και μόνο αν $\mathrm{Ker}T = \{0\}$.

(ii) Αν ο $T : X \to Y$ είναι γραμμικός, ένα προς ένα και επί, και $\|Tx\| = \|x\|$, $x \in X$, τότε ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

Δύο χώροι X και Y με νόρμα λέγονται *ισομετρικά ισομορφικοί* αν υπάρχει ισομετρικός ισομορφισμός $T : X \to Y$. Από τη σκοπιά της Συναρτησιακής Ανάλυσης, δύο τέτοιοι χώροι *ταυτίζονται*: έχουν την ίδια γραμμική και τοπολογική δομή, αφού τα σημεία τους βρίσκονται σε ένα προς ένα αντιστοιχία που διατηρεί τις αποστάσεις και τη γραμμική δομή του χώρου.

Με τη βοήθεια της έννοιας του ισομετρικού ισομορφισμού μπορούμε να δώσουμε πολύ συγκεκριμμένη περιγραφή του δυϊκού χώρου για αρκετά κλασικά παραδείγματα χώρων Banach:

Θεώρημα 5.3.2. *Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^n$ με την Ευκλείδεια νόρμα. Ο δυϊκός του χώρος είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον $\mathbb{R}^n$. Γράφουμε $(\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη: Ορίζουμε $T : (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n$ ως εξής: απεικονίζουμε το $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ στην n-άδα $(f(e_1), \dots, f(e_n)) \in \mathbb{R}^n$, όπου $\{e_1, \dots, e_n\}$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

Παρατηρήστε ότι το f προσδιορίζεται πλήρως από το διάνυσμα $Tf = (f(e_i))_{i\leq n}$: αν $x = (\xi_i) \in \mathbb{R}^n$, τότε $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \Longrightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i f(e_i)$, δηλαδή ξέρουμε το $f(x)$ αν μάς δώσουν τις συντεταγμένες του x.

Δείχνουμε πρώτα ότι ο T είναι γραμμικός, ένα προς ένα και επί:

(α) Για τη γραμμικότητα,

$$\begin{aligned} T(\lambda f + \mu g) &= ((\lambda f + \mu g)(e_1), \dots, (\lambda f + \mu g)(e_n)) \\ &= (\lambda f(e_1) + \mu g(e_1), \dots, \lambda f(e_n) + \mu g(e_n)) \\ &= \lambda(f(e_1), \dots, f(e_n)) + \mu(g(e_1), \dots, g(e_n)) \\ &= \lambda Tf + \mu Tg. \end{aligned}$$

(β) Για το ένα προς ένα,

$$\begin{aligned} Tf = \vec{0} &\Longrightarrow \forall i = 1, \dots, n, \quad f(e_i) = 0 \\ &\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i f(e_i) = 0 \\ &\Longrightarrow f \equiv 0. \end{aligned}$$

(γ) Αν $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε $f(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i a_i$. Τότε, $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ και $f(e_i) = a_i$, $i = 1, \dots, n$. Άρα, $Tf = a$. Αυτό δείχνει ότι ο T είναι επί.

Μένει να δείξουμε ότι ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός. Έστω $f \in (\mathbb{R}^n)^*$. Τότε, $f(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i f(e_i)$, και έχουμε δεί ότι ένα συναρτησοειδές αυτής της μορφής έχει νόρμα

$$\|f\| = \|(f(e_1), \dots, f(e_n))\| = \|Tf\|. \quad \square$$

Θεώρημα 5.3.3. *Ο $(\ell_1)^*$ είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον ℓ_∞.*

Απόδειξη: Ορίζουμε $T : \ell_1^* \to \ell_\infty$ ως εξής: Έστω $e_k = (\delta_{kn})$ και $f : \ell_1 \to \mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Ελέγξτε τους παρακάτω ισχυρισμούς:

(i) Η (e_k) είναι βάση Schauder του ℓ_1, δηλαδή, κάθε $x = (\xi_k) \in \ell_1$ γράφεται (μονοσήμαντα) στη μορφή $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$.

(ii) Το f είναι συνεχές, άρα $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k)$, $x \in X$.

Ορίζουμε $T(f) = (f(e_1), \ldots, f(e_k), \ldots)$. Θα δείξουμε ότι ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

(α) *Ο T είναι καλά ορισμένος.* Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $|f(e_k)| \leq \|f\| \, \|e_k\| = \|f\|$ (γιατί $\|e_k\| = 1$.) Άρα,

$$(*) \qquad \|Tf\|_\infty \leq \|f\|.$$

Ειδικότερα, $Tf \in \ell_\infty$.

(β) Αν $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = 1$, τότε

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \, |f(e_k)| \\ &\leq \left(\sup_k |f(e_k)| \right) \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \|Tf\|_\infty. \end{aligned}$$

Άρα,

$$(**) \qquad \|f\| = \sup_{\|x\|_1 = 1} |f(x)| \leq \|Tf\|_\infty.$$

Από τις $(*)$ και $(**)$, για κάθε $f \in \ell_1^*$ ισχύει $\|Tf\|_\infty = \|f\|$ (δηλαδή, ο T είναι ισομετρία.)

(γ) Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα.

(δ) Αν $Tf = 0$, τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $f(e_k) = 0$. Άρα, για κάθε $x \in \ell_1$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k) = 0 \Longrightarrow f \equiv 0.$$

Αφού $\mathrm{Ker}T = \{0\}$, ο T είναι ένα προς ένα.

(ε) Έστω $a = (a_1, \ldots, a_k, \ldots) \in \ell_\infty$ (υπάρχει λοιπόν $M > 0$ τέτοιος ώστε $|a_k| \leq M$, $k \in \mathbb{N}$.) Ορίζουμε $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$. Τότε,

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \, |a_k| \leq (\sup_k |a_k|) \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leq M \|x\|_1.$$

Άρα, $f \in \ell_1^*$, και αφού $f(e_k) = a_k$, $Tf = a$. Δηλαδή ο T είναι επί. □

Θεώρημα 5.3.4. *Αν $1 < p < +\infty$, τότε ο ℓ_p^* είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον ℓ_q, όπου q ο συζυγής εκθέτης του p.*

Απόδειξη: Η (e_k) είναι βάση Schauder του ℓ_p (ελέγξτε το). Κάθε $x = (\xi_k) \in \ell_p$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = \sum_k \xi_k e_k$, και αν $f : \ell_p \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, τότε $f(x) = \sum_k \xi_k f(e_k)$.

Ορίζουμε $T : \ell_p^* \to \ell_q$ με $Tf = (f(e_1), \ldots, f(e_k), \ldots)$.

(α) *Ο T είναι καλά ορισμένος:* Πρέπει να δείξουμε ότι, για κάθε $f \in \ell_p^*$ ισχύει $\sum_k |f(e_k)|^q < +\infty$. Έστω

$N \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $\gamma_k = |f(e_k)|^q / f(e_k)$ αν $f(e_k) \neq 0$, και $\gamma_k = 0$ αλλιώς. Τότε,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N |f(e_k)|^q &= \sum_{k=1}^N \gamma_k f(e_k) = f\left(\sum_{k=1}^N \gamma_k e_k\right) \\
&\leq \|f\| \left(\sum_{k=1}^N |\gamma_k|^p\right)^{1/p} \\
&= \|f\| \left(\sum_{k=1}^N |f(e_k)|^{(q-1)p}\right)^{1/p} \\
&= \|f\| \left(\sum_{k=1}^N |f(e_k)|^q\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\left(\sum_{k=1}^N |f(e_k)|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|f\| \Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^N |f(e_k)|^q\right)^{1/q} \leq \|f\|,$$

και αφήνοντας το $N \to \infty$, παίρνουμε

$$(*) \qquad \|Tf\|_q = \left(\sum_{k=1}^\infty |f(e_k)|^q\right)^{1/q} \leq \|f\|,$$

το οποίο βέβαια δείχνει και ότι $Tf \in \ell_q$.

(β) Αν $f \in \ell_p^*$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Hölder βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= \Big|\sum_{k=1}^\infty \xi_k f(e_k)\Big| \leq \sum_{k=1}^\infty |\xi_k|\, |f(e_k)| \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^\infty |f(e_k)|^q\right)^{1/q} \\
&= \|x\|_p \, \|Tf\|_q.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$(**) \qquad \|f\| = \sup_{\|x\|_p = 1} |f(x)| \leq \|Tf\|_q.$$

Από τις $(*)$ και $(**)$ βλέπουμε ότι ο T είναι ισομετρία: για κάθε $f \in \ell_p^*$, $\|Tf\| = \|f\|$.

(γ) Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός και ένα προς ένα τελεστής.

(δ) Έστω $a = (a_1, \ldots, a_k, \ldots) \in \ell_q$. Δηλαδή, $\sum_k |a_k|^q < +\infty$. Ορίζουμε $f(x) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k a_k$. Τότε,

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leq \sum_{k=1}^\infty |\xi_k|\, |a_k| \\
&\leq \left(\sum_k |a_k|^q\right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^p\right)^{1/p} \\
&= \|a\|_q \, \|x\|_p.
\end{aligned}$$

Άρα, $f \in \ell_p^*$, και αφού $f(e_k) = a_k$, $Tf = a$. Δηλαδή ο T είναι επί. $\square$

5.4 Ασκήσεις

1. Έστω $T : C[0,1] \to C[0,1]$, με $(Tf)(t) = \int_0^t f(s)ds$, $t \in [0,1]$.

(α) Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος, γραμμικός και ένα προς ένα τελεστής.

(β) Βρείτε την εικόνα $R(T)$ του T.

(γ) Είναι ο $T^{-1} : R(T) \to C[0,1]$ φραγμένος;

(δ) Βρείτε την $\|T\|$.

2. Ορίζουμε $T : \ell_2 \to \ell_2$ ως εξής: αν $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$, θέτουμε $Tx = (\xi_2, \xi_3, \ldots)$.

(α) Δείξτε ότι ο T ορίζεται καλά, και είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

(β) Ορίζουμε $T_n = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n φορές). Βρείτε την $\|T_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, και το $\lim_n \|T_n\|$.

(γ) Αν $x \in \ell_2$, βρείτε το $\lim_n \|T_n x\|$.

3. Στον $C[0,1]$ ορίζουμε $\|f\| = \max_{-1 \leq t \leq 1} |f(t)|$. Υπολογίστε τις νόρμες των παρακάτω συναρτησοειδών $F : C[-1,1] \to \mathbb{R}$:

(α) $F(g) = \int_{-1}^1 g(s)ds - g(0)$.

(β) $F(g) = \frac{g(1/2) + g(-1/2) - 2g(0)}{2}$.

4. Ορίζουμε $F : \ell_1 \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k$. Δείξτε ότι το F είναι γραμμικό συναρτησοειδές. Είναι φραγμένο; Αν ναι, ποιά είναι η νόρμα του;

5. Ορίζουμε $T, S : C[0,1] \to C[0,1]$ με

$$(Tf)(t) = t \int_0^1 f(s)ds \quad , \quad (Sf)(t) = tf(t).$$

(α) Δείξτε ότι οι T, S είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές.

(β) Βρείτε τους $T \circ S$ και $S \circ T$. Είναι σωστό ότι $T \circ S = S \circ T$;

(γ) Υπολογίστε τις $\|T\|$, $\|S\|$, $\|T \circ S\|$ και $\|S \circ T\|$.

6. Θεωρούμε το τρίγωνο $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, a \leq y \leq x\}$, και μια συνεχή συνάρτηση $\phi : \Delta \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε $T : C[a,b] \to C[a,b]$ με

$$(Tf)(x) = \int_a^x \phi(x,y) f(y) dy.$$

Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και

$$\|T\| \leq (b-a) \max\{|\phi(x,y)| : (x,y) \in \Delta\}.$$

7. Θεωρούμε το χώρο $C^1[0,1]$ των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0,1]$. Στον $C^1[0,1]$ θεωρούμε τις νόρμες

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f|^2 \right)^{1/2} \quad , \quad \|f\|_{1,2} = \left(\int_0^1 |f'|^2 \right)^{1/2} + |f(0)|.$$

Δείξτε ότι ο ταυτοτικός τελεστής $I : (C^1[0,1], \|\cdot\|_{1,2}) \to (C^1[0,1], \|\cdot\|_2)$ είναι φραγμένος.

[*Υπόδειξη:* Περιοριστείτε πρώτα στον χώρο $\{f \in C^1 : f(0) = 0\}$, και εφαρμόστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz.]

8. Έστω X ο χώρος όλων των φραγμένων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με νόρμα την $\|f\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$. Ορίζουμε $T : X \to X$, με $(Tf)(t) = f(t-a)$, όπου $a > 0$ δοσμένη σταθερά. Είναι ο T γραμμικός; Φραγμένος;

9. Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $T_n, T \in B(X,Y)$ και $x_n, x \in X$. Δείξτε ότι, αν $T_n \to T$ και $x_n \to x$, τότε $T_n x_n \to Tx$.

10. Έστω $F : X \to \mathbb{R}$ μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές. Δείξτε ότι το F είναι φραγμένο αν και μόνο αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $F(B(0,\delta)) \neq \mathbb{R}$.

11. Έστω X χώρος με νόρμα, και $F \in X^*$, $F \neq 0$. Δείξτε ότι

$$\|F\| = \frac{1}{\inf\{\|x\| : F(x) = 1\}}.$$

12. Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $F : X \to \mathbb{R}$ που δεν είναι φραγμένο.

13. Έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με την εξής ιδιότητα: αν $x_n \to 0$ στον X, τότε η $\{\|Tx_n\|\}$ είναι φραγμένη. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

14. Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T : X \to Y$ ένα προς ένα, φραγμένος γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός αν και μόνο αν $T(B_X) = B_Y$.

15. Έστω X χώρος με νόρμα, και $M^* \subseteq X^*$. Ορίζουμε

$$N(M^*) = \{x \in X : \forall F \in M^*,\ \ F(x) = 0\}.$$

Δείξτε ότι το $N(M^*)$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X.

Υποδείξεις - απαντήσεις

1. (α) Για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε

$$|(Tf)(t)| = |\int_0^t f(s)ds| \leq \int_0^t |f(s)|ds \leq \|f\| \int_0^t ds = \|f\| \cdot t \leq \|f\|,$$

άρα

$$\|Tf\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |(Tf)(t)| \leq \|f\|.$$

Έπεται ότι ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leq 1$. Για την γραμμικότητα του T παρατηρούμε ότι αν $f, g \in C[0,1]$ και $a, b \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned} [T(af+bg)](t) &= \int_0^t (af(s)+bg(s))ds = a\int_0^t f(s)ds + b\int_0^t g(s)ds \\ &= a(Tf)(t) + b(Tg)(t) = [a(Tf)+b(Tg)](t), \end{aligned}$$

άρα $T(af+bg) = a(Tf) + b(Tg)$. Η Tf είναι συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, αφού $(Tf)' = f$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο T είναι καλά ορισμένος, αλλά και ότι είναι ένα προς ένα:

$$Tf = Tg \Longrightarrow (Tf)' = (Tg)' \Longrightarrow f = g.$$

(β) Όπως παρατηρήσαμε στο (α) η Tf είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και $(Tf)(0) = 0$. Αυτές είναι ακριβώς οι συναρτήσεις που ανήκουν στην εικόνα $R(T)$ του T. Πράγματι, αν $g \in C^1[0,1]$ και $g(0) = 0$, θεωρούμε την $f = g' \in C[0,1]$. Από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού έχουμε

$$(Tf)(t) = \int_0^t f(s)ds = \int_0^t g'(s)ds = g(t) - g(0) = g(t),$$

δηλαδή, $Tf = g$.

(γ) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση $f_n(t) = t^n$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και $f_n(0) = 0$. Από το (β), $f_n \in R(T)$ και $[T^{-1}(f_n)](t) = f_n'(t) = nt^{n-1}$. Άρα,

$$\frac{\|T^{-1}(f_n)\|}{\|f_n\|} = \frac{n}{1} = n$$

(γιατί;). Έπεται ότι ο T^{-1} δεν είναι φραγμένος: αν ήταν, θα είχαμε $\|T^{-1}\| \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (γιατί;).

(δ) Αν πάρουμε $f \equiv 1$ στο $[0,1]$, τότε $\|f\| = 1$ και $(Tf)(t) = \int_0^t ds = t$. Άρα,

$$\|T\| \geq \|Tf\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |t| = 1,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $\|T\| = 1$.

2. (α) Ο T ορίζεται καλά, γιατί

$$\|Tx\|_2^2 = \sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 = \|x\|_2^2 < +\infty,$$

δηλαδή $Tx \in \ell_2$. Η ίδια ανισότητα δείχνει ότι ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leq 1$. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα.

(β) Επαγωγικά δείχνουμε ότι $T_n x = (\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots)$. Για τη νόρμα του T_n έχουμε $\|T_n\| \leq \|T\| \ldots \|T\| = \|T\|^n \leq 1$. Ισχύει ισότητα, γιατί

$$\|T_n\| \geq \frac{\|T_n e_{n+1}\|_2}{\|e_{n+1}\|_2} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ειδικότερα, $\lim_{n\to\infty} \|T_n\| = 1$.

(γ) Αν $x \in \ell_2$, τότε $\|T_n x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^2} \to 0$ όταν $n \to \infty$ (ουρά συγκλίνουσας σειράς). Δηλαδή, $T_n x \to \vec{0}$ για κάθε $x \in \ell_2$. $\square$

3. (α) Για κάθε $g \in C[0,1]$ έχουμε

$$|F(g)| = |\int_{-1}^1 g(s)ds - g(0)| \leq \int_{-1}^1 |g(s)|ds + |g(0)| \leq 2\|g\| + \|g\| = 3\|g\|.$$

Άρα, το F είναι φραγμένο και $\|F\| \leq 3$. Για κάθε μικρό $\varepsilon > 0$ ορίζουμε $g_\varepsilon \in C[-1,1]$ θέτοντας $g_\varepsilon \equiv 1$ στα $[-1,-\varepsilon]$ και $[\varepsilon, 1]$, $g_\varepsilon(0) = -1$ και επεκτείνοντας γραμμικά στα $[-\varepsilon, 0]$ και $[0, \varepsilon]$. Τότε $\|g_\varepsilon\| = 1$ και

$$\begin{aligned}
\|F\| &\geq |F(g_\varepsilon)| = \Big|\int_{-1}^{1} g_\varepsilon(s)ds + 1\Big| \\
&= \Big|\int_{-1}^{-\varepsilon} ds + \int_{-\varepsilon}^{0} g_\varepsilon(s)ds + \int_{0}^{\varepsilon} g_\varepsilon(s)ds + \int_{\varepsilon}^{1} ds + 1\Big| \\
&= |(1-\varepsilon) + 0 + 0 + (1-\varepsilon) + 1| = 3 - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Αφού η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε μικρό $\varepsilon > 0$, βλέπουμε ότι

$$\|F\| \geq \lim_{\varepsilon \to 0^+} (3 - 2\varepsilon) = 3.$$

Άρα, $\|F\| = 3$.

(β) Για κάθε $g \in C[0,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|F(g)| &= \Big|\frac{g(1/2)}{2} + \frac{g(-1/2)}{2} - g(0)\Big| \leq \frac{|g(1/2)|}{2} + \frac{|g(-1/2)|}{2} + |g(0)| \\
&\leq \frac{\|g\|}{2} + \frac{\|g\|}{2} + \|g\| = 2\|g\|.
\end{aligned}$$

Άρα, το F είναι φραγμένο και $\|F\| \leq 2$. Ορίζουμε $g \in C[-1,1]$ θέτοντας $g \equiv 1$ στα $[-1,-1/2]$ και $[1/2,1]$, $g(0) = -1$ και επεκτείνοντας γραμμικά στα $[-1/2, 0]$ και $[0, 1/2]$. Τότε $\|g\| = 1$ και

$$\|F\| \geq |F(g)| = \Big|\frac{g(1/2)}{2} + \frac{g(-1/2)}{2} - g(0)\Big| = \Big|\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - (-1)\Big| = 2.$$

Άρα, $\|F\| = 2$.

4. Αν $x \in \ell_1$, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ συγκλίνει απολύτως άρα συγκλίνει. Αυτό σημαίνει ότι το F είναι καλά ορισμένο. Η γραμμικότητα ελέγχεται εύκολα:

$$F(ax + by) = \sum_{k=1}^{\infty} (a\xi_k + b\eta_k) = a\sum_{k=1} \xi_k + b\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k = aF(x) + bF(y).$$

Έχουμε

$$|F(x)| = \Big|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\Big| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \|x\|_1,$$

άρα το F είναι φραγμένο και $\|F\| \leq 1$. Ισχύει ισότητα, γιατί αν $\xi_k \geq 0$ τότε

$$|F(x)| = F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \|x\|_1.$$

5. (α) Η γραμμικότητα των T και S ελέγχεται εύκολα. Επίσης,

$$|(Tf)(t)| = \Big|t\int_0^1 f(s)ds\Big| \leq t\int_0^1 |f(s)|ds \leq t\|f\| \int_0^1 ds = t\|f\| \leq \|f\|$$

για κάθε $t \in [0,1]$, άρα $\|Tf\| \leq \|f\|$. Δηλαδή, ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leq 1$. Όμοια,

$$|(Sf)(t)| = |tf(t)| = t|f(t)| \leq 1 \cdot \|f\| = \|f\|$$

για κάθε $t \in [0,1]$, άρα $\|Sf\| \leq \|f\|$. Δηλαδή, ο S είναι φραγμένος και $\|S\| \leq 1$.

(β) Έχουμε

$$[(T \circ S)(f)](t) = t\int_0^1 (Sf)(s)ds = t\int_0^1 sf(s)ds,$$

και

$$[(S \circ T)(f)](t) = t(Tf)(t) = t^2 \int_0^1 f(s)ds.$$

Δεν ισχύει ότι $T \circ S = S \circ T$. Αν ίσχυε, για την $f \equiv 1$ θα παίρναμε

$$[(T \circ S)(f)](t) = [(S \circ T)(f)](t) \Longrightarrow t\int_0^1 sds = t^2 \int_0^1 ds \Longrightarrow \frac{t}{2} = t^2$$

για κάθε $t \in [0,1]$, το οποίο προφανώς δεν ισχύει.

(γ) Όπως στο (α), ελέγχουμε ότι $\|T \circ S\| \leq 1/2$ και $\|S \circ T\| \leq 1$. Παίρνοντας $f \equiv 1$, βλέπουμε ότι ισχύουν ισότητες:

$$\|T\| = \|S\| = \|S \circ T\| = 1, \quad \|T \circ S\| = \frac{1}{2}.$$

Επαληθεύστε όλους αυτούς τους ισχυρισμούς.

6. Η Tf είναι συνεχής συνάρτηση, δηλαδή ο T ορίζεται καλά: αν μας δώσουν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ (μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\delta < \varepsilon$) τέτοιος ώστε αν $(x,y),(x_1,y_1) \in \Delta$ και $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} < \delta$ να έχουμε $|\phi(x,y) - \phi(x_1,y_1)| < \varepsilon$.

Ειδικότερα, αν $x < x_1$ και $x_1 - x < \delta$ και $(x,y),(x_1,y) \in \Delta$, τότε $|\phi(x,y) - \phi(x_1,y)| < \varepsilon$. Έστω $x < x_1$ στο $[a,b]$ με $x_1 - x < \delta$. Τότε,

$$\begin{aligned}
|(Tf)(x_1) - (Tf)(x)| &= \Big|\int_a^{x_1} \phi(x_1,y)f(y)dy - \int_a^x \phi(x,y)f(y)dy\Big| \\
&\leq \Big|\int_x^{x_1} \phi(x_1,y)f(y)dy\Big| + \Big|\int_a^x [\phi(x_1,y) - \phi(x,y)]f(y)dy\Big| \\
&\leq \int_x^{x_1} |\phi(x_1,y)| \cdot |f(y)|dy + \int_a^x |\phi(x_1,y) - \phi(x,y)| \cdot |f(y)|dy \\
&\leq \Big(\max_\Delta |\phi|\Big) \|f\|(x_1 - x) + \|f\|\varepsilon(x-a) \\
&< \Big[\Big(\max_\Delta |\phi|\Big) + b - a\Big] \varepsilon\|f\|.
\end{aligned}$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η Tf είναι (ομοιόμορφα) συνεχής.

Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα. Τέλος, για κάθε $x \in [a,b]$

$$\begin{aligned}
|(Tf)(x)| &= \Big|\int_a^x \phi(x,y)f(y)dy\Big| \leq \int_a^x |\phi(x,y)| \cdot |f(y)|dy \\
&\leq \Big(\max_\Delta |\phi|\Big) \|f\|(x-a) \\
&\leq \Big[(b-a)\max_\Delta |\phi|\Big] \|f\|.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\|Tf\| \leq \Big[(b-a)\max_\Delta |\phi|\Big] \|f\|.$$

Άρα, ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leq (b-a)\max_\Delta |\phi|$.

7. Έστω $f \in C^1[0,1]$ με $f(0) = 0$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= \int_0^1 |f(t)|^2 dt \\
&= \int_0^1 \Big|\int_0^t f'(s)ds\Big|^2 dt \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^t |f'(s)|^2 ds\right)\left(\int_0^t 1^2 ds\right) dt \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f'(s)|^2 ds\right) t dt \\
&\leq \int_0^1 |f'(s)|^2 ds \\
&\leq \|f\|_{1,2}^2.
\end{aligned}$$

Δηλαδή, $\|f\|_2 \leq \|f\|_{1,2}$ σε αυτήν την περίπτωση. Έστω τώρα τυχούσα $f \in C^1[0,1]$. Τότε, η $g(t) = f(t) - f(0)$ ικανοποιεί την $g(0) = 0$, άρα $\|g\|_2 \leq \|g\|_{1,2}$. Όμως, $g' = f'$ άρα

$$\|g\|_{1,2} = \left(\int_0^1 |g'|^2\right)^{1/2} + |g(0)| = \left(\int_0^1 |f'|^2\right)^{1/2} + |f(0)| - |f(0)| = \|f\|_{1,2} - |f(0)|,$$

επομένως

$$\|f\|_2 = \|g + f(0)\|_2 \leq \|g\|_2 + |f(0)| \leq \|g\|_{1,2} + |f(0)| = \|f\|_{1,2}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι ο ταυτοτικός τελεστής $I : (C^1[0,1], \|\cdot\|_{1,2}) \to (C^1[0,1], \|\cdot\|_2)$ είναι φραγμένος και $\|I\| \leq 1$.

8. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένες συναρτήσεις και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
[T(\lambda f + \mu g)](t) &= (\lambda f + \mu g)(t-a) \\
&= \lambda f(t-a) + \mu g(t-a) \\
&= \lambda (Tf)(t) + \mu (Tg)(t) \\
&= [\lambda Tf + \mu Tg](t),
\end{aligned}$$

άρα $T(\lambda f + \mu g) = \lambda Tf + \mu Tg$, δηλαδή ο T είναι γραμμικός. Επίσης,

$$|(Tf)(t)| = |f(t-a)| \leq \sup_{s\in\mathbb{R}} |f(s)| = \|f\|,$$

άρα

$$\|Tf\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |(Tf)(t)| \leq \|f\|.$$

Άρα, ο T είναι φραγμένος.

9. Οι (T_n) και (x_n) είναι φραγμένες ακολουθίες στους $B(X,Y)$ και X αντίστοιχα, ως συγκλίνουσες ακολουθίες. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|T_n\| \leq M, \quad \|x_n\| \leq M, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\|T_n x_n - Tx\| &= \|T_n x_n - Tx_n + Tx_n - Tx\| \\
&\leq \|(T_n - T)(x_n)\| + \|T(x_n - x)\| \\
&\leq \|T_n - T\| \cdot \|x_n\| + \|T\| \cdot \|x_n - x\| \\
&\leq M\|T_n - T\| + \|T\| \cdot \|x_n - x\| \to 0,
\end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι $T_n x_n \to Tx$.

10. Έστω ότι το F είναι φραγμένο. Τότε, για κάθε $x \in B(0,1)$ έχουμε

$$|F(x)| \leq \|F\| \cdot \|x\| \leq \|F\|,$$

δηλαδή, $F(B(0,1)) \subseteq [-\|F\|, \|F\|]$. Άρα, για $\delta = 1$ έχουμε $F(B(0,\delta)) \neq \mathbb{R}$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $F(B(0,\delta)) \neq \mathbb{R}$ για κάποιο $\delta > 0$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $F(B(0,\delta))$ είναι κυρτό και συμμετρικό ως προς το 0 υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (από τη γραμμικότητα του F - εξηγήστε). Αφού είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, πρέπει να είναι ανοικτό ή κλειστό διάστημα με κέντρο το 0. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|x\| \leq \delta \Longrightarrow |F(x)| \leq M.$$

Έπεται ότι το F είναι φραγμένο: αν $x \neq 0$, τότε

$$\left| F\Big(\frac{\delta x}{2\|x\|}\Big) \right| \leq M \Longrightarrow |F(x)| \leq \frac{2M}{\delta}\|x\|.$$

11. Αν $F(x) = 1$, τότε $1 = F(x) \leq \|F\| \cdot \|x\|$, άρα $\|x\| \geq \frac{1}{\|F\|}$. Δηλαδή,

$$\inf\{\|x\| : F(x) = 1\} \geq \frac{1}{\|F\|}.$$

Από την άλλη πλευρά, για κάθε $0 < \varepsilon < \|F\|$ υπάρχει $x_\varepsilon \in X$ με $\|x_\varepsilon\| = 1$ τέτοιο ώστε $F(x_\varepsilon) = a_\varepsilon > \|F\| - \varepsilon$ (γιατί;). Τότε, $F(x_\varepsilon / a_\varepsilon) = 1$ και

$$\Big\|\frac{x_\varepsilon}{a_\varepsilon}\Big\| = \frac{1}{a_\varepsilon} < \frac{1}{\|F\| - \varepsilon}.$$

Άρα,

$$\inf\{\|x\| : F(x) = 1\} \leq \frac{1}{\|F\| - \varepsilon},$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, παίρνουμε

$$\inf\{\|x\| : F(x) = 1\} \leq \frac{1}{\|F\|}.$$

12. Θεωρούμε μια βάση Hamel του X. Ο X είναι απειροδιάστατος, επομένως μπορούμε να γράψουμε αυτή τη βάση στη μορφή

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_i : i \in I\}.$$

[Ξεχωρίζουμε δηλαδή ένα άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο μιάς βάσης του X και το αριθμούμε.] Αφού τα x_n, y_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα, κάθε x_n είναι μη μηδενικό. Ορίζουμε $F : X \to \mathbb{R}$ πρώτα στα στοιχεία της βάσης του X, θέτοντας

$$F(x_n) = n\|x_n\|, \quad F(y_i) = 0.$$

Κατόπιν επεκτείνουμε γραμμικά σε ολόκληρο το χώρο X (κάθε $x \in X$ γράφεται μονοσήμαντα σαν πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός κάποιων x_n και κάποιων y_i - εξηγήστε). Το F είναι γραμμικό συναρτησοειδές, όμως δεν είναι φραγμένο γιατί τότε θα είχαμε

$$\|F\| \geq \frac{|F(x_n)|}{\|x_n\|} = n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το οποίο είναι άτοπο.

13. Έστω ότι ο T δεν είναι φραγμένος. Τότε, ο T δεν είναι συνεχής στο 0. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $z_n \in X$ με $\|z_n\| < 1/n$ και $\|Tz_n\| \geq \varepsilon$.

Ορίζουμε $x_n = \frac{z_n}{\sqrt{\|z_n\|}}$ (αφού $\|Tz_n\| \geq \varepsilon$ έχουμε $Tz_n \neq 0$ άρα $z_n \neq 0$). Τότε,

$$\|x_n\| = \frac{\|z_n\|}{\sqrt{\|z_n\|}} = \sqrt{\|z_n\|} < \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,$$

άρα $x_n \to 0$. Όμως,

$$\|Tx_n\| = \frac{\|Tz_n\|}{\sqrt{\|z_n\|}} \geq \varepsilon\sqrt{n} \to +\infty,$$

δηλαδή η $(\|Tx_n\|)$ δεν είναι φραγμένη. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα ο T είναι φραγμένος.

14. ($\Longrightarrow$) Υποθέτουμε ότι ο $T : X \to Y$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός, δηλαδή γραμμικός, ένα προς ένα και επί, με την ιδιότητα $\|Tx\| = \|x\|$ για κάθε $x \in X$.

Αν $x \in B_X$, τότε $\|Tx\| = \|x\| \leq 1$ άρα $Tx \in B_Y$. Άρα, $T(B_X) \subseteq B_Y$.

Αν $y \in B_Y$, αφού ο T είναι ένα προς ένα και επί, υπάρχει μοναδικό $x \in X$ για το οποίο $Tx = y$, και $\|x\| = \|Tx\| = \|y\| \leq 1$, δηλαδή $x \in B_X$. Άρα, $B_Y \subseteq T(B_X)$.

Επομένως, $T(B_X) = B_Y$.

($\Longleftarrow$) Δείχνουμε πρώτα ότι ο T είναι επί: αν $y \in Y$, $y \neq 0$, τότε $\frac{y}{\|y\|} \in B_Y = T(B_X)$, άρα υπάρχει $x \in B_X$ τέτοιο ώστε $Tx = \frac{y}{\|y\|}$. Τότε,

$$y = T(\|y\|x) \in T(X).$$

Προφανώς, $0 = T(0) \in T(X)$. Άρα, $T(X) = Y$.

Ο T είναι ισομετρία: αν είχαμε $\|Tx\| > \|x\|$ για κάποιο $x \in X$, τότε θα είχαμε

$$\|T(x/\|x\|)\| > 1 \Longrightarrow T(x/\|x\|) \notin B_Y,$$

ενώ $x/\|x\| \in B_X$. Αυτό είναι άτοπο, αφού έχουμε υποθέσει ότι $T(B_X) = B_Y$. Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x \in X$ για το οποίο $\|Tx\| < \|x\|$.

Αφού ο T είναι ισομετρία, πρέπει να είναι και ένα προς ένα. Άρα, είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

15. Έστω $x, y \in N(M^*)$ και $a, b \in \mathbb{R}$. Για κάθε $F \in M^*$ έχουμε

$$F(ax + by) = aF(x) + bF(y) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0,$$

άρα $ax + by \in N(M^*)$. Δηλαδή, ο $N(M^*)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X.

Έστω τώρα ότι $x_n \in N(M^*)$ και $x_n \to x \in X$. Για κάθε $F \in M^*$ έχουμε

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

άρα $x \in N(M^*)$. Επομένως, ο $N(M^*)$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X.

Κεφάλαιο 6

Χώροι Hilbert

6.1 Χώροι Hilbert

Ορισμός Έστω X γραμμικός χώρος. Μια συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ λέγεται *εσωτερικό γινόμενο* αν ικανοποιεί τα εξής:

(α) $\langle x, x\rangle \geq 0$, για κάθε $x \in X$.

(β) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$.

(γ) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, για κάθε $x, y \in X$.

(δ) $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y\rangle = \lambda_1 \langle x_1, y\rangle + \lambda_2 \langle x_2, y\rangle$, για κάθε $x_1, x_2, y \in X$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Από τις (α)-(δ) έπεται ότι $\langle x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\rangle = \lambda_1 \langle x, y_1\rangle + \lambda_2 \langle x, y_2\rangle$ για κάθε $y_1, y_2, x \in X$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Επίσης, $x = \vec{0} \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$ για κάθε $y \in X$.

Παραδείγματα (α) Στον $\mathbb{R}^N$, αν $x = (\xi_k)$, $y = (\eta_k)$, ορίζουμε

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{N} \xi_k \eta_k.$$

(β) Στον ℓ_2, αν $x = (\xi_k)$, $y = (\eta_k)$, ορίζουμε

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k.$$

(Η σειρά $\sum_k \xi_k \eta_k$ συγκλίνει απολύτως, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz και από το γεγονός ότι $\sum_k \xi_k^2 < +\infty$, $\sum_k \eta_k^2 < +\infty$.)

(γ) Στον $C[a, b]$, αν $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, ορίζουμε

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Οι ιδιότητες (α)-(δ) του εσωτερικού γινομένου επαληθεύονται εύκολα και στα τρία παραδείγματα.

Πρόταση 6.1.1. *(ανισότητα Cauchy-Schwarz) Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x, y \in X$, τότε*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα x και y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Απόδειξη: Αν $y = \vec{0}$, τότε η ανισότητα ισχύει σαν ισότητα, και τα $\vec{0}, x$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Έστω $y \neq \vec{0}$. Ορίζουμε $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $P(\lambda) = \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle$. Τότε, $P(\lambda) \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, δηλαδή

$$\langle x, x \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου $P(\lambda)$ είναι μικρότερη ή ίση του 0. Δηλαδή, $4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0$, απ' όπου παίρνουμε την

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Ισότητα έχουμε αν και μόνο αν η διακρίνουσα του P είναι 0, δηλαδή, αν και μόνο αν το P έχει διπλή ρίζα λ_0. Όμως,

$$P(\lambda_0) = 0 \Longleftrightarrow x = \lambda_0 y,$$

δηλαδή, αν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα. □

Ορίζουμε $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ με $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Η ανισότητα Cauchy-Schwarz μάς επιτρέπει να δείξουμε ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα:

Πρόταση 6.1.2. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Η $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, με $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ είναι νόρμα.*

Απόδειξη: (α) $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$, και $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$.
(β) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \, \|x\|$.
(γ) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$, από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου και την ανισότητα Cauchy-Schwarz. □

Ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα, και έχουμε δεί ότι οι $(x, y) \to x + y$, $(\lambda, x) \to \lambda x$ είναι συνεχείς ως προς την $\|\cdot\|$. Το εσωτερικό γινόμενο είναι κι αυτό συνεχές ως προς την $\|\cdot\|$:

Πρόταση 6.1.3. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $\|\cdot\|$ η επαγόμενη νόρμα. Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ ως προς την $\|\cdot\|$, τότε*

$$\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle.$$

Απόδειξη: Γράφουμε

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n - y \rangle + \langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq \|x_n\| \, \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \, \|y\|. \end{aligned}$$

Η (x_n) συγκλίνει άρα είναι φραγμένη, και $\|y_n - y\| \to 0$, $\|x_n - x\| \to 0$. Άρα,

$$\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle. \quad \square$$

Οι παρακάτω ταυτότητες είναι απλές συνέπειες του ορισμού της $\|\cdot\|$:

(i) **Κανόνας του παραλληλογράμμου**. Για κάθε $x, y \in X$,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

(ii) **Πυθαγόρειο θεώρημα**. Αν $x, y \in X$ και $\langle x, y \rangle = 0$, τότε

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Παρατήρηση: Μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον γραμμικό χώρο X, προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο αν και μόνο αν ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου. (*Υπόδειξη:* υποθέστε ότι η $\|\cdot\|$ ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου, και ορίστε $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\}$. Δείξτε ότι είναι εσωτερικό γινόμενο, και επαληθεύστε ότι η $\|\cdot\|$ είναι η επαγόμενη νόρμα.)

Ορισμός Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο λέγεται *χώρος Hilbert* αν είναι πλήρης ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$ που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο.

Παραδείγματα: (α) Έχουμε δεί ότι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ και ο ℓ_2 είναι πλήρεις ως προς την $\|x\| = \sqrt{\sum_k \xi_k^2}$. Άρα, είναι χώροι Hilbert.

(β) Στον $C[a,b]$, η $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b [f(t)]^2 dt}$ προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο, αλλά δεν είναι πλήρης (θυμηθείτε ανάλογο επιχείρημα για την $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$.)

(γ) Ο $C[a,b]$ με την $\|f\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|$ είναι πλήρης, αλλά η $\|\cdot\|_\infty$ δεν προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο, γιατί δεν ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου (πάρτε π.χ. $f(t) = 1-t$, $g(t) = t$ στον $C[0,1]$.)

6.2 Καθετότητα

Ορισμός (α) Λέμε ότι δύο διανύσματα x, y του χώρου με εσωτερικό γινόμενο X είναι *ορθογώνια* (ή *κάθετα*), και γράφουμε $x \perp y$, αν $\langle x, y\rangle = 0$.

(β) Μιά οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq X$ λέγεται *ορθοκανονική*, αν

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 & , i = j, \\ \\ 0 & , i \neq j. \end{cases}$$

Παρατηρήσεις: (α) Το $\vec{0}$ είναι κάθετο σε κάθε $x \in X$, και είναι το μοναδικό στοιχείο του X που έχει αυτήν την ιδιότητα.

(β) Αν $\{e_i : i \in I\}$ είναι μια ορθοκανονική οικογένεια στον X, τότε το $\{e_i : i \in I\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Πράγματι, αν $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_{i_k} = \vec{0}$, τότε για κάθε $j = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$0 = \langle \sum_{k=1}^n \lambda_k e_{i_k}, e_{i_j}\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle e_{i_k}, e_{i_j}\rangle = \lambda_j.$$

Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία στον X, τότε με τη *διαδικασία Gram-Schmidt* που περιγράφεται στην επόμενη Πρόταση, βρίσκουμε ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ στον X που είναι «ισοδύναμη» με την $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ με την εξής έννοια:

Πρόταση 6.2.1. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία στον X. Υπάρχει ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \in \mathbb{N}$,*

$$\mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_k\} = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_k\}.$$

Απόδειξη: Ορίζουμε τα e_k επαγωγικά: παρατηρήστε ότι $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Για $k = 1$, θέτουμε $e_1 = x_1/\|x_1\|$. Προφανώς, $\|e_1\| = 1$ και $\mathrm{span}\{x_1\} = \mathrm{span}\{e_1\}$.

Υποθέτουμε ότι έχουν οριστεί τα $e_1, \ldots, e_k$ έτσι ώστε: $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, $i, j \leq k$, και $\mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_k\} = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$.

Θέτουμε $y_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle x_{k+1}, e_i\rangle e_i$. Παρατηρούμε ότι $y_{k+1} \neq 0$, αλλιώς θα είχαμε $x_{k+1} \in \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_k\} = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_k\}$, άτοπο αφού τα $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επίσης, για $j = 1, \dots, k$,

$$\begin{aligned} \langle y_{k+1}, e_j \rangle &= \langle x_{k+1}, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \langle x_{k+1}, e_j \rangle - \langle x_{k+1}, e_j \rangle = 0. \end{aligned}$$

Άρα, το $e_{k+1} = y_{k+1}/\|y_{k+1}\|$ ορίζεται καλά, και τα $e_1, \dots, e_{k+1}$ είναι ορθοκανονικά. Τέλος,

$$e_{k+1} \in \operatorname{span}\{x_{k+1}, e_1, \dots, e_k\} \subseteq \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_{k+1}\},$$

και

$$x_{k+1} \in \operatorname{span}\{y_{k+1}, e_1, \dots, e_k\} \subseteq \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}.$$

Άρα, $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{k+1}\} = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$. □

Ειδική περίπτωση: Αν X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και F υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης ($\dim F = n < \infty$), τότε ο F έχει βάση $\{x_1, \dots, x_n\}$, και η ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt μάς δίνει μιά ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του F. Κάθε $x \in F$ γράφεται στη μορφή $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, και

$$\langle x, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle = \lambda_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Δηλαδή,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, \quad x \in F.$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\langle x, e_i \rangle e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2, \quad x \in F.$$

Στη συνέχεια, μελετάμε το εξής πρόβλημα: δίνονται ένας χώρος X με νόρμα, ένας υπόχωρος F του X πεπερασμένης διάστασης, και για κάθε $x \in X$ ορίζουμε

$$d(x, F) = \inf\{\|x - y\| : y \in F\},$$

την *απόσταση του x από τον F*. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $y_0 \in F$ στο οποίο «πιάνεται» η απόσταση: $\|x - y_0\| = d(x, F)$.

Πράγματι, από τον ορισμό της $d(x, F)$, μπορούμε να βρούμε $y_n \in F$ τέτοια ώστε

$$d(x, F) \leq \|x - y_n\| < d(x, F) + \frac{1}{n}.$$

Ειδικότερα, $y_n \in B(y_1, 2(d + 1)) \cap F$, το οποίο είναι συμπαγές σύνολο γιατί ο F έχει πεπερασμένη διάσταση, άρα υπάρχει υπακολουθία $y_{k_n} \to y_0 \in F$. Έπεται ότι

$$\|x - y_0\| = \lim_n \|x - y_{k_n}\| = d(x, F).$$

Το y_0 μπορεί να μην είναι μοναδικό: στον $\mathbb{R}^2$ με νόρμα την

$$\|(\xi_1, \xi_2)\| = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\},$$

αν πάρουμε $x = (1, 1)$ και $F = \{(\xi_1, 0), \xi_1 \in \mathbb{R}\}$, τότε $d(x, F) = 1$, και $\|x - y\| = 1$ αν $y = (\xi_1, 0)$ με $0 \leq \xi_1 \leq 2$.

Θα δούμε ότι αν η $\|\cdot\|$ προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο, τότε το πλησιέστερο προς το x σημείο του F είναι μονοσήμαντα ορισμένο:

Πρόταση 6.2.2. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και F υπόχωρος του X διάστασης n, με ορθοκανονική βάση την $\{e_1, \dots, e_n\}$. Αν $x \in X$, τότε το πλησιέστερο προς το x σημείο του F είναι το $\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$. Επιπλέον, το $x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$ είναι κάθετο στον F.*

Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι το $x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$ είναι κάθετο στον F. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι κάθετο σε κάθε e_j, $j = 1, \dots, n$. Όμως,

$$\begin{aligned}\langle x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i, e_j\rangle &= \langle x, e_j\rangle - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle\langle e_i, e_j\rangle \\ &= \langle x, e_j\rangle - \langle x, e_j\rangle = 0.\end{aligned}$$

Έστω $y \in F$. Υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Τότε,

$$\Big\|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\Big\|^2 = \Big\|(x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i) + \sum_{i=1}^n (\langle x, e_i\rangle - \lambda_i)e_i\Big\|^2,$$

και τα δύο διανύσματα είναι ορθογώνια, οπότε το Πυθαγόρειο Θεώρημα μάς δίνει

$$\begin{aligned}\|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\|^2 &= \Big\|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i\Big\|^2 + \sum_{i=1}^n (\langle x, e_i\rangle - \lambda_i)^2 \\ &\geq \|x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i\|^2.\end{aligned}$$

Επιπλέον, ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο αν $\lambda_i = \langle x, e_i\rangle$, $i = 1, \dots, n$, δηλαδή αν $y = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$. □

Σημαντική συνέπεια της Πρότασης 6.2.2 είναι η *ανισότητα του Bessel*:

Πρόταση 6.2.3. *Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία σε έναν χώρο X με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x \in X$ η σειρά $\sum_{n=1}^\infty |\langle x, e_n\rangle|^2$ συγκλίνει, και*

$$\sum_{n=1}^\infty |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Απόδειξη: Έστω $N \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τον υπόχωρο $F_N = \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_N\}$, και εφαρμόζουμε την Πρόταση 6.2.3. Το πλησιέστερο προς το x σημείο του F_N είναι το $\sum_{n=1}^N \langle x, e_n\rangle e_n$, και το $x - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n\rangle e_n$ είναι κάθετο στον F_N. Άρα,

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|x - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n\rangle e_n\|^2 + \|\sum_{n=1}^N \langle x, e_n\rangle e_n\|^2 \\ &\geq \|\sum_{n=1}^N \langle x, e_n\rangle e_n\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle x, e_n\rangle|^2.\end{aligned}$$

Αφού η ανισότητα ισχύει για κάθε N, παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^\infty |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2. \quad \square$$

6.3 Ορθογώνιο συμπλήρωμα - προβολές

Έστω H χώρος Hilbert, και έστω M κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H (ενδεχομένως απειροδιάστατος). Θα δείξουμε ότι, και σ' αυτήν την περίπτωση, το πρόβλημα της βέλτιστης προσέγγισης έχει μοναδική λύση:

Πρόταση 6.3.1. *Έστω H χώρος Hilbert, M κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H, και $x \in H$. Υπάρχει μοναδικό $y_0 \in M$ τέτοιο ώστε*

$$\|x - y_0\| = d(x, M) = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}.$$

Το μοναδικό αυτό $y_0 \in M$ συμβολίζεται με $P_M(x)$, και ονομάζεται προβολή του x στον M.

Απόδειξη: Θέτουμε $\delta = d(x, M)$. Υπάρχει ακολουθία (y_n) στον M τέτοια ώστε

$$\|x - y_n\| \to \delta.$$

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου,

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) + (x - y_m)\|^2 \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|(y_n + y_m) - 2x\|^2 \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\Big\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\Big\|^2.\end{aligned}$$

Όμως, $\frac{y_n+y_m}{2} \in M$, άρα $\|\frac{y_n+y_m}{2} - x\| \geq \delta$. Επομένως,

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\delta^2 \to 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0.$$

Άρα, η (y_n) είναι ακολουθία Cauchy στον H. Ο H είναι πλήρης, άρα υπάρχει $y_0 \in H$ τέτοιο ώστε $y_n \to y_0$. Έπεται ότι $y_0 \in M$ (ο M είναι κλειστός), και $\|x - y_0\| = \lim_n \|x - y_n\| = \delta$.

Για τη μοναδικότητα, χρησιμοποιούμε και πάλι τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Αν $\|x - y\| = \delta = \|x - y'\|$, τότε

$$\begin{aligned}0 \leq \|y - y'\|^2 &= 2\|x - y'\|^2 + 2\|x - y\|^2 - 4\Big\|\frac{y + y'}{2} - x\Big\|^2 \\ &\leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0.\end{aligned}$$

Άρα, $y = y'$. □

Το $x - P_M(x)$ είναι και στην «απειροδιάστατη περίπτωση» κάθετο στον M:

Πρόταση 6.3.2. *Με τις υποθέσεις της Πρότασης 6.3.1,* $x - P_M(x) \perp M$.

Απόδειξη: Θέτουμε $z = x - P_M(x)$, και δείχνουμε ότι $\langle z, y\rangle = 0$ για κάθε $y \in M$. Έστω $y \in M$. Θεωρούμε τον $F = \{y, P_M(x)\} \subseteq M$. Τότε,

$$d(x, F) \leq \|z\| = d(x, M) \leq d(x, F),$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει γιατί $F \subseteq M$, και η πρώτη γιατί $P_M(x) \in F$. Αφού $\|x - P_M(x)\| = d(x, F)$, και ο F έχει πεπερασμένη διάσταση, έχουμε

$$x - P_M(x) \perp F.$$

Ειδικότερα, $x - P_M(x) \perp y$, δηλαδή $\langle z, y\rangle = 0$. □

Πόρισμα 6.3.1. Αν H χώρος Hilbert και M κλειστός γνήσιος υπόχωρος του H, τότε υπάρχει $z \in H$, $z \neq 0$, τέτοιο ώστε $z \perp M$.

Απόδειξη: Έστω $x \in H \setminus M$. Παίρνουμε $z = x - P_M(x) \neq 0$. □

Πόρισμα 6.3.2. Ένας γραμμικός υπόχωρος F του H είναι πυκνός αν και μόνο αν το μοναδικό διάνυσμα του H που είναι κάθετο στον F είναι το 0.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι ο F είναι πυκνός στον H, και ότι $\langle z, x\rangle = 0$ για κάθε $x \in F$.

Έστω $y \in H$. Αφού ο F είναι πυκνός, υπάρχει ακολουθία $(y_n) \in F$ με $y_n \to y$. Τότε, $0 = \langle z, y_n\rangle \to \langle z, y\rangle$. Άρα, $\langle z, y\rangle = 0$. Αφού $\langle z, y\rangle = 0$ για κάθε $y \in H$, έχουμε $z = 0$.

($\Leftarrow$) Ας υποθέσουμε ότι ο F δεν είναι πυκνός στον H. Τότε, ο $\overline{F}$ είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H. Άρα, υπάρχει $z \neq 0$, $z \perp \overline{F}$.

Ειδικότερα, $z \perp F$, άτοπο. □

Παρατήρηση Αν ο X είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, αλλά όχι πλήρης, τότε το Πόρισμα 6.3.1 μπορεί να μην ισχύει.

Για παράδειγμα, θεωρούμε τον χώρο c_{00} των τελικά μηδενικών ακολουθιών, με εσωτερικό γινόμενο το $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k$. Ορίζουμε $f : c_{00} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_k \frac{\xi_k}{k}$. Το f είναι γραμμικό συναρτησοειδές, και είναι φραγμένο γιατί

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\sum_k \frac{\xi_k}{k}| \leq \left(\sum_k \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_k \xi_k^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_k \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \|x\|. \end{aligned}$$

Άρα, ο πυρήνας του f, $M = \{x \in c_{00} : \sum_k \frac{\xi_k}{k} = 0\}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του c_{00}. Επίσης, ο M είναι προφανώς γνήσιο υποσύνολο του c_{00}.

Ας υποθέσουμε ότι $z \perp M$, $z = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots)$. Αφού $y_n = e_1 - ne_n \in M$, έχουμε

$$\langle z, y_n\rangle = \zeta_1 - n\zeta_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Αν $\zeta_1 \neq 0$, τότε $\zeta_n = \zeta_1/n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, άτοπο, γιατί το z θα είχε όλες του τις συντεταγμένες μη μηδενικές. Άρα, $\zeta_1 = 0$, κι αυτό μάς δίνει $\zeta_n = \zeta_1/n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $z = 0$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι, αν και ο M είναι κλειστός, το μόνο διάνυσμα του c_{00} που είναι κάθετο στον M είναι το 0.

Ορισμός Έστω H χώρος Hilbert, και $A \subseteq H$, $A \neq \emptyset$. Ορίζουμε

$$A^{\perp} = \{x \in H : \forall a \in A, \ \ \langle x, a\rangle = 0\}.$$

Ο $A^{\perp}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H (άσκηση).

Θεώρημα 6.3.1. *Έστω H χώρος Hilbert, και M κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H. Τότε, $H = M \oplus M^{\perp}$. Δηλαδή, κάθε $x \in H$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή*

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in M, \ x_2 \in M^{\perp}.$$

Απόδειξη: Έστω $x \in H$. Γράφουμε $x = P_M(x) + (x - P_M(x))$. Από τη συζήτηση που έχει προηγηθεί, $P_M(x) \in M$ και $x - P_M(x) \in M^{\perp}$.

Αν $x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$ και $x_1, x_1' \in M$, $x_2, x_2' \in M^{\perp}$, τότε το

$$y = x_1 - x_1' = x_2 - x_2' \in M \cap M^{\perp}$$

γιατί οι $M, M^{\perp}$ είναι υπόχωροι, άρα $y \perp y$, το οποίο σημαίνει ότι $y = 0$. Άρα, $x_1 = x_1'$ και $x_2 = x_2'$, απ' όπου έπεται η μοναδικότητα του τρόπου γραφής. □

Πόρισμα 6.3.3. Έστω $M \neq \{0\}$ κλειστός γραμμικός υπόχωρος του χώρου Hilbert H. Ορίζουμε $P_M : H \to H$ με $P_M(x) = P_M(x_1 + x_2) = x_1$, όπου $x = x_1 + x_2$ όπως στο Θεώρημα. Ο P_M είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και $\|P_M\| = 1$.

Απόδειξη: Αν $x = x_1 + x_2$, $x' = x_1' + x_2'$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lambda x + \mu x' = (\lambda x_1 + \mu x_1') + (\lambda x_2 + \mu x_2') \in M + M^{\perp},$$

οπότε

$$P_M(\lambda x + \mu x') = \lambda x_1 + \mu x_1' = \lambda P_M(x) + \mu P_M(x'),$$

άρα ο P_M είναι γραμμικός τελεστής. Επίσης,

$$\|P_M(x)\|^2 = \|x_1\|^2 \leq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 = \|x\|^2,$$

δηλαδή ο P_M είναι φραγμένος, και $\|P_M\| \leq 1$. Αν $x_0 \in M$, $x_0 \neq 0$, τότε $P_M(x_0) = x_0$. Άρα,

$$\|P_M\| \geq \frac{\|P_M(x_0)\|}{\|x_0\|} = 1. \quad \square$$

6.4 Το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz

Έστω $H \neq \{0\}$ χώρος Hilbert. Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε ότι ο H^* περιέχει «πολλά» συναρτησοειδή, τα οποία αναπαρίστανται με πολύ συγκεκριμμένο τρόπο από τα στοιχεία του H.

Λήμμα 6.4.1. *Για κάθε $a \in H$, η $f_a : H \to \mathbb{R}$ με $f_a(x) = \langle x, a\rangle$ ανήκει στον H^*, και $\|f_a\|_{H^*} = \|a\|_H$.*

Απόδειξη: Έχουμε

$$f_a(\lambda x + \mu y) = \langle \lambda x + \mu y, a\rangle = \lambda\langle x, a\rangle + \mu\langle y, a\rangle = \lambda f_a(x) + \mu f_a(y),$$

και

$$|f_a(x)| = |\langle x, a\rangle| \leq \|a\| \, \|x\|.$$

Άρα, $f_a \in H^*$ και $\|f_a\| \leq \|a\|$. Τέλος, αν $a \neq 0$,

$$\|f_a\| \geq \frac{|f_a(a)|}{\|a\|} = \frac{|\langle a, a\rangle|}{\|a\|} = \|a\|.$$

Αν $a = 0$, προφανώς $\|f_a\| = 0$ ($f_a \equiv 0$). □

Το Θεώρημα του Riesz μάς λέει ότι κάθε $f \in H^*$ αναπαρίσταται σαν $f = f_a$ για κάποιο $a \in H$:

Θεώρημα 6.4.1. *(Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz) Έστω H χώρος Hilbert, και $f \in H^*$. Υπάρχει μοναδικό $a \in H$ τέτοιο ώστε $f = f_a$.*

Απόδειξη: Ορίζουμε $M = \mathrm{Ker} f = \{x \in H : f(x) = 0\}$. Ο M είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.

Αν $M = H$, τότε $f \equiv 0$ και $f = f_0$.

Αν $M \neq H$, τότε υπάρχει $z \neq 0$, $z \in H$ που είναι κάθετο στον M (γιατί;). Τότε, για κάθε $y \in H$ έχουμε

$$f(f(z)y - f(y)z) = f(z)f(y) - f(y)f(z) = 0.$$

Άρα $f(z)y - f(y)z \in M$, και αφού $z \perp M$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \langle f(z)y - f(y)z, z\rangle = 0 \quad &\Longrightarrow \quad f(z)\langle y, z\rangle = f(y)\langle z, z\rangle \\ &\Longrightarrow \quad f(y) = \langle y, \frac{f(z)z}{\|z\|^2}\rangle = f_a(y), \end{aligned}$$

όπου $a = f(z)z/\|z\|^2$. Η μοναδικότητα του a είναι απλή. Αν $f(y) = \langle y, a\rangle = \langle y, a'\rangle$ για κάθε $y \in H$, τότε $a - a' \perp y$ για κάθε $y \in H$. Άρα, $a = a'$. □

Πόρισμα 6.4.1. Έστω H χώρος Hilbert. Η απεικόνιση $T : H \to H^*$ με $T(a) = f_a$ είναι γραμμική ισομετρία επί (ισομετρικός ισομορφισμός).

Απόδειξη: (α) Για τη γραμμικότητα της T, παρατηρούμε ότι

$$f_{\lambda a + \mu a'}(x) = \langle x, \lambda a + \mu a'\rangle = \lambda\langle x, a\rangle + \mu\langle x, a'\rangle = \lambda f_a(x) + \mu f_{a'}(x),$$

άρα

$$T(\lambda a + \mu a') = f_{\lambda a + \mu a'} = \lambda f_a + \mu f_{a'} = \lambda T(a) + \mu T(a').$$

(β) Από το Λήμμα, $\|T(a)\| = \|f_a\| = \|a\|$. Δηλαδή, η T είναι ισομετρία.

(γ) Αν $f \in H^*$, υπάρχει $a \in H$ τέτοιο ώστε $T(a) = f_a = f$, από το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz. Δηλαδή, η T είναι επί. □

6.5 Ορθοκανονικές βάσεις

Ορισμός Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ λέγεται *ορθοκανονική βάση* του X, αν
$$X = \overline{\mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Σημείωση: Αυτό δεν σημαίνει ότι η $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι βάση Hamel του X. Για παράδειγμα, η συνήθης ορθοκανονική ακολουθία (e_n) στον ℓ_2 είναι ορθοκανονική βάση (γιατί;), όχι όμως αλγεβρική του βάση.

Πρόταση 6.5.1. *Κάθε διαχωρίσιμος χώρος X με εσωτερικό γινόμενο, έχει ορθοκανονική βάση.*

Απόδειξη: Ο X είναι διαχωρίσιμος, δηλαδή υπάρχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ του X. Ορίζουμε $Y = \mathrm{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, οπότε $\overline{Y} = X$.

Παραλείποντας διαδοχικά εκείνα τα x_n τα οποία γράφονται σαν γραμμικοί συνδυασμοί των προηγουμένων τους, παίρνουμε ένα γραμμικά ανεξάρτητο $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ τέτοιο ώστε
$$Y = \mathrm{span}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Με τη διαδικασία Gram-Schmidt, βρίσκουμε ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ τέτοια ώστε $\mathrm{span}\{y_1, \dots, y_k\} = \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_k\}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα, $Y = \mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Άρα,
$$X = \overline{Y} = \overline{\mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}. \quad \square$$

Παρατήρηση: Αν ο X έχει ορθοκανονική βάση $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, τότε είναι διαχωρίσιμος. Το $M = \{\sum_{n=1}^N a_n e_n : N \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{Q}\}$ είναι αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X.

Πρόταση 6.5.2. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του X. Τότε, αν $x \in X$ έχουμε*

(α) $x = \sum_{n=1}^\infty \langle x, e_n\rangle e_n$,

(β) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\langle x, e_n\rangle|^2$.

Απόδειξη: Έστω $x \in X$, και $\varepsilon > 0$. Αφού $X = \overline{\mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$, υπάρχουν $N \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε
$$\Big\|x - \sum_{n=1}^N \lambda_n e_n\Big\| < \varepsilon.$$

Όμως, στον $F_N = \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_N\}$ έχουμε
$$\Big\|x - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n\rangle e_n\Big\| \le \Big\|x - \sum_{n=1}^N \lambda_n e_n\Big\| < \varepsilon.$$

Δηλαδή,
$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n\rangle^2 = \Big\|x - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n\rangle e_n\Big\|^2 < \varepsilon^2.$$

(ελέγξτε την τελευταία ισότητα ξεκινώντας από το δεξιό μέλος.) Τότε, για κάθε $M \ge N$,
$$\begin{aligned} 0 &\le \Big\|x - \sum_{n=1}^M \langle x, e_n\rangle e_n\Big\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^M \langle x, e_n\rangle^2 \\ &\le \|x\|^2 - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n\rangle^2 = \Big\|x - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n\rangle e_n\Big\|^2 \\ &< \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, αυτό σημαίνει ότι

(α) $\sum_{n=1}^{M}\langle x, e_n\rangle e_n \to x$ καθώς $M \to \infty$, δηλαδή

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n.$$

(β) $\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{M}\langle x, e_n\rangle^2 \to 0$ καθώς $M \to \infty$, δηλαδή

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, e_n\rangle|^2. \quad \square$$

Αν λοιπόν η $\{e_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του X, τότε κάθε $x \in X$ έχει *ανάπτυγμα* ως προς την $\{e_n\}$, με *συντελεστές Fourier* τους $\langle x, e_n\rangle$, και η νόρμα του x υπολογίζεται από την $\|x\|^2 = \sum_n \langle x, e_n\rangle^2$.

Πόρισμα 6.5.1. Κάθε διαχωρίσιμος χώρος Hilbert H είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον ℓ_2.

Απόδειξη: Ο H έχει ορθοκανονική βάση $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ορίζουμε $T : H \to \ell_2$ με

$$T(x) = (\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle, \dots).$$

(α) Ο T είναι καλά ορισμένος, γιατί $\sum_n \langle x, e_n\rangle^2 = \|x\|^2 < +\infty$, άρα $T(x) \in \ell_2$.

(β) Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα.

(γ) $\|T(x)\|_{\ell_2}^2 = \sum_n \langle x, e_n\rangle^2 = \|x\|^2$, άρα ο T είναι ισομετρία (άρα και ένα προς ένα).

(δ) Έστω $(a_1, \dots, a_n, \dots) \in \ell_2$. Ορίζουμε $x_N = \sum_{n=1}^{N} a_n e_n$. Τότε, αν $N > M$ έχουμε

$$\|x_N - x_M\|^2 = \sum_{n=M+1}^{N} a_n^2 \to 0$$

καθώς $N, M \to \infty$, και αυτό δείχνει ότι η (x_N) είναι ακολουθία Cauchy στον H. Ο H είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in H$ τέτοιο ώστε $x_N \to x$.

Έχουμε $\langle x_N, e_m\rangle \to \langle x, e_m\rangle$ καθώς $N \to \infty$, και αν $N > m$,

$$\langle x_N, e_m\rangle = \langle \sum_{n=1}^{N} a_n e_n, e_m\rangle = a_m.$$

Άρα, $\langle x, e_m\rangle = a_m$, $m \in \mathbb{N}$. Τέλος,

$$T(x) = (\langle x, e_m\rangle)_{m\in\mathbb{N}} = (a_m)_{m\in\mathbb{N}},$$

άρα ο T είναι επί. $\square$

6.6 Ασκήσεις

1. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και έστω $x, y \in X$. Δείξτε ότι

(α) $x \perp y$ αν και μόνο αν $\|x + ay\| = \|x - ay\|$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

(β) $x \perp y$ αν και μόνο αν $\|x + ay\| \geq \|x\|$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

2. Έστω H χώρος Hilbert, x_n, y_n στη μοναδιαία μπάλα του H, και $\langle x_n, y_n\rangle \to 1$. Δείξτε ότι $\|x_n - y_n\| \to 0$.

3. Έστω H χώρος Hilbert, και $x_n, x \in H$ με τις ιδιότητες: $\|x_n\| \to \|x\|$, και, για κάθε $y \in H$, $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$. Δείξτε ότι $\|x_n - x\| \to 0$.

4. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $x_1, \ldots, x_n \in X$. Δείξτε ότι

$$\sum_{i\neq j} \|x_i - x_j\|^2 = n\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - \|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2.$$

Αν $\|x_i - x_j\| \geq 2$ για $i \neq j$, δείξτε ότι αν μιά μπάλα περιέχει όλα τα x_i, πρέπει να έχει ακτίνα τουλάχιστον $\sqrt{2(n-1)/n}$.

5. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $x_1, \ldots, x_n \in X$. Δείξτε ότι

$$\sum_{\varepsilon_i=\pm 1} \Big\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\Big\|^2 = 2^n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2,$$

όπου το εξωτερικό άθροισμα είναι πάνω από όλες τις ακολουθίες $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$.

6. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και A, B μη κενά υποσύνολα του X, με $A \subseteq B$. Δείξτε ότι

(α) $A \subseteq A^{\perp\perp}$, (β) $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$, (γ) $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$.

7. Έστω H χώρος Hilbert, και Y υπόχωρος του H. Δείξτε ότι ο Y είναι κλειστός αν και μόνο αν $Y = Y^{\perp\perp}$.

8. Έστω M, N κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert. Δείξτε ότι

$$(M+N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp} \quad , \quad (M \cap N)^{\perp} = \overline{M^{\perp} + N^{\perp}}.$$

9. Δώστε παράδειγμα χώρου Hilbert H και γραμμικού υπόχωρου F του H με την ιδιότητα $H \neq F + F^{\perp}$.

10. Έστω H χώρος Hilbert, και W, Z κλειστοί υπόχωροι του H με την ιδιότητα: αν $w \in W$ και $z \in Z$, τότε $w \perp z$ (οι W και Z είναι *κάθετοι*). Δείξτε ότι ο $W + Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του H.

11. Σε έναν χώρο Hilbert H, θεωρούμε δύο κλειστούς υποχώρους M, N, και τις αντίστοιχες ορθογώνιες προβολές P_M, P_N. Εξετάστε αν ισχύει πάντα $P_M \circ P_N = P_N \circ P_M$.

12. Θεωρούμε τον $C[-1, 1]$ με εσωτερικό γινόμενο το $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$. Βρείτε το ορθοκανονικό σύνολο που προκύπτει αν εφαρμόσουμε τη διαδικασία Gram-Schmidt στις $1, t, t^2$.

Βρείτε $a, b, c \in \mathbb{R}$ τέτοιους ώστε να ελαχιστοποιείται το

$$\int_{-1}^{1} (t^4 - a - bt - ct^2)^2 dt.$$

13. Έστω $T : H \to H$ φραγμένος γραμμικός τελεστής, του οποίου η εικόνα είναι μονοδιάστατη. Δείξτε ότι υπάρχουν $u, v \in H$ τέτοια ώστε

$$T(x) = \langle x, u\rangle v, \quad x \in H.$$

[*Υπόδειξη:* Υπάρχει $v \in H$ τέτοιο ώστε $T(x) = \lambda_x v$, $x \in H$. Δείξτε ότι η $x \mapsto \lambda_x$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, και χρησιμοποιήστε το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz.]

14. Έστω W κλειστός γραμμικός υπόχωρος του χώρου Hilbert H, και $f \in W^*$. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $\tilde{f} \in H^*$ τέτοιο ώστε $\tilde{f}|_W = f$ και $\|\tilde{f}\|_{H^*} = \|f\|_{W^*}$.

[*Υπόδειξη:* Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz στον W.]

15. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $\{e_k\}$ ορθοκανονική ακόλουθία στον X. Αν $x, y \in X$, δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

16. Έστω Y κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert H, και $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του Y. Δείξτε ότι αν $x \in H$, τότε το πλησιέστερο σημείο του Y προς το x είναι το $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$.

17. Δείξτε ότι η συνήθης ορθοκανονική βάση του ℓ_2 έχει την εξής ιδιότητα:

$$\forall f \in \ell_2^*, \quad f(e_n) \to 0.$$

18. Έστω H χώρος Hilbert, και (x_n) ορθογώνια ακολουθία στον H (δηλαδή, αν $n \neq m$, τότε $x_n \perp x_m$.) Τότε, η $\sum_n x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_n \|x_n\|^2$ συγκλίνει.

Υποδείξεις - απαντήσεις

1. (α) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\|x + ay\|^2 = \|x - ay\|^2 \Longrightarrow \|x\|^2 + 2a\langle x, y\rangle + \|ay\|^2 = \|x\|^2 - 2a\langle x, y\rangle + \|ay\|^2,$$

δηλαδή,

$$a\langle x, y\rangle = 0.$$

Παίρνοντας $a = 1$, βλέπουμε ότι $x \perp y$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, αν $x \perp y$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\|x + ay\|^2 = \|x\|^2 + \|ay\|^2 = \|x - ay\|^2.$$

(β) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\|x + ay\|^2 \geq \|x\|^2 \Longrightarrow \|x\|^2 + 2a\langle x, y\rangle + a^2\|y\|^2 \geq \|x\|^2,$$

δηλαδή,

$$2a\langle x, y\rangle + a^2\|x\|^2 \geq 0.$$

Διαιρώντας με a και παίρνοντας $a \to 0^+$, βλέπουμε ότι $\langle x, y\rangle \geq 0$, ενώ παίρνοντας $a \to 0^-$, βλέπουμε ότι $\langle x, y\rangle \leq 0$. Άρα, $\langle x, y\rangle = 0$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, αν $x \perp y$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\|x + ay\|^2 = \|x\|^2 + \|ay\|^2 \geq \|x\|^2.$$

2. Υψώνουμε την $\|x_n - y_n\|$ στο τετράγωνο:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x_n - y_n\|^2 &= \|x_n\|^2 + \|y_n\|^2 - 2\langle x_n, y_n\rangle \\ &\leq 2 - 2\langle x_n, y_n\rangle \to 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\|x_n - y_n\| \to 0$.

3. Υψώνουμε την $\|x_n - x\|$ στο τετράγωνο, και εφαρμόζουμε την υπόθεση για $y = x$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x_n - x\|^2 &= \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x_n, x\rangle \\ &\to \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, x\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\|x_n - x\| \to 0$.

4. Με απλές πράξεις βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{i\neq j}\|x_i - x_j\|^2 \quad + &\quad \|\sum_{i=1}^n x_i\|^2 = \sum_{i\neq j}(\|x_i\|^2 - 2\langle x_i, x_j\rangle + \|x_j\|^2) + \langle\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{j=1}^n x_j\rangle \\ &= (n-1)\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 - 2\sum_{i<j}\langle x_i, x_j\rangle + \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 + 2\sum_{i<j}\langle x_i, x_j\rangle \\ &= n\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2. \end{aligned}$$

Αν $\|x_i - x_j\| \geq 2$ όταν $i \neq j$, τότε για κάθε $y \in X$ έχουμε

$$i \neq j \Longrightarrow \|(x_i - y) - (x_j - y)\| \geq 2.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $y \in X$ και $r > 0$ τέτοια ώστε $\|y - x_i\| \leq r$, $i = 1, \ldots, n$. Τότε,

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} \cdot 4 &\leq \sum_{i\neq j}\|(x_i - y) - (x_j - y)\|^2 \\ &= n\sum_{i=1}^n \|x_i - y\|^2 - \|\sum_{i=1}^n x_i - ny\|^2 \\ &\leq n\sum_{i=1}^n \|x_i - y\|^2 \leq n\sum_{i=1}^n r^2 \\ &= n^2 r^2. \end{aligned}$$

Έπεται ότι
$$r^2 \geq \frac{2(n-1)}{n} \Longrightarrow r \geq \sqrt{\frac{2(n-1)}{n}}.$$

5. Αν $n=1$, έχουμε $\|x\|^2 + \|-x\|^2 = 2\|x\|^2$.

Για το επαγωγικό βήμα, γράφουμε
$$\begin{aligned}
\sum_{\varepsilon_i=\pm 1} \Big\|\sum_{i=1}^{k+1} \varepsilon_i x_i\Big\|^2 &= \sum_{\varepsilon_i=\pm 1} \left(\Big\|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i + x_{k+1}\Big\|^2 + \Big\|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i - x_{k+1}\Big\|^2 \right) \\
&= 2 \sum_{\varepsilon_i=\pm 1} \left(\Big\|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i\Big\|^2 + \|x_{k+1}\|^2 \right) \\
&= 2 \sum_{\varepsilon_i=\pm 1} \Big\|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i\Big\|^2 + 2\cdot 2^k \|x_{k+1}\|^2 \\
&= 2\cdot 2^k \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2 + 2\cdot 2^k \|x_{k+1}\|^2 \\
&= 2^{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \|x_i\|^2.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε διαδοχικά: τον κανόνα του παραλληλογράμμου για τα $\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i$ και x_{k+1} (για κάθε επιλογή των $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$), την επαγωγική υπόθεση για τα $x_1, \ldots, x_k$, και το γεγονός ότι το $\{-1,1\}^k$ έχει 2^k στοιχεία.

6. (α) Έστω $x \in A$. Από τον ορισμό του $A^\perp$, για κάθε $y \in A^\perp$ έχουμε $\langle x, y\rangle = 0$. Όμως αυτό σημαίνει ότι
$$x \in (A^\perp)^\perp =: A^{\perp\perp}.$$
Αφού το $x \in A$ ήταν τυχόν, έχουμε $A \subseteq A^{\perp\perp}$.

(β) Αν $x \in B^\perp$, τότε $x \perp y$ για κάθε $y \in B$. Αφού $A \subseteq B$, αυτό σημαίνει ότι $x \perp y$ για κάθε $y \in A$, άρα $x \in A^\perp$.

(γ) Εφαρμόζοντας το (α) για το $A^\perp$ στη θέση του A, έχουμε
$$A^\perp \subseteq (A^\perp)^{\perp\perp} = A^{\perp\perp\perp}.$$
Από την άλλη πλευρά, αφού $A \subseteq A^{\perp\perp}$, το (β) μάς δίνει
$$A^{\perp\perp\perp} = (A^{\perp\perp})^\perp \subseteq A^\perp.$$
Επομένως, $A^{\perp\perp\perp} = A^\perp$.

7. Ο $Y^{\perp\perp}$ είναι (πάντα) κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H, άρα, αν $Y = Y^{\perp\perp}$ τότε ο Y είναι κλειστός.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση: ξέρουμε ότι $Y \subseteq Y^{\perp\perp}$, αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $Y^{\perp\perp} \subseteq Y$. Έστω $x \in Y^{\perp\perp}$. Αφού ο H είναι χώρος Hilbert και ο Y κλειστός υπόχωρός του, το x γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = y + z$, όπου $y \in Y$ και $z \in Y^\perp$. Όμως, $x \in Y^{\perp\perp}$ και $y \in Y \subseteq Y^{\perp\perp}$, άρα
$$z = x - y \in Y^{\perp\perp}.$$
Αφού $z \in Y^{\perp\perp} \cap Y^\perp$, έχουμε $z \perp z$. Άρα, $z = 0$. Αυτό σημαίνει ότι $x = y \in Y$, και αφού το $x \in Y^{\perp\perp}$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $Y = Y^{\perp\perp}$.

8. Αφού $M, N \subseteq M + N$, έχουμε $(M+N)^\perp \subseteq M^\perp, N^\perp$, άρα
$$(M+N)^\perp \subseteq M^\perp \cap N^\perp.$$
Αντίστροφα, έστω $x \in M^\perp \cap N^\perp$ και $w \in M + N$. Τότε, $w = m + n$ για κάποια $m \in M$ και $n \in N$, και αφού $x \perp m, n$ παίρνουμε
$$\langle x, w\rangle = \langle x, m\rangle + \langle x, n\rangle = 0,$$
δηλαδή, $x \perp w$. Έπεται ότι $x \in (M+N)^\perp$, δηλαδή
$$M^\perp \cap N^\perp \subseteq (M+N)^\perp.$$

Αυτό αποδεικνύει την πρώτη ισότητα. Για τη δεύτερη, βάζουμε στην πρώτη τους $M^\perp, N^\perp$ στη θέση των M, N: έχουμε

$$M^{\perp\perp} \cap N^{\perp\perp} = (M^\perp + N^\perp)^\perp,$$

και αφού οι M, N είναι κλειστοί, παίρνουμε

$$M \cap N = (M^\perp + N^\perp)^\perp.$$

Παίρνοντας ορθογώνια συμπληρώματα, βλέπουμε ότι

$$(*) \qquad (M \cap N)^\perp = (M^\perp + N^\perp)^{\perp\perp}.$$

Μένει να δείξουμε ότι: αν F είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του H, τότε $F^{\perp\perp} = \overline{F}$ (σημειώστε ότι ο $M^\perp + N^\perp$ μπορεί να μην είναι κλειστός υπόχωρος του H). Στην Άσκηση 7 είδαμε ότι $F \subseteq F^{\perp\perp}$ και αφού ο $F^{\perp\perp}$ είναι κλειστός έπεται ότι $\overline{F} \subseteq F^{\perp\perp}$. Αν υπήρχε $z \in F^{\perp\perp} \setminus \overline{F}$, τότε το μη μηδενικό διάνυσμα $z - P_F(z)$ θα ανήκε στον $F^\perp \cap F^{\perp\perp} = \{0\}$ (γιατί;), το οποίο είναι άτοπο. Άρα, έχουμε ισότητα, και θέτοντας $F = M^\perp + N^\perp$ στην $(*)$ έχουμε το ζητούμενο.

9. Θεωρούμε τον $H = \ell_2$, και σαν F παίρνουμε τον υπόχωρο c_{00} που αποτελείται από τις τελικά μηδενικές ακολουθίες. Προφανώς $F \neq H$, γιατί

$$\left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right) \in \ell_2 \setminus c_{00}.$$

Από την άλλη πλευρά, $e_n \in c_{00}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν λοιπόν $y \in c_{00}^\perp$, το $y = (\eta_n)$ πρέπει να ικανοποιεί τις

$$\eta_n = \langle y, e_n \rangle = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

δηλαδή $y = 0$. Άρα, $c_{00}^\perp = \{0\}$. Τότε,

$$c_{00} + c_{00}^\perp = c_{00} \neq \ell_2.$$

10. Έστω $x_n = w_n + z_n$ ακολουθία στον $W + Z$, η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in H$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $w \in W$ και $z \in Z$ τέτοια ώστε $x = w + z$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο $W + Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του H (γιατί;).

Η (x_n) συγκλίνει, άρα είναι ακολουθία Cauchy: έχουμε $\|x_n - x_m\| \to 0$ καθώς $m, n \to \infty$. Όμως, από την καθετότητα των W και Z, και από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, έχουμε

$$\|w_n - w_m\|^2 + \|z_n - z_m\|^2 = \|x_n - x_m\|^2,$$

και αυτό δείχνει ότι οι (w_n), (z_n) είναι ακολουθίες Cauchy στους W, Z αντίστοιχα. Οι W, Z είναι κλειστοί υπόχωροι του H, άρα είναι πλήρεις σαν μετρικοί χώροι. Επομένως, υπάρχουν $w \in W$ και $z \in Z$ τέτοια ώστε $w_n \to w$ και $z_n \to z$. Έπεται ότι $x_n = w_n + z_n \to w + z$, και από μοναδικότητα του ορίου, $x = w + z \in W + Z$.

11. Στον $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε τους $M = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ και $N = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$. Τότε,

$$(P_M \circ P_N)(1, 1) = P_M(1, 1) = (1, 0),$$

ενώ

$$(P_N \circ P_M)(1, 1) = P_N(1, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Άρα, $P_M \circ P_N \neq P_N \circ P_M$.

Ισχύει όμως ισότητα αν $M \perp N$: για κάθε $x \in H$ έχουμε

$$(P_M \circ P_N)(x) = (P_N \circ P_M)(x) = 0,$$

δηλαδή $P_M \circ P_N = P_N \circ P_M \equiv 0$.

12. Οι τρείς πρώτες συναρτήσεις που προκύπτουν από την ορθοκανονικοποίηση είναι οι εξής:

(α) $f_1(t) = \frac{1}{\|1\|} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(β) $f_2(t) = \frac{t - \langle t, f_1 \rangle f_1(t)}{\|t - \langle t, f_1 \rangle f_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}} t$.

(γ) $f_3(t) = \frac{t^2 - \langle t^2, f_1 \rangle f_1(t) - \langle t^2, f_2 \rangle f_2(t)}{\|t^2 - \langle t^2, f_1 \rangle f_1 - \langle t^2, f_2 \rangle f_2\|} = \sqrt{\frac{45}{8}} (t^2 - \frac{1}{3})$.

Παρατηρούμε ότι

$$\min_{a,b,c}\int_{-1}^{1}|t^4-a-bt-ct^2|^2dt=d^2(t^4,\langle 1,t,t^2\rangle),$$

επομένως μπορούμε να βρούμε τα βέλτιστα a,b,c βρίσκοντας το πλησιέστερο σημείο του $\langle 1,t,t^2\rangle$ προς την t^4. Όμως, οι f_1,f_2,f_3 είναι ορθοκανονική βάση του $\langle 1,t,t^2\rangle$, άρα η λύση δίνεται από την

$$g(t)=\langle t^1,f_1\rangle f_1(t)+\langle t^4,f_2\rangle f_2(t)+\langle t^4,f_3\rangle f_3(t)=\ldots=\frac{6}{7}t^2-\frac{3}{35},$$

το οποίο δίνει

$$a=-\frac{3}{35},\quad b=0,\quad c=\frac{6}{7}.$$

13. Υποθέτουμε ότι $R(T)=\mathrm{span}\{v\}$ για κάποιο $v\neq o$. Τότε, για κάθε $x\in H$ έχουμε

$$T(x)=\lambda_x v,$$

όπου ο $\lambda_x\in\mathbb{R}$ εξαρτάται από το x. Μπορούμε να υπολογίσουμε το λ_x μέσω του T ως εξής:

$$\langle Tx,v\rangle=\lambda_x\langle v,v\rangle\Longrightarrow\lambda_x=\Big\langle Tx,\frac{v}{\|v\|^2}\Big\rangle.$$

Παρατηρούμε ότι το $f:H\to\mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$f(x)=\Big\langle Tx,\frac{v}{\|v\|^2}\Big\rangle,$$

είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές: η γραμμικότητα ελέγχεται εύκολα, και

$$|f(x)|=\Big|\Big\langle Tx,\frac{v}{\|v\|^2}\Big\rangle\Big|\leq\|Tx\|\cdot\Big\|\frac{v}{\|v\|^2}\Big\|\leq\frac{\|T\|}{\|v\|}\|x\|.$$

Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει $u\in H$ τέτοιο ώστε

$$\lambda_x=f(x)=\langle x,u\rangle,\quad x\in H.$$

Άρα, $T(x)=\lambda_x v=\langle x,u\rangle v$ για κάθε $x\in H$.

14. Ο W είναι χώρος Hilbert, άρα το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz μας δίνει μοναδικό $w\in W$ τέτοιο ώστε

$$f(x)=\langle w,x\rangle,\quad x\in W.$$

Αφού (προφανώς) $w\in H$, μπορούμε να ορίσουμε $\tilde{f}:H\to\mathbb{R}$ με

$$\tilde{f}(x)=\langle w,x\rangle,\quad x\in H.$$

Τότε, το $\tilde{f}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον H, επεκτείνει το f, και

$$\|f\|_{W^*}=\|w\|=\|\tilde{f}\|_{H^*}.$$

Μένει να δείξουμε τη μοναδικότητα: έστω ότι κάποιο $g\in H^*$ ικανοποιεί τα παραπάνω. Τότε, από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz στον H, υπάρχει $u\in H$ τέτοιο ώστε

$$g(x)=\langle u,x\rangle,\quad x\in H.$$

Όμως τότε, $\langle w-u,x\rangle=0$ για κάθε $x\in W$, οπότε $w-u=z\in W^\perp$. Τότε,

$$\|u\|^2=\|w\|^2+\|z\|^2$$

από το Πυθαγόρειο θεώρημα (εξηγήστε), και αφού $\|u\|=\|g\|=\|f\|=\|\tilde{f}\|=\|w\|$, πρέπει να έχουμε $\|z\|=0$, το οποίο δίνει $z=0\Longrightarrow w=u$. Έπεται ότι $g=\tilde{f}$.

15. Εφαρμόζουμε πρώτα την ανισότητα Cauchy-Schwarz, και κατόπιν την ανισότητα του Bessel:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle\langle y,e_k\rangle| &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e_k\rangle^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\langle y,e_k\rangle^2\right)^{1/2}\\ &\leq \|x\|\cdot\|y\|.\end{aligned}$$

16. Έστω y το πλησιέστερο σημείο του Y προς το x. Αφού $y \in Y$ και η $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του Y, το y γράφεται στη μορφή

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle e_n.$$

Όμως ξέρουμε ότι $x - y \perp Y$ και $e_n \in Y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\langle x - y, e_n \rangle = 0 \Longrightarrow \langle x, e_n \rangle = \langle y, e_n \rangle$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

17. Έστω $f \in \ell_2^*$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει $y \in \ell_2$ τέτοιο ώστε

$$f(x) = \langle y, x \rangle, \quad x \in \ell_2.$$

Ειδικότερα, $f(e_n) = \langle y, e_n \rangle$. Όμως, από την ταυτότητα του Parseval έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle^2 = \|y\|^2 < +\infty,$$

άρα, $\langle y, e_n \rangle^2 \to 0$, δηλαδή $f(e_n) \to 0$.

18. Ο H είναι πλήρης, άρα η $\sum_n x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $s_m = \sum_{n=1}^{m} x_n$ είναι Cauchy. Όμως, αν $l > m$ έχουμε

$$\|s_l - s_m\|^2 = \|x_{m+1} + \cdots + x_l\|^2 = \sum_{n=m+1}^{l} \|x_n\|^2,$$

από το Πυθαγόρειο θεώρημα. Άρα, η (s_m) είναι Cauchy αν και μόνο αν η

$$t_m = \sum_{n=1}^{m} \|x_n\|^2$$

είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$, δηλαδή αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ συγκλίνει.

Κεφάλαιο 7

Το Θεώρημα Hahn - Banach

7.1 Το Λήμμα του Zorn

Έστω M ένα μη κενό σύνολο. Μια σχέση $\leq$ στο M λέγεται *μερική διάταξη* αν ικανοποιεί τα εξής:

(1) για κάθε $a \in M$, $a \leq a$ (ανακλαστική ιδιότητα).

(2) αν $a \leq b$ και $b \leq a$, τότε $a = b$ (αντισυμμετρική ιδιότητα).

(3) αν $a \leq b$ και $b \leq c$, τότε $a \leq c$ (μεταβατική ιδιότητα).

Το M λέγεται τότε *μερικά διατεταγμένο σύνολο* (ως προς την $\leq$). Από τον ορισμό φαίνεται ότι μπορεί στο M να υπάρχουν a και b για τα οποία να μην ισχύει καμμία από τις $a \leq b$ και $b \leq a$ (τότε, λέμε ότι τα a και b *δεν συγκρίνονται.*) Τα a και b *συγκρίνονται* αν ισχύει τουλάχιστον μία από τις $a \leq b$ ή $b \leq a$.

(α) Ένα μη κενό υποσύνολο A του M λέγεται *ολικά διατεταγμένο* (ή *αλυσίδα*) αν οποιαδήποτε δύο στοιχεία του συγκρίνονται.

(β) Αν $W \neq \emptyset$, $W \subseteq M$ και $u \in M$, λέμε ότι το u είναι *άνω φράγμα* για το W αν: για κάθε $x \in W$ ισχύει $x \leq u$. Ένα υποσύνολο W του M μπορεί να έχει ή να μην έχει άνω φράγμα.

(γ) Το r λέγεται *μέγιστο στοιχείο* του M αν για κάθε $x \in M$ ισχύει $x \leq r$. Αν το M έχει μέγιστο στοιχείο, τότε αυτό είναι μοναδικό (άσκηση).

(δ) Το $m \in M$ λέγεται *μεγιστικό στοιχείο* του M αν: για κάθε $x \in M$ με $m \leq x$ ισχύει $m = x$. Δηλαδή, αν δεν υπάρχει στοιχείο του M γνήσια μεγαλύτερο από το m. Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο M μπορεί να έχει ή να μην έχει μεγιστικά στοιχεία. Αν το M έχει μέγιστο στοιχείο, τότε αυτό είναι το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο του M (γιατί;).

Παραδείγματα (α) Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών με τη συνήθη διάταξη είναι ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο που δεν περιέχει μεγιστικά στοιχεία.

(β) Έστω $X \neq \emptyset$ και $M = \mathcal{P}(X)$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X (το *δυναμοσύνολο* του X). Ορίζουμε $\leq$ στο M ως εξής:

$$A \leq B \Longleftrightarrow A \subseteq B.$$

Η $\leq$ είναι μερική διάταξη στο M (και αν το X έχει περισσότερα από ένα στοιχεία, τότε υπάρχουν $A, B \in M$ που δεν συγκρίνονται: πάρτε π.χ. A μη κενό, γνήσιο υποσύνολο του X, και $B = X \backslash A$.) Το M έχει *ένα* (ακριβώς) μεγιστικό στοιχείο, το X (το οποίο είναι το μέγιστο στοιχείο του M).

(γ) Θεωρούμε το σύνολο $M = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, των διατεταγμένων n-άδων πραγματικών αριθμών. Αν $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, λέμε ότι $x \leq y$ αν $\xi_i \leq \eta_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Το M είναι μερικά διατεταγμένο ως προς την $\leq$, και δεν περιέχει μεγιστικά στοιχεία.

(δ) Θεωρούμε το σύνολο $M = \mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, και λέμε ότι $m \leq n$ αν ο m διαιρεί τον n. Η $\leq$ είναι μερική διάταξη στο $\mathbb{N}$ (τα στοιχεία 3 και 7 του $\mathbb{N}$ δεν συγκρίνονται.) Το $A = \{3 \cdot 2^k : k = 0, 1, 2, \ldots\}$ είναι ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Το $\mathbb{N}$ δεν περιέχει μεγιστικά στοιχεία ως προς την $\leq$.

Αν θεωρήσουμε το σύνολο $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ των *πρώτων αριθμών* με την ίδια διάταξη $\leq$, τότε κάθε στοιχείο του P είναι μεγιστικό. Πάλι με την $\leq$, το $\{2, 3, 4, 8\}$ έχει *δύο* μεγιστικά στοιχεία: το 3 και το 8 (ελέγξτε τους παραπάνω ισχυρισμούς.)

Λήμμα του Zorn *Έστω $M \neq \emptyset$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο (ως προς την $\leq$). Υποθέτουμε ότι κάθε αλυσίδα $A \subseteq M$ έχει άνω φράγμα στο M. Τότε, το M έχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο.*

Ας δοκιμάσουμε να «αποδείξουμε» αυτήν την πρόταση: το M είναι μη κενό, παίρνουμε λοιπόν κάποιο $x_1 \in M$. Αν το x_1 είναι μεγιστικό έχουμε το ζητούμενο, αλλιώς υπάρχει $x_2 \in M$ με $x_1 < x_2$, και το $\{x_1, x_2\}$ είναι αλυσίδα. Αν το x_2 είναι μεγιστικό έχουμε το ζητούμενο, αλλιώς υπάρχει $x_3 \in M$ με $x_1 < x_2 < x_3$ και το $\{x_1, x_2, x_3\}$ είναι αλυσίδα. Συνεχίζοντας έτσι, βρίσκουμε μεγιστικό στοιχείο x_n ή φτιάχνουμε αλυσίδα $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Αυτή έχει άνω φράγμα, έστω y_1 από την υπόθεση. Αν το y_1 είναι μεγιστικό, τελειώσαμε. Αλλιώς; Συνεχίζουμε όπως και πριν. Αυτό που δεν είναι φανερό είναι αν αυτή η διαδικασία θα μας δώσει κάποια στιγμή μεγιστικό στοιχείο του M.

Για την ακρίβεια, η μέθοδος αυτή δεν μπορεί να δώσει απόδειξη: το Λήμμα του Zorn είναι *ισοδύναμο* με το αξίωμα της επιλογής, και θα το δεχτούμε σαν *αξίωμα* στη μελέτη μας.

Ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιείται το Λήμμα του Zorn θα γίνει καθαρός με την απόδειξη του εξής θεωρήματος (την οποία είχαμε αναβάλλει):

Θεώρημα 7.1.1. *Κάθε γραμμικός χώρος $X \neq \{0\}$ έχει βάση Hamel.*

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο M όλων των γραμμικά ανεξάρτητων υποσυνόλων του X. Το M είναι μη κενό: αφού $X \neq \{0\}$, υπάρχει $x \in X$, $x \neq 0$. Το $\{x\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, άρα $\{x\} \in M$.

Ορίζουμε διάταξη $\leq$ στο M, θέτοντας $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$. Η $\leq$ είναι μερική διάταξη (παρατηρήστε ότι σε έναν γραμμικό χώρο, μπορούμε να έχουμε δύο *ξένα*, άρα μη συγκρίσιμα, γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα.)

Ισχυρισμός. Το $(M, \leq)$ ικανοποιεί την υπόθεση του Λήμματος του Zorn.

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{A} \subseteq M$ ολικά διατεταγμένο. Γράφουμε $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$, όπου κάθε A_i είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του X, και, αν $i, j \in I$, τότε είτε $A_i \subseteq A_j$ είτε $A_j \subseteq A_i$.

Ορίζουμε $U = \bigcup_{i \in I} A_i$. Προφανώς, $U \subseteq X$ και $A_i \subseteq U$ για κάθε $i \in I$. Δείχνουμε ότι $U \in M$, δηλαδή ότι το U είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αυτό θα δείξει ότι το U είναι άνω φράγμα του $\mathcal{A}$ στο M.

Έστω $x_1, \ldots, x_m \in U$. Αφού $x_k \in U$, $k = 1, \ldots, m$, υπάρχουν $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$ τέτοια ώστε $x_k \in A_{i_k}$. Το $\mathcal{A}$ είναι ολικά διατεταγμένο, άρα τα A_{i_k} συγκρίνονται ανά δύο. Αφού είναι πεπερασμένα το πλήθος, υπάρχει k_0 τέτοιο ώστε $A_{i_k} \subseteq A_{i_{k_0}}$, $k = 1, \ldots, m$. Δηλαδή, $x_1, \ldots, x_m \in A_{i_{k_0}}$. Το $A_{i_{k_0}}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, άρα το $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq A_{i_{k_0}}$ είναι κι αυτό γραμμικά ανεξάρτητο. Αφού το $\{x_1, \ldots, x_m\}$ ήταν το τυχόν πεπερασμένο υποσύνολο του U, το U είναι γραμμικά ανεξάρτητο. □

Τώρα, εφαρμόζεται το Λήμμα του Zorn: Το M έχει μεγιστικό στοιχείο B. Το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και για να δείξουμε ότι είναι βάση αρκεί να δούμε ότι παράγει τον X.

Έστω $Y = \mathrm{span}(B)$. Υποθέτουμε ότι $Y \neq X$. Τότε, υπάρχει $z \in X \backslash Y$, δηλαδή το z δεν γράφεται σαν πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του B. Θα δείξουμε ότι το $B \cup \{z\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο: Αν $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m + \mu z = 0$, τότε $\mu = 0$, αλλιώς το z θα ήταν γραμμικός συνδυασμός των $x_1, \ldots, x_m$. Άρα, $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = 0$, και αφού το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$.

Άρα, το B δεν είναι μεγιστικό στοιχείο του M. Το $B \cup \{z\}$ ανήκει στο M και περιέχει γνήσια το B. Αυτό είναι άτοπο.

Έπεται ότι $X = Y = \mathrm{span}(B)$, δηλαδή το B είναι βάση. □

Σημείωση: Η ουσία της απόδειξης βρίσκεται στο τελευταίο βήμα. Ουσιαστικά δείξαμε ότι αν B είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του X που δεν παράγει τον X, τότε μπορούμε να επεκτείνουμε το B σε ένα γνήσια μεγαλύτερο σύνολο $B' = B \cup \{z\}$, που είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητο. Το Λήμμα του Zorn μάς επιτρέπει να ισχυριστούμε την ύπαρξη μεγιστικού γραμμικά ανεξάρτητου υποσυνόλου του X. Αυτό δεν επεκτείνεται, άρα παράγει το χώρο, άρα είναι βάση.

Σε τέτοιες περιπτώσεις, όπου το ζητούμενο είναι κάποια «μεγιστική επέκταση», το Λήμμα του Zorn είναι εξαιρετικά χρήσιμο. Το Θεώρημα Hahn-Banach είναι, όπως θα δούμε, ακριβώς ένα θεώρημα επέκτασης.

7.2 Το Θεώρημα Hahn - Banach

Ορισμός Έστω X γραμμικός χώρος, και $p : X \to \mathbb{R}$. Το p λέγεται *υπογραμμικό συναρτησοειδές*, αν ικανοποιεί τα εξής:

(α) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ για κάθε $x, y \in X$,

(β) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ για κάθε $\lambda \geq 0$ και κάθε $x \in X$,

δηλαδή, αν είναι υποπροσθετικό και θετικά ομογενές. Παρατηρήστε ότι: δεν απαιτούμε το p να παίρνει μη αρνητικές τιμές, ούτε την $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (αν η p έχει κι αυτές τις ιδιότητες, τότε λέγεται *ημινόρμα*.)

Εύκολα ελέγχονται οι $p(0) = 0$ και $p(-x) \geq -p(x)$, $x \in X$ (άσκηση).

Παραδείγματα (α) Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές, τότε τα $f, |f|$ είναι υπογραμμικά συναρτησοειδή.

(β) Κάθε νόρμα $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

(γ) Η $p : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ με $p((\xi_k)) = \text{limsup}\xi_k$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές στον ℓ_∞.

Θεώρημα 7.2.1. *(Θεώρημα επέκτασης του Hahn) Έστω X γραμμικός χώρος, και $p : X \to \mathbb{R}$ υπογραμμικό συναρτησοειδές. Έστω Z γραμμικός υπόχωρος του X, και $f : Z \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές με την ιδιότητα: για κάθε $x \in Z$,*

$$(*) \qquad f(x) \leq p(x).$$

Τότε, υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

(α) $\tilde{f}(x) = f(x)$ αν $x \in Z$ (το $\tilde{f}$ είναι επέκταση του f),

(β) $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$.

(α) Παρατηρήστε ότι δεν υποθέτουμε καμμία τοπολογική δομή για το χώρο X (είναι απλώς ένας γραμμικός χώρος.)

(β) Όπως θα δούμε, το ουσιαστικό βήμα της απόδειξης είναι να δούμε πώς θα επεκτείνουμε το f από έναν υπόχωρο W σε έναν υπόχωρο W_1 που έχει «μία διάσταση παραπάνω», με γραμμικό τρόπο και χωρίς να χαλάσει η $(*)$. Από τη στιγμή που αυτό είναι δυνατό, το Λήμμα του Zorn μας εξασφαλίζει μια «μεγιστική επέκταση» $\tilde{f}$, κι αυτή (όπως θα δούμε) υποχρεούται να έχει πεδίο ορισμού ολόκληρον τον X.

Αρχίζουμε λοιπόν με το εξής Λήμμα:

Λήμμα 7.2.1. *Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος, ας υποθέσουμε επιπλέον ότι για κάποιον γραμμικό υπόχωρο W_1 του X ο οποίος περιέχει τον Z, έχουμε βρεί $f_1 : W_1 \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f_1|_Z = f$ και $f_1(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in W_1$.*

Έστω $y \in X \backslash W_1$, και $W_2 = \text{span}\{W_1, y\}$. Τότε, υπάρχει $f_2 : W_2 \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f_2|_{W_1} = f_1$ και $f_2(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in W_2$.

Απόδειξη: Κάθε $z \in W_2$ γράφεται *μονοσήμαντα* στη μορφή

$$z = x + \lambda y$$

για κάποια $x \in W_1$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ (άσκηση). Η γραμμική επέκταση f_2 που ζητάμε προσδιορίζεται λοιπόν μονοσήμαντα από την τιμή $a \in \mathbb{R}$ που θα επιλέξουμε σαν $f_2(y)$. Αν θέσουμε $f_2(y) = a$, τότε πρέπει να έχουμε

$$f_2(z) = f_2(x) + \lambda f_2(y) = f_1(x) + \lambda a, \tag{1}$$

αφού ζητάμε το f_2 να είναι γραμμικό και να επεκτείνει το f_1. Η άλλη ιδιότητα που ζητάμε από το a είναι η εξής: Για κάθε $x \in W_1$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f_1(x) + \lambda a \leq p(x + \lambda y). \tag{2}$$

Ισοδύναμα, παίρνοντας υπ' όψιν τις (1) και (2), ζητάμε $a \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in W_1$ και κάθε $\lambda > 0$,

$$f_1(x) + \lambda a \leq p(x + \lambda y) \quad , \quad f_1(x) - \lambda a \leq p(x - \lambda y). \tag{3}$$

Επειδή το p είναι θετικά ομογενές και το f_1 γραμμικό στον W_1, η (3) είναι ισοδύναμη με το εξής: για κάθε $x \in W_1$ και κάθε $\lambda > 0$,

$$f_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) + a \leq p\left(\frac{x}{\lambda} + y\right) \quad , \quad f_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) - a \leq p\left(\frac{x}{\lambda} - y\right), \tag{4}$$

και επειδή ο W_1 είναι υπόχωρος, ισοδύναμα ζητάμε $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: για κάθε $x, x' \in W_1$,

$$f_1(x') - p(x' - y) \leq a \leq p(x + y) - f_1(x).$$

Μιά τέτοια επιλογή του a είναι δυνατή αν και μόνο αν για κάθε $x, x' \in W_1$,

$$f_1(x) + f_1(x') \leq p(x' - y) + p(x + y).$$

Όμως,

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_1(x') &= f_1(x + x') \\ &\leq p(x + x') \\ &= p((x' - y) + (x + y)) \\ &\leq p(x' - y) + p(x + y), \end{aligned}$$

από την υπογραμμικότητα του p, την γραμμικότητα του f_1 στον W_1, την $f_1 \leq p$ στον W_1, και το γεγονός ότι το p ορίζεται σε ολόκληρο τον X. Αυτό αποδεικνύει το Λήμμα. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος: Έστω $\mathcal{W}$ η οικογένεια όλων των ζευγαριών (W_1, f_1) που ικανοποιούν τα εξής:

(α) ο W_1 είναι γραμμικός υπόχωρος του X, και $Z \subseteq W_1$.

(β) το $f_1 : W_1 \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικό, και $f_1|_Z = f$.

(γ) $f_1(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in W_1$.

Η $\mathcal{W}$ είναι μη κενή, αφού $(Z, f) \in \mathcal{W}$. Ορίζουμε διάταξη $\leq$ στην $\mathcal{W}$ θέτοντας $(W_1, f_1) \leq (W_2, f_2)$ αν και μόνο αν $W_1 \subseteq W_2$ και $f_2|_{W_1} = f_1$.

Το $(\mathcal{W}, \leq)$ είναι μερικά διατεταγμένο σύνολο. Θα δείξουμε ότι ικανοποιεί την υπόθεση του Λήμματος του Zorn: Έστω $\mathcal{C} = \{(W_i, f_i) : i \in I\}$ μια αλυσίδα στο $(\mathcal{W}, \leq)$. Ορίζουμε $W' = \bigcup_{i \in I} W_i$ και $f' : W' \to \mathbb{R}$ με $f'(x) = f_i(x)$, $x \in W_i$. Αποδεικνύουμε εύκολα ότι:

(α) Ο W' είναι γραμμικός υπόχωρος του X, και $Z \subseteq W_i \subseteq W'$ για κάθε $i \in I$ (θα χρειαστείτε το γεγονός ότι αν $i, j \in I$ τότε, είτε $W_i \subseteq W_j$ είτε $W_j \subseteq W_i$, αφού η $\mathcal{C}$ είναι αλυσίδα.)

(β) Η f' ορίζεται καλά, είναι γραμμική, και $f'(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in W'$ (κι εδώ θα χρειαστείτε το γεγονός ότι αν $i, j \in I$ τότε, είτε $f_j|_{W_i} = f_i$ είτε $f_i|_{W_j} = f_j$ αφού η $\mathcal{C}$ είναι αλυσίδα.)

(γ) Για κάθε $i \in I$, $f'|_{W_i} = f_i$.

Έπεται ότι $(W', f') \in \mathcal{W}$, και το (W', f') είναι άνω φράγμα της $\mathcal{C}$.

Από το Λήμμα του Zorn, το $(\mathcal{W}, \leq)$ έχει μεγιστικό στοιχείο (W_0, f_0). Από το Λήμμα 7.2.1 βλέπουμε ότι $W_0 = X$: Αν όχι, θα παίρναμε $y \in X \backslash W_0$, και ορίζοντας $W_0' = \text{span}\{W_0, y\}$ θα επεκτείναμε το f_0 σε $f_0' : W_0' \to \mathbb{R}$, οπότε το (W_0', f_0') θα ήταν γνήσια μεγαλύτερο από το (W_0, f_0), άτοπο.

Η $\tilde{f} = f_0 : X \to \mathbb{R}$ είναι η ζητούμενη επέκταση της f στον X. $\square$

Στο πλαίσιο των χώρων με νόρμα, το Θεώρημα Hahn-Banach διατυπώνεται συνήθως στην εξής μορφή:

Θεώρημα 7.2.2. *(Banach) Έστω X χώρος με νόρμα, Y γραμμικός υπόχωρος του X, και $f : Y \to \mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Δηλαδή,*

$$\|f\|_{Y^*} = \sup_{x \in Y, \|x\|=1} |f(x)| < +\infty.$$

Τότε, υπάρχει $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές με $\tilde{f}|_Y = f$ και $\|\tilde{f}\| = \|f\|_{Y^*}$. (Δηλαδή, υπάρχει συνεχής επέκταση του f στον X, με διατήρηση της νόρμας.)

Απόδειξη: Έχουμε $|f(x)| \leq \|f\|_{Y^*}\|x\|$ για κάθε $x \in Y$. Ορίζουμε $p : X \to \mathbb{R}$ με $p(x) = \|f\|_{Y^*}\|x\|$. Το p είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές:

(α) Για την υπογραμμικότητα, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} p(x+y) &= \|f\|_{Y^*}\|x+y\| \leq \|f\|_{Y^*}(\|x\| + \|y\|) \\ &= \|f\|_{Y^*}\|x\| + \|f\|_{Y^*}\|y\| \\ &= p(x) + p(y). \end{aligned}$$

(β) Το p είναι θετικά ομογενές: αν $\lambda > 0$, τότε

$$p(\lambda x) = \|f\|_{Y^*}\|\lambda x\| = \lambda\|f\|_{Y^*}\|x\| = \lambda p(x).$$

Από το Θεώρημα επέκτασης του Hahn, υπάρχει γραμμική επέκταση $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ της f, τέτοια ώστε

$$(1) \qquad \tilde{f}(x) \leq p(x) = \|f\|_{Y^*}\|x\|, \quad x \in X.$$

Παίρνοντας το $-x$ στη θέση του x και χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα του $\tilde{f}$, βλέπουμε ότι

$$(2) \qquad -\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leq p(-x) = \|f\|_{Y^*}\|-x\| = \|f\|_{Y^*}\|x\|, \quad x \in X.$$

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x \in X$,

$$|\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_{Y^*}\|x\|.$$

Άρα, $\tilde{f} \in X^*$, και $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|_{Y^*}$. Από την άλλη πλευρά, αφού $\tilde{f}|_Y = f$, παίρνουμε

$$\|\tilde{f}\| = \sup_{x \in X, \|x\|=1} |\tilde{f}(x)| \geq \sup_{x \in Y, \|x\|=1} |f(x)| = \|f\|_{Y^*}.$$

Δηλαδή, $\|\tilde{f}\| = \|f\|_{Y^*}$. $\square$

Το Θεώρημα 7.2.2 μάς λέει ότι ο X^* είναι «πλούσιος σε συναρτησοειδή». Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε πολλές εφαρμογές αυτού του είδους. Δίνουμε εδώ ένα πρώτο παράδειγμα.

Πρόταση 7.2.1. *Έστω X χώρος με νόρμα, $x_1, \ldots, x_m$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον X, και $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. Υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f(x_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, m$.*

Απόδειξη: Θέτουμε $Y = \text{span}\{x_1, \ldots, x_m\}$. Ο Y έχει διάσταση m και τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_m$ σχηματίζουν βάση του. Ορίζουμε $f_0 : Y \to \mathbb{R}$ με

$$f_0\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i.$$

Τότε, $f_0(x_i) = a_i$, και το f_0 είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον Y, αφού ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση (παρατηρήστε ότι το f_0 είναι καλά ορισμένο, αφού κάθε $x \in Y$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$.)

Από το Θεώρημα Hahn-Banach, το f_0 έχει φραγμένη γραμμική επέκταση $f \in X^*$. Προφανώς,

$$f(x_i) = f_0(x_i) = a_i, \quad i = 1, \ldots, m. \quad \square$$

7.3 Εφαρμογές

(α) **Ο X^* περιέχει «πολλά» συναρτησοειδή,**

Θεώρημα 7.3.1. *Έστω $X \neq \{0\}$ χώρος με νόρμα, και $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\|\tilde{f}\| = 1$ και $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τον υπόχωρο $Z = \text{span}\{x_0\}$ που παράγεται από το x_0, και ορίζουμε $f : Z \to \mathbb{R}$ με $f(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$. Το f είναι γραμμικό, και

$$\|f\|_{Z^*} = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{|f(\lambda x_0)|}{\|\lambda x_0\|} = 1.$$

Από το Θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, με $\|\tilde{f}\| = \|f\|_{Z^*} = 1$ και

$$\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|. \quad \square$$

Πόρισμα 7.3.1. Αν $X \neq \{0\}$, τότε $X^* \neq \{0\}$.

Απόδειξη: Αν $x_0 \neq 0$ και $\tilde{f}$ όπως στο Θεώρημα 7.3.1, τότε $\tilde{f} \neq 0$. $\square$

Ισχύει μάλιστα κάτι πολύ ισχυρότερο:

Θεώρημα 7.3.2. *Έστω X χώρος με νόρμα, και $x \in X$. Τότε,*

$$\|x\| = \max_{\|f\|=1} |f(x)|.$$

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 7.3.1, υπάρχει $\tilde{f} \in X^*$, $\|\tilde{f}\| = 1$ με $\tilde{f}(x) = \|x\|$. Άρα,

$$(*) \qquad \sup_{\|f\|=1} |f(x)| \geq |\tilde{f}(x)| = \|x\|.$$

Από την άλλη πλευρά, αν $\|f\| = 1$ τότε $|f(x)| \leq \|f\| \, \|x\| = \|x\|$. Άρα,

$$(**) \qquad \sup_{\|f\|=1} |f(x)| \leq \|x\|.$$

Από τις $(*)$ και $(**)$, $\|x\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)|$. Το sup είναι max λόγω του $\tilde{f}$. $\square$

Σημείωση: Γνωρίζουμε ήδη ότι $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$ για κάθε $f \in X^*$ (αυτό ήταν συνέπεια του *ορισμού* της νόρμας τελεστή.) Το Θεώρημα Hahn-Banach, στη μορφή του Θεωρήματος 7.3.2, μάς δίνει τη δυϊκή σχέση $\|x\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)|$: η νόρμα του x «πιάνεται» σαν τιμή κάποιου f από τη μοναδιαία σφαίρα του δυϊκού χώρου.

Πόρισμα 7.3.2. Αν $f(x) = f(y)$ για κάθε $f \in X^*$, τότε $x = y$.

Απόδειξη: $\|x - y\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x-y)| = \sup_{\|f\|=1} |f(x) - f(y)| = 0$, άρα $x = y$. $\square$

Σημείωση: Λέμε ότι ο X^* *διαχωρίζει* τα σημεία του X: αν $x \neq y$, τότε υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f(x) \neq f(y)$.

(β) **Ο δεύτερος δυϊκός ενός χώρου με νόρμα - Αυτοπαθείς χώροι**

Έστω X χώρος με νόρμα. Έχουμε δεί ότι ο X^* είναι χώρος Banach με νόρμα την $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\}$. Μπορούμε λοιπόν να μιλήσουμε για τον $(X^*)^*$, το χώρο όλων των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών $F : X^* \to \mathbb{R}$, με νόρμα την

$$\|F\| = \sup_{\|f\|_{X^*}=1} |F(f)|.$$

Για ευκολία γράφουμε $X^{**} := (X^*)^*$. Ο X^{**} είναι ο *δεύτερος δυϊκός* του X.

Κάθε $x \in X$ ορίζει με φυσιολογικό τρόπο ένα στοιχείο $\tau(x)$ του X^{**} ως εξής: ορίζουμε $\tau(x) : X^* \to \mathbb{R}$, με

$$[\tau(x)](f) = f(x), \quad f \in X^*.$$

Λήμμα 7.3.1. *Το $\tau(x)$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον X^{**}.*

Απόδειξη: Ελέγχουμε πρώτα τη γραμμικότητα του $\tau(x)$: Αν $f, g \in X^*$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned} [\tau(x)](\lambda f + \mu g) &= (\lambda f + \mu g)(x) \\ &= \lambda f(x) + \mu g(x) \\ &= \lambda[\tau(x)](f) + \mu[\tau(x)](g). \end{aligned}$$

Επίσης,

$$|[\tau(x)](f)| = |f(x)| \leq \|f\| \, \|x\| = \|x\| \, \|f\|, \quad f \in X^*.$$

Άρα, $\tau(x) \in X^{**}$ και $\|\tau(x)\|_{X^{**}} \leq \|x\|_X$. □

Λήμμα 7.3.2. *Η απεικόνιση $\tau : X \to X^{**}$ με $x \mapsto \tau(x)$ είναι γραμμική ισομετρία. Ειδικότερα, η τ είναι ένα προς ένα.*

Απόδειξη: (α) Έστω $x_1, x_2 \in X$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Για κάθε $f \in X^*$ έχουμε

$$\begin{aligned} [\tau(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)](f) &= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \\ &= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \\ &= \lambda_1[\tau(x_1)](f) + \lambda_2[\tau(x_2)](f) \\ &= [\lambda_1 \tau(x_1) + \lambda_2 \tau(x_2)](f). \end{aligned}$$

Άρα, $\tau(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \tau(x_1) + \lambda_2 \tau(x_2)$, δηλαδή η τ είναι γραμμική.

(β) Έστω $x \in X$. Από το Θεώρημα 7.3.1, υπάρχει $\tilde{f} \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|\tilde{f}\| = 1$ και $\tilde{f}(x) = \|x\|$. Άρα,

$$\|\tau(x)\|_{X^{**}} = \sup_{\|f\|=1} |[\tau(x)](f)| \geq |[\tau(x)](\tilde{f})| = |\tilde{f}(x)| = \|x\|.$$

Δηλαδή, $\|\tau(x)\|_{X^{**}} \geq \|x\|$. Στο προηγούμενο Λήμμα είδαμε ότι ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα. Επομένως,

$$\|\tau(x)\|_{X^{**}} = \|x\|,$$

και η τ είναι ισομετρία.

(γ) Προφανώς, $\tau(x) = 0 \Longrightarrow \|\tau(x)\|_{X^{**}} = 0 \Longrightarrow \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$. Επειδή η τ είναι γραμμική, αυτό δείχνει ότι η τ είναι ένα προς ένα. □

Άμεση συνέπεια των δύο λημμάτων είναι το εξής:

Θεώρημα 7.3.3. *Κάθε χώρος X με νόρμα εμφυτεύεται με φυσιολογικό τρόπο ισομετρικά στον X^{**} μέσω της $\tau : X \to X^{**}$ που ορίζεται από την*

$$[\tau(x)](f) = f(x). \quad \square$$

Παρατηρήσεις (1) Ο X είναι χώρος Banach αν και μόνο αν ο $\tau(x)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X^{**}. Πράγματι, ο X^{**} είναι πλήρης και ο $\tau(X)$ γραμμικός υπόχωρος του X^{**}. Ο $\tau(X)$ είναι κλειστός αν και μόνο αν είναι πλήρης, όμως ο $\tau(X)$ είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον X. Άρα, ο $\tau(X)$ είναι πλήρης αν και μόνο αν ο X είναι πλήρης.

(2) **Ορισμός** Η απεικόνιση τ λέγεται *κανονική εμφύτευση* του X στον X^{**}. Ο X λέγεται *αυτοπαθής* αν $\tau(X) = X^{**}$, δηλαδή αν η τ είναι επί. Τότε, ο X είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον X^{**}.

(3) Η ιδιότητα της αυτοπάθειας *δεν* είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη ισομετρικού ισομορφισμού ανάμεσα στους X και X^{**}. Αν ο X είναι αυτοπαθής, τότε *είναι* ισομετρικά ισομορφικός με τον X^{**}, αλλά με πολύ ισχυρό τρόπο: η κανονική εμφύτευση τ είναι ισομετρία επί από τον X στον X^{**}. Ο James (1951) έχει δώσει παράδειγμα χώρου που είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον δεύτερο δυϊκό του, χωρίς να είναι αυτοπαθής.

(4) Υπάρχουν πολλοί μη αυτοπαθείς χώροι. Πρώτα-πρώτα, ένας χώρος με νόρμα που δεν είναι πλήρης δεν μπορεί να είναι αυτοπαθής (γιατί;).

Ο c_0 δεν είναι αυτοπαθής, γιατί $c_0^* \simeq \ell_1$ και $\ell_1^* \simeq \ell_\infty$. Αν ο c_0 ήταν αυτοπαθής, τότε οι c_0 και ℓ_∞ θα ήταν ισομετρικά ισομορφικοί. Αυτό δεν μπορεί να ισχύει, αφού ο c_0 είναι διαχωρίσιμος ενώ ο ℓ_∞ όχι.

Ο ℓ_1 δεν είναι αυτοπαθής. Αν ήταν, θα ήταν ισομετρικά ισομορφικός με τον ℓ_∞^*, δηλαδή ο ℓ_∞^* θα ήταν διαχωρίσιμος. Όπως θα δούμε στην επόμενη υποπαράγραφο, αυτό θα σήμαινε ότι και ο ℓ_∞ είναι διαχωρίσιμος, άτοπο.

Πρόταση 7.3.1. *Ο ℓ_p, $1 < p < \infty$, είναι αυτοπαθής.*

Απόδειξη: Πρέπει να δείξουμε ότι $\tau(\ell_p) = (\ell_p^*)^*$. Θυμηθείτε ότι, για κάθε $f \in \ell_p^*$ υπάρχει $y(f) = (\eta_k) \in \ell_q$ τέτοιο ώστε $f(x) = \sum_k \xi_k \eta_k$ για κάθε $x = (\xi_k) \in \ell_p$.

Η $S_p : \ell_p^* \to \ell_q$ με $S_p(f) = y(f)$ είναι ισομετρία επί. Αντίστοιχα ορίζεται η $S_q : \ell_q^* \to \ell_p$.

Έστω $F \in (\ell_p^*)^*$. Το $F \circ S_p^{-1} \in \ell_q^*$, άρα υπάρχει $x \in \ell_p$ τέτοιο ώστε

$$(F \circ S_p^{-1})((\eta_k)) = \sum_k \xi_k \eta_k, \quad y = (\eta_k) \in \ell_q.$$

Δείχνουμε ότι $\tau(x) = F$. Έστω $f \in \ell_p^*$. Υπάρχει $y = (\eta_k) \in \ell_q$ τέτοιο ώστε

$$f(x) = \sum_k \xi_k \eta_k,$$

δηλαδή, $y = S_p(f)$. Όμως τότε,

$$F(f) = F \circ S_p^{-1} \circ S_p(f) = F \circ S_p^{-1}((\eta_k)) = \sum_k \xi_k \eta_k = f(x) = [\tau(x)](f).$$

Άρα, $F = \tau(x)$. Το F ήταν τυχόν, άρα $\tau(\ell_p) = \ell_p^{**}$. □

(γ) **Ο X^* δίνει πληροφορίες για τον X.**

Στην 7.3(α) είδαμε ότι ο X^* διαχωρίζει τα σημεία του X. Το Θεώρημα που ακολουθεί δείχνει ότι ο X^* *διαχωρίζει σημεία από κλειστούς υποχώρους*:

Θεώρημα 7.3.4. *Έστω X χώρος με νόρμα, Y γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X, και $x_0 \in X \setminus Y$. Αν*

$$\delta = d(x_0, Y) = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Y\},$$

τότε υπάρχει $\tilde{f} \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|\tilde{f}\|_{X^*} = 1$, $\tilde{f}(y) = 0$ για κάθε $y \in Y$, και $\tilde{f}(x_0) = \delta$.

Απόδειξη: Θεωρούμε τον υπόχωρο $Z = \mathrm{span}\{Y, x_0\}$. Κάθε $x \in Z$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = y + \lambda x_0$, για κάποια $y \in Y$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $f : Z \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = f(y + \lambda x_0) = \delta\lambda.$$

Τότε, $f(y) = 0$ για κάθε $y \in Y$, και $f(x_0) = \delta$. Πρέπει να δείξουμε ότι το f είναι φραγμένο στον Z, και $\|f\|_{Z^*} = 1$. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Hahn-Banach επεκτείνουμε το f σε κάποιο $\tilde{f} \in X^*$ με τις ζητούμενες ιδιότητες (ελέγξτε το.)

Το f είναι φραγμένο: Έστω $x = y_1 + \lambda x_0 \in Z$. Αν $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\lambda|\delta = |\lambda| \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\| \\ &\leq |\lambda| \left\| x_0 + \frac{1}{\lambda} y_1 \right\| \\ &= \|\lambda x_0 + y_1\| = \|x\|. \end{aligned}$$

Αν $\lambda = 0$, τότε $|f(x)| = 0 \leq \|x\|$. Άρα, $f \in Z^*$ και $\|f\|_{Z^*} \leq 1$.

Αντίστροφη ανισότητα για την $\|f\|_{Z^*}$: Υπάρχουν $y_n \in Y$ με $\|x_0 - y_n\| \to \delta$. Επίσης, έχουμε $\delta > 0$, γιατί ο Y είναι κλειστός και $x_0 \notin Y$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $0 \neq x_0 - y_n \in Z$, άρα

$$\|f\|_{Z^*} \geq \frac{|f(x_0 - y_n)|}{\|x_0 - y_n\|} = \frac{\delta}{\|x_0 - y_n\|} \to 1$$

καθώς $n \to \infty$. Άρα, $\|f\|_{Z^*} = 1$. □

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 7.3.4, δείχνουμε το εξής:

Θεώρημα 7.3.5. *Αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος, τότε ο X είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη: Θα μάς χρειαστεί ένα Λήμμα:

Λήμμα 7.3.3. *Η $S_{X^*} = \{f \in X^* : \|f\| = 1\}$ είναι διαχωρίσιμη ως προς την επαγόμενη μετρική.*

Απόδειξη: Υπάρχει M αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X^*. Ορίζουμε

$$M_1 = \{g = f/\|f\| : f \in M \backslash \{0\}\}.$$

Το M_1 είναι αριθμήσιμο υποσύνολο της S_{X^*}, και θα δείξουμε ότι είναι πυκνό στην S_{X^*}.

Έστω $f \in S_{X^*}$. Υπάρχει ακολουθία $\{h_k\}$ στο M με $h_k \to f$. Άρα, $\|h_k\| \to \|f\| = 1$, δηλαδή, τελικά $h_k \neq 0$. Οι $l_k = h_k/\|h_k\|$ ανήκουν στο M_1, και

$$\begin{aligned} \|f - l_k\| &= \left\| f - \frac{h_k}{\|h_k\|} \right\| \\ &= \left\| f - h_k + h_k \left(1 - \frac{1}{\|h_k\|}\right) \right\| \\ &\leq \|f - h_k\| + \|h_k\| \left| 1 - \frac{1}{\|h_k\|} \right| \to 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\overline{M_1} = S_{X^*}$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος: Θεωρούμε $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο της S_{X^*}. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\|g_n\| = \sup_{\|x\|=1} |g_n(x)| = 1$, άρα υπάρχει $x_n \in X$, $\|x\| = 1$, τέτοιο ώστε

$$|g_n(x_n)| > \frac{1}{2}.$$

Ορίζουμε $Y = \text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Η ιδέα είναι ότι επειδή τα g_n είναι πυκνά στην S_{X^*}, πρέπει και τα x_n να είναι «πυκνά» στην S_X, οπότε $\overline{Y} = X$, το οποίο θα δείξει ότι ο X είναι διαχωρίσιμος.

Αυστηρή απόδειξη: Έστω ότι $\overline{Y} \neq X$. Τότε, από το Θεώρημα 7.3.4, υπάρχει $\tilde{f} \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|\tilde{f}\| = 1$ και $\tilde{f}(y) = 0$ για κάθε $y \in Y$. Ειδικότερα, $\tilde{f}(x_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\tilde{f} - g_n\| \geq |(\tilde{f} - g_n)(x_n)| = |\tilde{f}(x_n) - g_n(x_n)| = |g_n(x_n)| > 1/2,$$

άτοπο, γιατί το $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στην S_{X^*}.

Άρα, $\overline{Y} = X$. Όμως, ο $\overline{Y}$ είναι διαχωρίσιμος: οι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί των x_n με ρητούς συντελεστές είναι πυκνοί στον $\overline{Y}$ (άσκηση). Άρα, ο X είναι διαχωρίσιμος. □

7.4 Διαχωριστικά θεωρήματα

Ορισμός Έστω X χώρος με νόρμα, και A, B μη κενά υποσύνολα του X.

(α) Λέμε ότι τα A, B *διαχωρίζονται*, αν υπάρχουν $f \in X^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f(a) \geq \lambda$ για κάθε $a \in A$, και, $f(b) \leq \lambda$ για κάθε $b \in B$.

(β) Λέμε ότι τα A, B *διαχωρίζονται γνήσια*, αν υπάρχουν $f \in X^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f(a) > \lambda$ για κάθε $a \in A$, και, $f(b) < \lambda$ για κάθε $b \in B$.

Ο όρος δικαιολογείται από το γεγονός ότι το $\{x \in X : f(x) = \lambda\}$ είναι ένα κλειστό υπερεπίπεδο, το οποίο χωρίζει τον X σε δύο ξένους «ημιχώρους» εκ των οποίων ο ένας περιέχει το A και ο άλλος το B.

Τα διαχωριστικά θεωρήματα που θα συζητήσουμε αφορούν κυρτά σύνολα, και η απόδειξή τους βασίζεται πολύ ουσιαστικά στο Θεώρημα Hahn-Banach. Γι' αυτό και αναφερόμαστε σ' αυτά με τον όρο «γεωμετρική μορφή του Θεωρήματος Hahn-Banach».

Λήμμα 7.4.1. *Έστω X χώρος με νόρμα, και $A \subseteq X$ ανοιχτό και κυρτό, με $0 \in A$. Ορίζουμε*

$$q_A(x) = \inf\{t > 0 : x \in tA\}.$$

Τότε, το q_A είναι ένα μη αρνητικό υπογραμμικό συναρτησοειδές, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$(*) \qquad q_A(x) \leq M\|x\|, \quad x \in X$$

και

$$(**) \qquad A = \{x \in X : q_A(x) < 1\}.$$

Απόδειξη: Η q_A ορίζεται καλά: το A είναι ανοιχτό και περιέχει το 0, άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $D(0, \delta) \subseteq A$. Έπεται ότι αν $0 \neq x \in X$, τότε $(\delta/2\|x\|)x \in A$, άρα $\frac{2}{\delta}\|x\| \in \{t > 0 : x \in tA\}$ και το σύνολο αυτό είναι κάτω φραγμένο από το 0, άρα έχει μέγιστο κάτω φράγμα. Επίσης,

$$q_A(x) \leq \frac{2}{\delta}\|x\|,$$

δηλαδή η $(*)$ ισχύει με $M = 2/\delta$ (αν $x = 0$, τότε από την κυρτότητα του A έπεται ότι $0 \in tA$ για κάθε $t > 0$ (γιατί;), άρα $q_A(0) = 0$.)

Δείχνουμε τώρα τις δύο ιδιότητες του υπογραμμικού συναρτησοειδούς: Έστω $\lambda > 0$. Τότε,

$$\begin{aligned} q_A(x) &= \inf\{t > 0 : \lambda x \in tA\} = \inf\{t > 0 : x \in (t/\lambda)A\} \\ &= \lambda \inf\{(t/\lambda) : t > 0,\ x \in (t/\lambda)A\} = \lambda \inf\{s > 0 : x \in sA\} \\ &= \lambda q_A(x). \end{aligned}$$

Για την υποπροσθετικότητα, έστω $x, y \in X$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $t, s > 0$ τέτοια ώστε $t < q_A(x) + \varepsilon$, $s < q_A(y) + \varepsilon$, και $x \in tA$, $y \in sA$. Από την κυρτότητα του A έχουμε

$$tA + sA = (t + s)A$$

(γιατί;), άρα $x+y\in(t+s)A$. Έπεται ότι

$$q_A(x+y)\le t+s<q_A(x)+q_A(y)+2\varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν,

$$q_A(x+y)\le q_A(x)+q_A(y).$$

Τέλος, δείχνουμε ότι $A=\{x\in X: q_A(x)<1\}$. Αν $q_A(x)<1$, τότε υπάρχει r τέτοιο ώστε $q_A(x)<r<1$ και $x\in rA\subseteq A$. Αντίστροφα, αν $x\in A$, επειδή το A είναι ανοιχτό υπάρχει $t>0$ τ.ω $x+tx\in A$ (άσκηση), οπότε $q_A(x)\le\frac{1}{1+t}<1$. □

Θεώρημα 7.4.1. *Έστω X χώρος με νόρμα, και A μη κενό, ανοιχτό κυρτό υποσύνολο του X που δεν περιέχει το 0. Τότε, υπάρχει $\tilde{f}\in X^*$ με την ιδιότητα $\tilde{f}(x)>0$ για κάθε $x\in A$. Δηλαδή, το $\tilde{f}$ διαχωρίζει το A από το $\{0\}$.*

Απόδειξη: Έστω $x_0\in A$. Το $A'=x_0-A$ είναι ανοιχτό, κυρτό και περιέχει το 0. Σύμφωνα με το Λήμμα υπάρχει θετικό υπογραμμικό συναρτησοειδές $q:A\to\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$q(x)\le M\|x\|,\quad x\in X,$$

και $q(x)<1$ αν και μόνο αν $x\in A$. Ειδικότερα, $q(x_0)\ge 1$ (γιατί;).

Θεωρούμε τον υπόχωρο $W=\langle x_0\rangle$ που παράγει το x_0, και ορίζουμε $f:W\to\mathbb{R}$ με $f(\lambda x_0)=\lambda q(x_0)$. Η f φράσσεται από το q: αν $\lambda\ge 0$, τότε $f(\lambda x_0)=q(\lambda x_0)$, ενώ αν $\lambda<0$, τότε $f(\lambda x_0)<0\le q(\lambda x_0)$. Επίσης, $f\in W^*$ γιατί

$$|f(\lambda x_0)|=|\lambda|q(x_0)\le M|\lambda|\,\|x_0\|=M\|\lambda x_0\|.$$

Από το Θεώρημα Hahn-Banach, η f επεκτείνεται σε $\tilde{f}\in X^*$ με $\|\tilde{f}\|=\|f\|_{W^*}$. Τέλος, για κάθε $x\in A$ έχουμε $x_0-x\in A'$, άρα $q(x_0-x)<1$, απ' όπου βλέπουμε ότι

$$\tilde{f}(x_0)-\tilde{f}(x)=\tilde{f}(x_0-x)\le q(x_0-x)<1.$$

Παίρνοντας υπ' όψιν και την $q(x_0)\ge 1$, συμπεραίνουμε ότι

$$\forall x\in A,\quad \tilde{f}(x)>\tilde{f}(x_0)-1=q(x_0)-1\ge 0.\quad\square$$

Θεώρημα 7.4.2. *Έστω X χώρος με νόρμα, και A,B ξένα κυρτά σύνολα, με το A ανοιχτό. Τότε, υπάρχουν $f\in X^*$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f(a)<\lambda$ αν $a\in A$, και $f(b)\ge\lambda$ αν $b\in B$. Αν το B είναι κι αυτό ανοιχτό, τότε τα A,B διαχωρίζονται γνήσια.*

Απόδειξη: Θέτουμε $G=A-B:=\{a-b:a\in A,b\in B\}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι το G είναι κυρτό, και αφού $G=\bigcup_{b\in B}(A-b)$, το G είναι ανοιχτό. Από την $A\cap B\neq\emptyset$ έπεται ότι $0\notin G$. Από το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει $f\in X^*$ τέτοιο ώστε $f(x)>0$ για κάθε $x\in G$.

Έστω $a\in A$, $b\in B$. Τότε, $a-b\in G$ άρα $f(a-b)>0$. Δηλαδή, $f(a)>f(b)$. Υπάρχει λοιπόν $\lambda\in\mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$(*)\qquad \sup\{f(b):b\in B\}\le\lambda\le\inf\{f(a):a\in A\}.$$

Το A έχει υποτεθεί ανοιχτό και κυρτό, άρα το $f(A)$ είναι ένα ανοιχτό διάστημα στο $\mathbb{R}$ (άσκηση), άρα η $(*)$ δίνει

$$\forall a\in A,\quad f(a)>\lambda\quad,\quad\forall b\in B,\quad f(b)\le\lambda.$$

Αν και το B είναι ανοιχτό, τότε το $f(B)$ είναι επίσης ανοιχτό διάστημα, άρα $f(b)<\lambda$ για κάθε $b\in B$, δηλαδή τα A,B διαχωρίζονται γνήσια. □

Τέλος, δείχνουμε ένα διαχωριστικό θεώρημα για ξένα κλειστά και κυρτά υποσύνολα του X, αν ένα από αυτά είναι συμπαγές. Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής λήμμα:

Λήμμα 7.4.2. *Έστω X χώρος με νόρμα, K συμπαγές υποσύνολο του X, και A ανοιχτό υποσύνολο του X με $K \subseteq A$. Τότε, υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε*

$$K + D(0, r) \subseteq A,$$

όπου $K + D(0, r) = \{x + y : x \in K, \|y\| < r\} = \{x \in X : d(x, K) < r\}$.

Απόδειξη: Για κάθε $x \in K$ έχουμε $x \in A$ και το A είναι ανοιχτό, άρα υπάρχει $r_x > 0$ τέτοιο ώστε $D(x, r_x) = x + D(0, r_x) \subseteq A$.

Τότε,

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} D(x, r_x/2),$$

και αφού το K είναι συμπαγές, υπάρχουν $x_1, \dots, x_m \in K$ τέτοια ώστε

$$K \subseteq D(x_1, r_{x_1}/2) \cup \cdots \cup D(x_m, r_{x_m}/2).$$

Θέτουμε $r = \min\{r_{x_1}/2, \dots, r_{x_m}/2\}$. Τότε,

$$K + D(0, r) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (x_i + D(0, r_{x_i})) \subseteq A. \quad \square$$

Θεώρημα 7.4.3. *Έστω X χώρος με νόρμα, και A, B δύο ξένα κλειστά κυρτά υποσύνολα του X. Αν το B είναι συμπαγές, τότε τα A, B διαχωρίζονται γνήσια.*

Απόδειξη: Αφού τα A, B είναι ξένα, το συμπαγές B περιέχεται στο ανοιχτό $X \backslash A$, και από το Λήμμα υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $B + D(0, r) \subseteq X \backslash A$, απ' όπου παίρνουμε

$$(B + D(0, r/2)) \cap (A + D(0, r/2)) = \emptyset.$$

Τα $A + D(0, r/2)$, $B + D(0, r/2)$ είναι ανοιχτά και κυρτά: κυρτά γιατί τα A, B και $D(0, r/2)$ είναι κυρτά, και ανοιχτά γιατί η $D(0, r/2)$ είναι ανοιχτό σύνολο. Από το Θεώρημα 7.4.2 διαχωρίζονται γνήσια, άρα το ίδιο ισχύει και για τα υποσύνολά τους A, B. $\square$

Παρατήρηση: Αν τα A, B υποτεθούν απλώς κλειστά, τότε το Θεώρημα 7.4.3 παύει να ισχύει. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε τα $A = \{(x, y) : y \leq 0\}$ και $B = \{(x, y) : x > 0, xy \geq 1\}$. Τα A, B είναι κλειστά, κυρτά και ξένα, αλλά δεν διαχωρίζονται γνήσια.

7.5 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι η απόλυτη τιμή γραμμικού συναρτησοειδούς είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

2. Δείξτε ότι κάθε νόρμα είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

3. Έστω X χώρος με νόρμα, και $p : X \to \mathbb{R}$ υποπροσθετικό συναρτησοειδές (δεν υποθέτουμε δηλαδή ότι είναι θετικά ομογενές.) Δείξτε ότι:

(α) Αν $p(0) = 0$ και το p είναι συνεχές στο 0, τότε είναι συνεχές σε κάθε $x_0 \in X$.

(β) Αν $p(x) \geq 0$ έξω από μιά σφαίρα $\{x : \|x\| = r\}$, τότε $p(x) \geq 0$ για κάθε $x \in X$.

4. Έστω p ένα υπογραμμικό συναρτησοειδές στον γραμμικό χώρο X. Ορίζουμε $Z = \langle x_0 \rangle$, και $f(x) = ap(x_0)$ αν $x = ax_0 \in Z$. Δείξτε ότι το f είναι γραμμικό συναρτησοειδές και $f(x) \leq p(x)$, $x \in Z$.

5. Έστω X γραμμικός χώρος και $p : X \to \mathbb{R}$ υπογραμμικό συναρτησοειδές. Δείξτε ότι υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$-p(-x) \leq f(x) \leq p(x), \quad x \in X.$$

6. Έστω X χώρος με νόρμα, και (f_n) φραγμένη ακολουθία στον X^*. Δείξτε ότι υπάρχει $f \in X^*$ με την ιδιότητα

$$\mathrm{liminf}_n f_n(x) \leq f(x) \leq \mathrm{limsup}_n f_n(x), \quad x \in X.$$

7. Δείξτε ότι αν ο X έχει τουλάχιστον n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, τότε και ο X^* έχει τουλάχιστον n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

8. Έστω Y κλειστός υπόχωρος του χώρου με νόρμα X, τέτοιος ώστε: αν $f \in X^*$ και $f|_Y \equiv 0$, τότε $f \equiv 0$. Δείξτε ότι $Y = X$.

9. Έστω Y υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα X. Ορίζουμε

$$A = \{f \in X^* : Y \subseteq \mathrm{Ker} f\}.$$

Δείξτε ότι $\overline{Y} = \bigcap\{\mathrm{Ker} f : f \in A\}$.

10. Έστω X και Y χώροι με νόρμα. Αν $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής, δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν

$$M = \sup\{f(Tx) : \|x\| \leq 1, \|f\| \leq 1\} < +\infty.$$

Σ' αυτή την περίπτωση, δείξτε ότι $\|T\| = M$.

11. Έστω X χώρος με νόρμα, και A μη κενό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι: $x \in \overline{\mathrm{span}(A)}$ αν και μόνο αν, για κάθε $f \in X^*$ με $f|_A \equiv 0$, ισχύει $f(x) = 0$.

12. Για κάθε υπόχωρο Y του χώρου με νόρμα X, ορίζουμε

$$N(Y) = \{f \in X^* : \forall y \in Y, \ \ f(y) = 0\}.$$

(α) Δείξτε ότι ο $N(Y)$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X^*.

(β) Δείξτε ότι αν Y_1, Y_2 είναι κλειστοί γραμμικοί υπόχωροι του X και $Y_1 \neq Y_2$, τότε $N(Y_1) \neq N(Y_2)$.

13. Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ορίζουμε $T^* : Y^* \to X^*$ με $T^*(f) = f \circ T$. Δείξτε ότι ο T^* ορίζεται καλά, είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και $\|T^*\| = \|T\|$.

14. Έστω X, Y δύο χώροι με νόρμα, και $X \neq \{0\}$. Δείξτε ότι αν ο $B(X, Y)$ είναι πλήρης, τότε ο Y είναι πλήρης.

Υποδείξεις - απαντήσεις

1. Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές, και $p(x) = |f(x)|$. Αν $x, y \in X$, τότε

$$p(x+y) = |f(x+y)| = |f(x) + f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| = p(x) + p(y).$$

Αν $x \in X$ και $\lambda \geq 0$, τότε

$$p(\lambda x) = |f(\lambda x)| = |\lambda f(x)| = \lambda |f(x)| = \lambda p(x).$$

Άρα, το p είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

2. Έστω $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$. Όπως πρίν, ελέγχουμε ότι για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \geq 0$, ισχύουν οι

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| = \lambda \|x\|,$$

από τις γνωστές ιδιότητες της νόρμας.

3. (α) Το p είναι συνεχές στο 0 και $p(0) = 0$, άρα για δοσμένο $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|z\| < \delta \Longrightarrow |p(z)| < \varepsilon.$$

Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Αν $\|x - x_0\| < \delta$, τότε και $\|x_0 - x\| = \|x - x_0\| < \delta$, οπότε

$$|p(x - x_0)| < \varepsilon, \quad |p(x_0 - x)| < \varepsilon.$$

Από την υποπροσθετικότητα του p,

$$p(x) - p(x_0) \leq p(x - x_0) \leq |p(x - x_0)| < \varepsilon$$

και

$$p(x_0) - p(x) \leq p(x_0 - x) \leq |p(x_0 - x)| < \varepsilon,$$

άρα $|p(x) - p(x_0)| < \varepsilon$. Δηλαδή, το p είναι συνεχές στο x_0.

(β) Έστω $r > 0$, και ας υποθέσουμε ότι για κάποιο x_0 με $\|x_0\| = r$ ισχύει η $p(x_0) < 0$. Τότε,

$$p(2x_0) = p(x_0 + x_0) \leq p(x_0) + p(x_0) = 2p(x_0) < 0.$$

Όμως, $\|2x_0\| = 2r \neq r$, άρα $2x_0 \notin \{x : \|x\| = r\}$. Από την υπόθεσή μας, $p(2x_0) \geq 0$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, $p(x) \geq 0$ και στην $\{x : \|x\| = r\}$.

Αν $r = 0$, τότε $p(x) \geq 0$ για κάθε $x \notin 0$. Όμως, $p(0) = p(0+0) \leq 2p(0)$ άρα $p(0) \geq 0$. Δηλαδή, $p(x) \geq 0$ για κάθε $x \in X$.

4. Το f είναι προφανώς γραμμικό, γιατί αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $x = ax_0, y = bx_0 \in Z$, τότε

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= f((\lambda a + \mu b)x_0) = (\lambda a + \mu b)p(x_0) \\ &= \lambda(ap(x_0)) + \mu(bp(x_0)) = \lambda f(x) + \mu f(y). \end{aligned}$$

Για την ανισότητα $f(x) \leq p(x)$ παρατηρούμε ότι: αν $a \geq 0$, τότε $f(ax_0) = ap(x_0) = p(ax_0)$, ενώ αν $a < 0$, τότε

$$f(ax_0) = -f((-a)x_0) = -p(-ax_0) \leq p(ax_0),$$

αφού κάθε υπογραμμικό συναρτησοειδές ικανοποιεί την $-p(-z) \leq p(z)$.

5. Παίρνουμε τυχόν $x_0 \neq 0$ στον X. Θεωρούμε τον $Z = \langle x_0 \rangle$, και ορίζουμε $g : Z \to \mathbb{R}$, με $g(ax_0) = ap(x_0)$. Από την Άσκηση 4, το g είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον Z, και ικανοποιεί την $g(z) \leq p(z)$ στον Z.

Από το θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές, που επεκτείνει το g, και ικανοποιεί την

$$f(x) \leq p(x), \quad x \in X.$$

Τέλος,

$$-f(x) = f(-x) \leq p(-x) \Longrightarrow f(x) \geq -p(-x), \quad x \in X.$$

Δηλαδή, $-p(-x) \leq f(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$.

6. Το $p(x) = \limsup f_n(x)$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές στον X. Αν $x, y \in X$, τότε

$$\begin{aligned} p(x+y) &= \limsup f_n(x+y) = \limsup[f_n(x) + f_n(y)] \\ &\leq \limsup f_n(x) + \limsup f_n(y) = p(x) + p(y), \end{aligned}$$

και αν $\lambda \geq 0$,

$$p(\lambda x) = \limsup f_n(\lambda x) = \limsup[\lambda f_n(x)] = \lambda \limsup f_n(x) = \lambda p(x).$$

Τώρα εφαρμόζουμε την Άσκηση 5: υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$\liminf f_n(x) = -\limsup f_n(-x) \leq f(x) \leq \limsup f_n(x), \quad x \in X.$$

7. Έστω $x_1, \ldots, x_n$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον X. Ξέρουμε ότι για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1, \ldots, a_n$, υπάρχει $f \in X^*$ με $f(x_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ τέτοια ώστε

$$f_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Τα $f_1, \ldots, f_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα: αν $t_1 f_1 + \ldots + t_n f_n \equiv 0$, τότε για κάθε $j \leq n$ έχουμε

$$0 = (t_1 f_1 + \ldots + t_n f_n)(x_j) = t_1 f_1(x_j) + \ldots + t_n f_n(x_j) = t_j \cdot 1 = t_j.$$

Άρα, $t_1 = \ldots = t_n = 0$.

8. Έστω $x \in X \backslash Y$. Αφού ο Y είναι κλειστός και $x \notin Y$, υπάρχει $f \in X^*$ που ικανοποιεί τα εξής:

$$f(y) = 0, \ \ y \in Y, \qquad \|f\| = 1, \qquad f(x) \neq 0.$$

(βασική εφαρμογή του θεωρήματος Hahn-Banach). Αυτό είναι άτοπο, γιατί η υπόθεση μας λέει ότι

$$f|_Y \equiv 0 \Longrightarrow f \equiv 0.$$

Άρα, $Y = X$.

9. Έστω $y \in \overline{Y}$. Υπάρχουν $y_n \in Y$ με $y_n \to y$. Για κάθε $f \in A$ έχουμε $f(y_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$f(y) = \lim f(y_n) = 0.$$

Δηλαδή, $y \in \mathrm{Ker} f$. Αφού το $f \in A$ ήταν τυχόν, $y \in \cap\{\mathrm{Ker} f : f \in A\}$. Αφού το $y \in \overline{Y}$ ήταν τυχόν,

$$\overline{Y} \subseteq \bigcap \{\mathrm{Ker} f : f \in A\}.$$

Έστω ότι ο εγκλεισμός είναι γνήσιος. Τότε, υπάρχει $z \in \cap\{\mathrm{Ker} f : f \in A\} \backslash \overline{Y}$. Από το θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει $g \in X^*$ με $\|g\| = 1$, $g(z) \neq 0$ και $g(y) = 0$ για κάθε $y \in \overline{Y}$. Τότε, $g \in A$ και $z \notin \mathrm{Ker} g$, το οποίο είναι άτοπο.

10. Το δεξιό μέλος ισούται με

$$M = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \left(\sup_{\|f\|_{Y^*} \leq 1} f(Tx) \right) = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y,$$

από το θεώρημα Hahn-Banach (για το $Tx \in Y$). Όμως, ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν

$$\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y < +\infty,$$

και τότε $\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|$ (Κεφάλαιο 5).

11. Όμοια με την 8. Αν $Y = \overline{\mathrm{span}(A)}$, παρατηρήστε ότι

$$f|_A \equiv 0 \Longleftrightarrow f|_Y \equiv 0.$$

12. (α) Ο $N(Y)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X^*: αν $f, g \in X^*$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $y \in Y$ έχουμε

$$(\lambda f + \mu g)(y) = \lambda f(y) + \mu g(y) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0,$$

δηλαδή $\lambda f + \mu g \in N(Y)$.

Ο $N(Y)$ είναι κλειστός: αν $f_n \in N(Y)$ και $f_n \to f \in X^*$, τότε για κάθε $y \in Y$ έχουμε

$$f(y) = \lim_{n\to\infty} f_n(y) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

δηλαδή $f \in N(Y)$.

(β) Έστω Y_1, Y_2 κλειστοί υπόχωροι του X με $Y_1 \neq Y_2$. Έχουμε δύο περιπτώσεις: είτε υπάρχει $y \in Y_1 \backslash Y_2$ είτε υπάρχει $y \in Y_2 \backslash Y_1$. Στην πρώτη περίπτωση, αφού ο Y_2 είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X και $y \notin Y_2$, μπορούμε να βρούμε $f \in X^*$ με τις ιδιότητες

$$f|_{Y_2} \equiv 0, \quad \|f\| = 1, \quad f(y) \neq 0.$$

Τότε, $f \in N(Y_2) \backslash N(Y_1)$, άρα $N(Y_1) \neq N(Y_2)$.

Εντελώς ανάλογα, αν υπάρχει $y \in Y_2 \backslash Y_1$, βρίσκουμε $f \in N(Y_1) \backslash N(Y_2)$.

13. Η $f \circ T : X \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική σαν σύνθεση γραμμικών συναρτήσεων, και για κάθε $x \in X$,

$$|[T^*(f)](x)| = |f(Tx)| \leq \|f\| \cdot \|Tx\|_Y \leq \|f\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|,$$

δηλαδή $T^*(f) \in X^*$ και $\|T^*(f)\| \leq \|T\| \cdot \|f\|$.

Αυτό δείχνει ότι ο T^* ορίζεται καλά, και

$$(*) \qquad \|T^*\| \leq \|T\|.$$

[Η γραμμικότητα του T^* ελέγχεται εύκολα:

$$T^*(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g) \circ T = \lambda (f \circ T) + \mu (g \circ T) = \lambda T^*(f) + \mu T^*(g).]$$

Για την ισότητα των $\|T\|$ και $\|T^*\|$ χρησιμοποιούμε το θεώρημα Hahn-Banach: Έστω $x \in X$. Τότε, $Tx \in Y$ και υπάρχει $f \in Y^*$ τέτοιο ώστε $\|f\| = 1$ και $f(y) = \|y\| = \|Tx\|$. Άρα,

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= f(y) = (f \circ T)(x) = [T^*(f)](x) \\ &\leq \|T^*(f)\| \cdot \|x\| \leq \|T^*\| \cdot \|f\| \cdot \|x\| \\ &= \|T^*\| \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

Άρα, $\|T\| \leq \|T^*\|$, και από την $(*)$ έπεται το ζητούμενο.

14. Σταθεροποιούμε $f \in X^*$ με $\|f\| = 1$. Έστω (y_n) ακολουθία Cauchy στον Y. Ορίζουμε $T_n : X \to Y$ με $T_n(x) = f(x) y_n$. Τότε,

$$\begin{aligned} \|T_n - T_m\| &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|f(x)(y_n - y_m)\|_Y = \left(\sup_{\|x\|_X \leq 1} |f(x)| \right) \cdot \|y_n - y_m\| \\ &= \|f\| \cdot \|y_n - y_m\| = \|y_n - y_m\|, \end{aligned}$$

δηλαδή, η (T_n) είναι ακολουθία Cauchy στον $B(X,Y)$. Αφού ο $B(X,Y)$ έχει υποτεθεί πλήρης, υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ τέτοιος ώστε $T_n \to T$, δηλαδή

$$(*) \qquad T(x) = \lim_{n\to\infty} (f(x) y_n), \quad x \in X.$$

Αφού $f \neq 0$, υπάρχει $x \in X$ με $f(x) = 1$. Τότε, αν ορίσουμε $y = T(x)$, έχουμε $y_n \to y$ από την $(*)$.

Κεφάλαιο 8

Βασικά θεωρήματα για χώρους Banach

Σκοπός μας σε αυτό το Κεφάλαιο είναι να αποδείξουμε τρία βασικά θεωρήματα για τελεστές σε χώρους Banach: το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος, το θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης και το θεώρημα κλειστού γραφήματος. Στην απόδειξή τους χρησιμοποιείται ουσιαστικά το θεώρημα του Baire: είναι δηλαδή αποτελέσματα που αφορούν *πλήρεις* χώρους με νόρμα.

8.1 Το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος

Στην Παράγραφο 2.4 είδαμε το θεώρημα του Osgood: αν $\{f_n\}$ είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$ με την ιδιότητα η $\{f_n(t)\}$ να είναι φραγμένη για κάθε $t \in [0,1]$, τότε υπάρχει υποδιάστημα $[a,b]$ του $[0,1]$ στο οποίο η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Η απόδειξη βασίστηκε στο θεώρημα του Baire.

Το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος διατυπώνεται για μια ακολουθία τελεστών $T_n \in B(X,Y)$ που έχουν την ιδιότητα η $\{T_n(x)\}$ να είναι φραγμένη στον Y για κάθε $x \in X$. Αν ο X είναι πλήρης, η γραμμικότητα των T_n και η απλή ιδέα της απόδειξης του θεωρήματος του Osgood μας δίνουν ότι οι νόρμες $\|T_n\|$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες:

Θεώρημα 8.1.1. *Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα, και $T_n : X \to Y$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές, $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $M_x > 0$ τέτοιος ώστε*

$$\|T_n x\|_Y \leq M_x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(δηλαδή, η $\{T_n x\}$ είναι φραγμένη ακολουθία στον Y). Τότε, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|T_n\| \leq M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(δηλαδή, η $\{\|T_n\|\}$ είναι φραγμένη).

Απόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_k = \{x \in X : \sup_n \|T_n x\| \leq k\}.$$

(α) Κάθε A_k είναι κλειστό υποσύνολο του X: έστω $x_j \in A_k$ με $x_j \to x$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\|T_n x_j\| \leq k$ για κάθε j, άρα και

$$\|T_n x\| = \lim_{j\to\infty} \|T_n x_j\| \leq k.$$

Αφού αυτό ισχύει για τυχόν n, έχουμε $x \in A_k$.

(β) Η υπόθεσή μας εξασφαλίζει ότι

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Πράγματι, αν $x \in X$, υπάρχει $M_x > 0$ τέτοιος ώστε $\sup_n \|T_n x\| \leq M_x$, και αν πάρουμε $k_x > M_x$, $k_x \in \mathbb{N}$, θα έχουμε $x \in A_{k_x} \subseteq \bigcup_k A_k$.

(γ) Ο X είναι πλήρης και τα A_k κλειστά. Από το θεώρημα του Baire, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε το A_{k_0} να έχει μη κενό εσωτερικό. Δηλαδή, υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r > 0$ τέτοια ώστε

$$D(x_0, r) \subseteq A_{k_0}.$$

Έστω $x \in X$, $x \neq 0$. Τότε,

$$x_0 \ , \ x_0 + \frac{r}{2\|x\|} x \in D(x_0, r) \subseteq A_{k_0},$$

άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\|T_n x_0\| \leq k_0 \ \text{ και } \ \Big\|T_n \left(x_0 + \frac{r}{2\|x\|} x\right)\Big\| \leq k_0.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
\Big\|T_n \left(\frac{r}{2\|x\|} x\right)\Big\| &= \Big\|T_n \left(x_0 + \frac{r}{2\|x\|} x\right) + T_n(-x_0)\Big\| \\
&\leq \Big\|T_n \left(x_0 + \frac{r}{2\|x\|} x\right)\Big\| + \|T_n(x_0)\| \\
&\leq 2k_0.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας ξανά τη γραμμικότητα του T και το γεγονός ότι η νόρμα είναι θετικά ομογενής, παίρνουμε

$$\|T_n x\| \leq \frac{4k_0}{r} \|x\|.$$

Έπεται ότι $\|T_n\| \leq \frac{4k_0}{r}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Ας δούμε τώρα μερικές ενδεικτικές εφαρμογές του θεωρήματος ομοιόμορφου φράγματος:

Πρόταση 8.1.1. *Έστω X χώρος με νόρμα, και $\{x_n\}$ ακολουθία στον X. Η $\{x_n\}$ είναι φραγμένη αν και μόνο αν για κάθε $f \in X^*$ η $\{f(x_n)\}$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|x_n\| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε, για κάθε $f \in X^*$ έχουμε

$$|f(x_n)| \leq \|f\| \, \|x_n\| \leq M\|f\|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Δηλαδή, η $\{f(x_n)\}$ είναι φραγμένη.

($\Leftarrow$) Θεωρούμε τους $T_n = \tau(x_n) : X^* \to \mathbb{R}$ με $T_n f = [\tau(x_n)](f) = f(x_n)$. Από την υπόθεσή μας, η $\{T_n f\}$ είναι φραγμένη για κάθε $f \in X^*$. Ο X^* είναι χώρος Banach, οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος έχουμε

$$\sup_n \|x_n\|_X = \sup_n \|[\tau(x_n)]\|_{X^{**}} = \sup_n \|T_n\| < +\infty.$$

Δηλαδή, η $\{\|x_n\|\}$ είναι φραγμένη. □

Ανάλογο παράδειγμα σε συγκεκριμένο χώρο:

Πρόταση 8.1.2. *Έστω $y = (\eta_k)$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x = (\xi_k) \in c_0$, η σειρά $\sum_k \xi_k \eta_k$ συγκλίνει. Τότε, $y \in \ell_1$. Δηλαδή,*

$$\sum_k |\eta_k| < +\infty.$$

Απόδειξη: Ορίζουμε $T_n : c_0 \to \mathbb{R}$, με $T_n((\xi_k)) = \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k$. Κάθε T_n είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές:

$$\begin{aligned} |T_n x| &= |\sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k| \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k|\,|\eta_k| \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n |\eta_k|\right) \sup_k |\xi_k| \\ &= \left(\sum_{k=1}^n |\eta_k|\right) \|x\|_{c_0}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\|T_n\| \leq \sum_{k=1}^n |\eta_k|.$$

Ισχύει μάλιστα ισότητα: αν ορίσουμε

$$\xi_k = \begin{cases} 0 & , k > n, \\ \mathrm{sign}(\eta_k) & , k \leq n, \end{cases}$$

έχουμε $x' = (\xi_k) \in c_0$, και $\|x'\| \leq 1$. Όμως,

$$T_n(x') = \sum_{k=1}^n \mathrm{sign}(\eta_k)\eta_k = \sum_{k=1}^n |\eta_k|.$$

Αφού $\|x'\| \leq 1$,

$$\|T_n\| \geq |T_n(x')| = \sum_{k=1}^n |\eta_k|.$$

Από την υπόθεσή μας, αν $x = (\xi_k) \in c_0$, τότε το $\sum_k \xi_k \eta_k = \lim_n \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k = \lim_n T_n x$ υπάρχει. Άρα, η $\{T_n x\}$ είναι φραγμένη. Από το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος (ο c_0 είναι πλήρης), παίρνουμε $\sup_n \|T_n\| < +\infty$, δηλαδή

$$\sum_{k=1}^\infty |\eta_k| = \sup_n \sum_{k=1}^n |\eta_k| < +\infty.$$

Άρα, $y = (\eta_k) \in \ell_1$. □

Το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος χρησιμοποιείται συχνά για την «κατασκευή» αντιπαραδειγμάτων στην Ανάλυση. Ο τρόπος είναι ο εξής: Αν $T_n : X \to Y$ με $\sup_n \|T_n\| = +\infty$, τότε υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $\sup_n \|T_n(x)\|_Y = +\infty$.

Παράδειγμα (αποκλίνουσες σειρές Fourier). Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Η *σειρά Fourier* της f είναι η

$$(*) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^\infty (a_m \cos mt + b_m \sin mt),$$

όπου οι συντελεστές a_m, b_m δίνονται από τις

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(mt)dt \quad , \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(mt)dt.$$

Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει είναι αν για κάθε συνεχή f και κάθε $t \in [-\pi, \pi]$ η σειρά $(*)$ συγκλίνει (στο $f(t)$). Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος, θα δούμε ότι η απάντηση είναι αρνητική:

Πρόταση 8.1.3. *Υπάρχει συνεχής $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ της οποίας η σειρά Fourier αποκλίνει στο σημείο $t_0 = 0$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τον $C[-\pi,\pi]$ με νόρμα την $\|f\| = \max_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)|$. Ο $(C[-\pi,\pi], \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach. Ορίζουμε $T_n : C[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, με

$$T_n f = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} a_m,$$

την τιμή δηλαδή του n-στού μερικού αθροίσματος της $(*)$ στο $t_0 = 0$. Αλλιώς, μπορούμε να γράψουμε (γιατί;)

$$T_n f = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \cos mt\right] dt.$$

Απλή τριγωνομετρία δείχνει ότι

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \cos mt = \frac{1}{2}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Δηλαδή,

$$T_n f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) q_n(t)dt, \quad q_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Έχουμε

$$|T_n f| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, |q_n(t)|dt \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |q_n(t)|dt\right)\|f\|,$$

άρα ο T_n είναι φραγμένος, και

$$\|T_n\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |q_n(t)|dt.$$

Επιπλέον, αν f συνεχής με $\|f\| = 1$ που «προσεγγίζει» την $\mathrm{sign}(q_n)$, τότε

$$T_n f \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sign}(q_n) q_n(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |q_n(t)|dt.$$

Δηλαδή,

$$\|T_n\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |q_n(t)|dt.$$

Όμως,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |q_n(t)| = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{|\sin\frac{t}{2}|}dt \geq \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{t}dt,$$

γιατί $|\sin\frac{t}{2}| \leq \frac{|t|}{2}$ στο $[-\pi,\pi]$, και θέτοντας $v = (n+\frac{1}{2})t$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\|T\| &\geq \frac{1}{\pi}\int_{0}^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin v|}{v}dv \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin v|}{v}dv \\
&\geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin v|dv \\
&= \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1} \to \infty
\end{aligned}$$

καθώς $n \to \infty$. Δηλαδή, $\sup_n \|T_n\| = \infty$. Άρα, υπάρχει $f \in C[-\pi,\pi]$ τέτοια ώστε η $(T_n f)$ να μην είναι φραγμένη. Αυτό σημαίνει ότι η σειρά Fourier της f αποκλίνει στο $t_0 = 0$. $\square$

Δίνουμε τώρα μια εφαρμογή του θεωρήματος ομοιόμορφου φράγματος, στην αριθμητική ολοκλήρωση: Θεωρούμε ένα διάστημα $J = [a,b]$ και το χώρο $C[a,b]$ με τη συνήθη νόρμα $\|f\| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

Μια *μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης στο* J είναι μια επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1, \ldots, a_m$ και σημείων $t_1 < \cdots < t_m$ στο J.

Αν τα t_i, a_i έχουν δοθεί, τότε για κάθε $f \in C[J]$ εκτιμάμε το $\int_a^b f(t)dt$ μέσω του αθροίσματος

$$\sum_{i=1}^{m} a_i f(t_i).$$

Αν τα t_i, a_i έχουν επιλεγεί «σωστά», περιμένουμε αυτό το άθροισμα να «προσεγγίζει» καλά το ολοκλήρωμα της f. Δεν είναι δύσκολο να δεί κανείς ότι, όπως και να επιλέξουμε τα t_i, a_i, μπορούμε να κατασκευάσουμε $f \in C[J]$ για την οποία το σφάλμα να είναι μεγάλο: πάρτε π.χ. την f να μηδενίζεται σε όλα τα t_i και να έχει πολύ μεγάλη τιμή σε κάποιο άλλο $t \in J$.

Ορίζουμε μια πιό συγκροτημένη *διαδικασία αριθμητικής ολοκλήρωσης* στο J ως εξής: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τα πολυώνυμα

$$f_0(t) = 1, \quad f_1(t) = t, \quad , \ldots, \quad f_n(t) = t^n,$$

και επιλέγουμε $t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)} \in J$ και $a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)} \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$(*) \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} f_j(t_i^{(n)}) = \int_a^b f_j(t)dt, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Τέτοιες επιλογές υπάρχουν πολλές: πάρτε, ας πούμε, τυχόντα $t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} \in J$. Τότε, το σύστημα $(*)$ με αγνώστους τους $a_i^{(n)}$ παίρνει τη μορφή

$$\sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} (t_i^{(n)})^j = \frac{b^{j+1} - a^{j+1}}{j+1}, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση ως προς $a_i^{(n)}$ γιατί η ορίζουσα

$$\det \left[(t_i^{(n)})^j \right]_{i,j=1}^{n}$$

είναι μη μηδενική (ορίζουσα Vandermonde). Αφού λοιπόν επιλέξουμε τα $t_i^{(n)}$, προσδιορίζουμε μονοσήμαντα τα $a_i^{(n)}$ έτσι ώστε

$$T_{t_i^{(n)}, a_i^{(n)}}(f_j) := \sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} f_j(t_i^{(n)}) = \int_a^b f_j(t)dt, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Λόγω γραμμικότητας του αριστερού και του δεξιού μέλους ως προς f, έπεται ότι

$$T_{t_i^{(n)}, a_i^{(n)}}(p) = \sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} p(t_i^{(n)}) = \int_a^b p(t)dt$$

για κάθε πολυώνυμο $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ που έχει βαθμό μικρότερο ή ίσο του n.

Θέτουμε $T_n := T_{t_i^{(n)}, a_i^{(n)}}$, και λέμε ότι η (T_n) είναι μια *διαδικασία αριθμητικής ολοκλήρωσης* στο J: Για κάθε $f \in C[J]$ ορίζουμε

$$T_n(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} f(t_i^{(n)}),$$

και ξέρουμε ότι κάθε T_n είναι *ακριβής* στα πολυώνυμα βαθμού $\leq n$. Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν για κάθε συνεχή $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$(**) \qquad T_n(f) \to \int_a^b f(t)dt,$$

όταν $n \to \infty$. Η απάντηση δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα του Polya:

Πρόταση 8.1.4. *Μια διαδικασία αριθμητικής ολοκλήρωσης* $(T_n) = (T_{a_i^{(n)}, t_i^{(n)}})$ *όπως παραπάνω, ικανοποιεί την* $(**)$ *για κάθε* $f \in C[a,b]$ *αν και μόνο αν υπάρχει* $M > 0$ *τέτοιος ώστε, για κάθε* $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}| \leq M.$$

Απόδειξη: Κάθε $T_n : C[a,b] \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές, και

$$\begin{aligned} |T_n(f)| &= \Big|\sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} f(t_i^{(n)})\Big| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}|\, |f(t_i^{(n)})| \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}|\right) \|f\|, \end{aligned}$$

δηλαδή το T_n είναι φραγμένο, και $\|T_n\| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}|$.

Επιπλέον ισχύει ισότητα γιατί μπορούμε να ορίσουμε $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχή με $|f(t)| \leq 1$ στο $[a,b]$ και

$$f(t_i^{(n)}) = \begin{cases} 1 & , a_i^{(n)} > 0, \\ \\ -1 & , a_i^{(n)} < 0, \end{cases}$$

οπότε

$$\|T_n\| \geq |T_n(f)| = \sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} \mathrm{sign}(a_i^{(n)}) = \sum_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}|.$$

Η απόδειξη της ($\Leftarrow$) της Πρότασης θα μας δώσει την ιδέα για το τι συμβαίνει. Αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\sum_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $\|T_n\| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$. Οι βασικές παρατηρήσεις είναι δύο:

(α) Από την κατασκευή, αν $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι πολυώνυμο (βαθμού ας πούμε m), τότε για κάθε $n \geq m$, $T_n(p) = \int_a^b p$. Άρα, $T_n(p) \to \int_a^b p$ καθώς $n \to \infty$, για κάθε πολυώνυμο.

(β) Τα πολυώνυμα είναι πυκνά στον $C[a,b]$ (θεώρημα Weierstrass). Αν λοιπόν μας δώσουν $f \in C[a,b]$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει πολυώνυμο p με την ιδιότητα

$$\|f - p\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - p(t)| < \varepsilon.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} \left|T_n f - \int_a^b f\right| &\leq |T_n f - T_n p| + \left|T_n p - \int_a^b p\right| + \left|\int_a^b p - \int_a^b f\right| \\ &\leq \|T_n\|\, \|f - p\| + \left|T_n p - \int_a^b p\right| + (b-a)\|p - f\| \\ &< M\varepsilon + \left|T_n p - \int_a^b p\right| + (b-a)\varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού $T_n p \to \int_a^b p$, για $n \geq n_0(\varepsilon)$ έχουμε

$$\left|T_n f - \int_a^b f\right| < (M + 1 + b - a)\varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $T_n f \to \int_a^b f$.

Η απόδειξη της ($\Rightarrow$) είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος ομοιόμορφου φράγματος: Αν $T_n f \to \int_a^b f$ για κάθε $f \in C[a,b]$, τότε η $\{T_n f\}$ είναι φραγμένη για κάθε f. Επομένως, $\sup_n \|T_n\| < +\infty$.

Όμως, $\|T_n\| = \sum_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}|$, $n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\sup_n \sum_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}| = M < +\infty. \quad \square$$

8.2 Το θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης

Ορισμός Έστω X και Y μετρικοί χώροι, και $T : X \to Y$ συνάρτηση. Η T λέγεται *ανοιχτή απεικόνιση* αν για κάθε $A \subseteq X$ ανοιχτό, το $T(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του Y.

Αν $T : X \to Y$ συνεχής, η T δεν είναι απαραίτητα ανοιχτή: για παράδειγμα, η $T : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ με $T(x) = \sin x$ είναι συνεχής, αλλά $T((0, 2\pi)) = [-1, 1]$.

Θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης *Έστω X και Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής. Τότε, ο T είναι ανοιχτή απεικόνιση.*

Βασικό ρόλο στην απόδειξη θα παίξει το εξής:

Λήμμα 8.2.1. *Αν X, Y χώροι Banach, $T : X \to Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής, τότε το $T(D_X(0,1))$ περιέχει ανοιχτή μπάλα με κέντρο το 0 στον Y.*

Απόδειξη: Βήμα 1 Θεωρούμε την ανοιχτή μπάλα $D_X(0, 1/2)$ του X. Αφού

$$kD_X(0, 1/2) = D_X(0, k/2) \quad , \quad k = 1, 2, \ldots,$$

ισχύει

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kD_X(0, 1/2).$$

Αφού ο T είναι γραμμικός και επί, παίρνουμε

$$Y = T(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} kT(D_X(0, 1/2)).$$

Άρα,

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{kT(D_X(0, 1/2))} = \bigcup_{k=1}^{\infty} k\overline{T(D_X(0, 1/2))}.$$

Ο Y είναι πλήρης, και κάθε $k\overline{T(D_X(0, 1/2))}$ κλειστό. Από το θεώρημα του Baire, υπάρχει k_0 τέτοιος ώστε το $k_0\overline{T(D_X(0, 1/2))}$ να περιέχει μια μπάλα $D_Y(y_0, \delta)$ στον Y. Δηλαδή,

$$y_0 + D_Y(0, \delta) \subseteq k_0\overline{T(D_X(0, 1/2))}. \tag{1}$$

Βήμα 2 Έστω $y \in D_Y(0, \delta)$. Τότε, $y_0 + y \in k_0\overline{T(D_X(0, 1/2))}$, άρα υπάρχει ακολουθία $x_n \in D_X(0, 1/2)$ τέτοια ώστε

$$k_0T(x_n) \to y_0 + y.$$

Επίσης, $y_0 \in k_0\overline{T(D_X(0, 1/2))}$ (γιατί;), άρα υπάρχει ακολουθία $x_n' \in D_X(0, 1/2)$ τέτοια ώστε

$$k_0T(x_n') \to y_0.$$

Τότε, $x_n - x_n' \in D_X(0, 1)$, και

$$k_0T(x_n - x_n') = k_0T(x_n) - k_0T(x_n') \to y.$$

Δηλαδή,

$$y \in k_0\overline{T(D_X(0, 1))}.$$

Άρα,

$$\overline{T(D_X(0, 1))} \supseteq D_Y(0, \delta/k_0) = D_Y(0, \delta') \tag{2}$$

στον Y, όπου $\delta' = \delta/k_0$.

Βήμα 3 Είδαμε ότι η κλειστή θήκη της $T(D_X(0,1))$ περιέχει μια ανοιχτή μπάλα $D_Y(0,\delta')$ στον Y. Μένει να δούμε ότι το ίδιο το $T(D_X(0,1))$ έχει την ίδια ιδιότητα.

Θεωρούμε την $D_Y(0,\delta'/2)$. Έστω $y \in Y$ με $\|y\| < \delta'/2$. Τότε,

$$y \in \frac{1}{2}\overline{T(D_X(0,\delta'/2))} = \overline{T(D_X(0,1/2))},$$

άρα υπάρχει $x_1 \in D_X(0,1/2)$ τέτοιο ώστε

$$\|y - Tx_1\| < \frac{\delta'}{2^2}.$$

Τότε, $y - Tx_1 \in \frac{1}{2^2}\overline{T(D_X(0,1))} = \overline{T(D_X(0,1/2^2))}$, άρα υπάρχει $x_2 \in D_X(0,1/2^2)$ τέτοιο ώστε

$$\|y - Tx_1 - Tx_2\| < \frac{\delta'}{2^3}.$$

Επαγωγικά, βρίσκουμε $x_n \in D_X(0,1/2^n)$ με την ιδιότητα

$$(*) \qquad \|y - Tx_1 - \cdots - Tx_n\| < \frac{\delta'}{2^{n+1}}.$$

Η ακολουθία $z_n = x_1 + \cdots + x_n$ είναι Cauchy στον X: αν $m > n$, τότε

$$\begin{aligned} \|z_m - z_n\| &= \|x_m + \cdots + x_{n+1}\| \leq \|x_m\| + \cdots + \|x_{n+1}\| \\ &< \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Ο X είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $z_n \to x$. Παρατηρούμε ότι

$$\|z_n\| = \|x_1 + \cdots + x_n\| \leq \|x_1\| + \cdots + \|x_n\| < \|x_1\| + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} < \|x_1\| + \frac{1}{2}.$$

Άρα,

$$\|x\| = \lim_n \|z_n\| \leq \|x_1\| + \frac{1}{2} < 1.$$

Δηλαδή, $x \in D_X(0,1)$. Από την $(*)$, $T(z_n) = T(x_1) + \cdots + T(x_n) \to y$. Όμως $z_n \to x$ και ο T είναι συνεχής, άρα $T(z_n) \to T(x)$. Δηλαδή, $T(x) = y$, κι αυτό σημαίνει ότι $y \in T(D_X(0,1))$.

Το $y \in D_Y(0,\delta'/2)$ ήταν τυχόν, άρα

$$T(D_X(0,1)) \supseteq D_Y(0,\delta'/2). \quad \square$$

Απόδειξη του θεωρήματος ανοιχτής απεικόνισης: Έστω $A \subseteq X$ ανοιχτό. Θα δείξουμε ότι το $T(A)$ είναι ανοιχτό: έστω $y \in T(A)$. Υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $Tx = y$. Το A είναι ανοιχτό, άρα υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $D_X(x,r) \subseteq A$.

Από το Λήμμα, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $T(D_X(0,1)) \supseteq D_Y(0,\delta)$. Τότε,

$$T(D_X(0,r)) = T(rD_X(0,1)) = rT(D_X(0,1)) \supseteq rD_Y(0,\delta) = D_Y(0,\delta r).$$

Αν $y' \in D_Y(y,\delta r)$, τότε $y' - y \in D_Y(0,\delta r)$, άρα υπάρχει $z \in D_X(0,r)$ τέτοιο ώστε $T(z) = y' - y$. Έπεται ότι $x + z \in D_X(x,r)$, και $T(x+z) = y'$. Δηλαδή,

$$T(A) \supseteq T(D_X(x,r)) \supseteq D_Y(y,\delta r).$$

Το $y \in T(A)$ ήταν τυχόν, άρα το $T(A)$ είναι ανοιχτό. $\square$

Πόρισμα 8.2.1. (Θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης) Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος, ένα προς ένα και επί, γραμμικός τελεστής. Τότε, ο $T^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

Απόδειξη: Ο T^{-1} ορίζεται καλά και είναι γραμμικός τελεστής (γιατί;). Αφού ο T είναι ανοιχτή απεικόνιση, για κάθε $A \subseteq X$ ανοιχτό έχουμε ότι το $(T^{-1})^{-1}(A) = T(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του Y. Άρα, ο T^{-1} είναι συνεχής. $\square$

8.3 Το θεώρημα κλειστού γραφήματος

Το τελευταίο βασικό θεώρημα αυτού του Κεφαλαίου είναι το θεώρημα κλειστού γραφήματος, το οποίο μας δίνει ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο για να ελέγχουμε αν ένας γραμμικός τελεστής είναι φραγμένος.

Ορισμός Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Το *γράφημα* του T είναι το σύνολο

$$\Gamma(T) = \{(x, y) : y = Tx\} \subseteq X \times Y.$$

Ο T έχει *κλειστό γράφημα* αν ισχύει το εξής:

Αν $x_n \to x$ *στον* X, $y_n \to y$ *στον* Y, *και* $y_n = T(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *τότε* $y = T(x)$.

Ισοδύναμα, αν το $\Gamma(T)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$, με νόρμα π.χ. την $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$ (άσκηση).

Θεώρημα κλειστού γραφήματος *Έστω* X, Y *χώροι Banach, και* $T : X \to Y$ *γραμμικός τελεστής. Αν το γράφημα* $\Gamma(T)$ *του* T *είναι κλειστό υποσύνολο του* $X \times Y$*, τότε ο* T *είναι φραγμένος.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τον $X \times Y$ με νόρμα την $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$. Ο $X \times Y$ είναι πλήρης: αν $z_n = (x_n, y_n)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $X \times Y$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n > m \geq n_0$,

$$\varepsilon > \|z_n - z_m\| = \|(x_n - x_m, y_n - y_m)\| = \|x_n - x_m\|_X + \|y_n - y_m\|_Y.$$

Τότε όμως, $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ και $\|y_n - y_m\| < \varepsilon$, δηλαδή οι (x_n), (y_n) είναι ακολουθίες Cauchy στους X, Y αντίστοιχα. Οι X, Y είναι πλήρεις, άρα υπάρχουν $x \in X$ και $y \in Y$ τέτοια ώστε $x_n \to x$ και $y_n \to y$.

Όμως τότε, αν $z = (x, y)$, έχουμε

$$\|z - z_n\| = \|x - x_n\| + \|y - y_n\| \to 0.$$

Άρα, $z_n \to z$.

Από την υπόθεσή μας, το $\Gamma(T)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$, και εύκολα ελέγχουμε ότι είναι γραμμικός υπόχωρος του $X \times Y$. Αφού ο $X \times Y$ είναι χώρος Banach, το $\Gamma(T)$ είναι χώρος Banach.

Ορίζουμε $P : \Gamma(T) \to X$ με $P(x, Tx) = x$. Ο P είναι γραμμικός τελεστής, και

$$P(x, Tx) = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow Tx = 0 \Longrightarrow (x, Tx) = (0, 0),$$

άρα ο P είναι ένα προς ένα. Προφανώς, ο P είναι επί. Τέλος, ο P είναι φραγμένος:

$$\|P(x, Tx)\| = \|x\|_X \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x, Tx)\|_{X \times Y}.$$

Δηλαδή, $\|P\| \leq 1$.

Από το θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης, ο $P^{-1} : X \to \Gamma(T)$ με $P^{-1}(x) = (x, Tx)$ είναι φραγμένος. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $x \in X$

$$\|Tx\|_Y \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x, Tx)\|_{X \times Y} = \|P^{-1}(x)\|_{X \times Y} \leq M\|x\|_X.$$

Επομένως, ο T είναι φραγμένος. □

8.4 Ασκήσεις

1. Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα, και $T_n : X \to Y$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(T_n x)$ είναι Cauchy. Δείξτε ότι η $(\|T_n\|)$ είναι φραγμένη.

Αν επιπλέον ο Y είναι πλήρης, δείξτε ότι υπάρχει $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $T_n x \to Tx$ για κάθε $x \in X$.

2. Δείξτε ότι η πληρότητα του X είναι απαραίτητη στο θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος: πάρτε τον c_{00} σαν υπόχωρο του ℓ_∞, και ορίστε $T_n : c_{00} \to \mathbb{R}$ με $T_n(x) = n\xi_n$.

3. Αν X χώρος με νόρμα, και $x_n \to x$ στον X, τότε $f(x_n) \to f(x)$ για κάθε $f \in X^*$. Ισχύει το αντίστροφο;

4. Έστω X χώρος με νόρμα, και (x_k) ακολουθία στον X τέτοια ώστε $\sum_k |f(x_k)| < +\infty$ για κάθε $f \in X^*$. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| \leq M\|f\|$$

για κάθε $f \in X^*$.

5. Έστω X χώρος Banach, (f_n) φραγμένη ακολουθία στον X^*, και $\varepsilon_n > 0$ τέτοια ώστε: $\varepsilon_n \to 0$ και, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $K_x > 0$ τέτοιο ώστε $|f_n(x)| \leq K_x \varepsilon_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\|f_n\| \to 0$.

6. Έστω X, Y χώροι Banach, και $T_n \in B(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $\sup_n \|T_n\| < +\infty$.

(β) Για κάθε $x \in X$, $\sup_n \|T_n x\| < +\infty$.

(γ) Για κάθε $x \in X$ και $g \in Y^*$, $\sup_n |g(T_n x)| < +\infty$.

7. Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε: για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ με $T(x) = y$ και $\|x\| \leq M\|y\|$.

8. Έστω X γραμμικός χώρος, πλήρης ως προς τις νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$. Υποθέτουμε ότι

$$\|x_n\|_1 \to 0 \Longrightarrow \|x_n\|_2 \to 0.$$

Δείξτε ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

9. Θεωρούμε τον c_{00} σαν υπόχωρο του ℓ_∞, και ορίζουμε $T : c_{00} \to c_{00}$ με $Tx = (\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \ldots)$. Δείξτε ότι ο T είναι γραμμικός, φραγμένος, ένα προς ένα και επί. Είναι ο T^{-1} φραγμένος; Εξηγήστε.

10. Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος, γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής. Δείξτε ότι υπάρχουν $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε

$$a\|x\| \leq \|Tx\| \leq b\|x\|$$

για κάθε $x \in X$.

11. Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $T_1 : X \to Y$ τελεστής με κλειστό γράφημα, και $T_2 : X \to Y$ φραγμένος τελεστής. Δείξτε ότι ο $T_1 + T_2$ έχει κλειστό γράφημα.

12. Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με κλειστό γράφημα. Δείξτε ότι:

(α) Αν $C \subseteq X$ συμπαγές, τότε το $T(C)$ είναι κλειστό στον Y.

(β) Αν $K \subseteq Y$ συμπαγές, τότε το $T^{-1}(K)$ είναι κλειστό στον X.

13. Δείξτε το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης χρησιμοποιώντας το θεώρημα κλειστού γραφήματος.

14. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με την εξής ιδιότητα: αν $\|x_n\| \to 0$ και $f \in Y^*$, τότε $f(Tx_n) \to 0$. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

15. Έστω X χώρος Banach, και $x_n \to x$ στον X. Έστω (f_n) ακολουθία στον X^*, τέτοια ώστε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in X$. Δείξτε ότι $f_n(x_n) \to f(x)$.

16. Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ ένα προς ένα, φραγμένος γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι ο $T^{-1} : R(T) \to X$ είναι φραγμένος αν και μόνο αν ο $R(T) = \{Tx : x \in X\}$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y.

17. Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν για κάθε $g \in Y^*$ έχουμε $g \circ T \in X^*$.

18. Θεωρούμε τον $C[0,1]$ και τον υπόχωρό του $C^1[0,1]$ που αποτελείται από όλες τις f που έχουν συνεχή παράγωγο f' στο $[0,1]$. Ορίζουμε $C^1[0,1] : X \to C[0,1]$ με $Tf = f'$.

(α) Δείξτε ότι ο T έχει κλειστό γράφημα.

(β) Ο T δεν είναι φραγμένος (γιατί;). Τι συμπεραίνετε;

Υποδείξεις - απαντήσεις

1. Κάθε ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη, άρα η υπόθεση μας δίνει το εξής: για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(T_n x)$ είναι φραγμένη. Αφού ο X είναι χώρος Banach, από το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|T_n\| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Με την επιπλέον υπόθεση ότι ο Y είναι πλήρης, έχουμε: για κάθε $x \in X$ η $(T_n x)$ είναι ακολουθία Cauchy, άρα υπάρχει το $\lim_n T_n x \in Y$. Ορίζουμε $T : X \to Y$ με

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x.$$

Μένει να δείξουμε ότι ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής: για κάθε $x, y \in X$ και $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε $T_n x \to Tx$ και $T_n y \to Ty$, άρα

$$T_n(ax + by) = aT_n x + bT_n y \to aTx + bTy.$$

Όμως, από τον ορισμό του T έχουμε $T_n(ax + by) \to T(ax + by)$. Άρα,

$$T(ax + by) = aTx + bTy,$$

δηλαδή, ο T είναι γραμμικός. Για να δείξουμε ότι ο T είναι φραγμένος, παρατηρούμε ότι, από το πρώτο μέρος, έχουμε $\|T_n x\| \leq M\|x\|$ για κάθε $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$. Αφού $T_n x \to Tx$, βλέπουμε ότι

$$\|Tx\| = \lim \|T_n x\| \leq M\|x\|, \quad x \in X$$

δηλαδή ο T είναι φραγμένος, και $\|T\| \leq M$.

2. Θεωρούμε τον c_{00} με νόρμα την $\|x\| = \sup_k |\xi_k|$. Ορίζουμε $T_n : c_{00} \to \mathbb{R}$, με $T_n(x) = n\xi_n$. Κάθε T_n είναι γραμμικό συναρτησοειδές, και

$$|T_n x| = n|\xi_n| \leq n\|x\|,$$

άρα, κάθε T_n είναι φραγμένο και $\|T_n\| \leq n$. Έχουμε $T_n(e_n) = n$, άρα $\|T_n\| = n$ (γιατί;). Αυτό δείχνει ότι η ακολουθία $(\|T_n\|)$ δεν είναι φραγμένη.

Από την άλλη πλευρά, κάθε $x \in c_{00}$ είναι τελικά μηδενική ακολουθία, άρα υπάρχει $n_0 = n_0(x)$ τέτοιος ώστε $T_n(x) = n\xi_n = 0$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή, η ακολουθία $(T_n x)$ είναι φραγμένη για κάθε $x \in c_{00}$.

Το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος δεν εφαρμόζεται εδώ, γιατί ο c_{00} δεν είναι πλήρης.

3. Αν $x_n \to x$, τότε για κάθε $f \in X^*$ έχουμε

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\| \cdot \|x_n - x\| \to 0,$$

δηλαδή $f(x_n) \to f(x)$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει: αν, για παράδειγμα, στον ℓ_2 πάρουμε $x_n = e_n$ τα διανύσματα της συνήθους ορθοκανονικής βάσης, έχουμε

$$f(e_n) \to 0 = f(0)$$

για κάθε $f \in \ell_2^*$ (Άσκηση 17, Κεφάλαιο 6). Όμως, $\|e_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα δεν ισχύει ότι $e_n \to 0$.

4. Ορίζουμε $T_n : X^* \to \ell_1$, με

$$T_n(f) = (f(x_1), \ldots, f(x_n), 0, 0, \ldots).$$

Κάθε T_n είναι γραμμικός τελεστής, και

$$\|T_n(f)\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} \|f\| \cdot \|x_k\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|\right) \cdot \|f\|.$$

Άρα, ο T_n είναι φραγμένος, και $\|T_n\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$. Η υπόθεση ότι $\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| < +\infty$ για κάθε $f \in X^*$, μας λέει ότι η ακολουθία $(T_n(f))$ είναι φραγμένη στον ℓ_1 για κάθε $f \in X^*$ (γιατί;). Ο X^* είναι χώρος Banach, άρα εφαρμόζεται το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος: υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|T_n(f)\| \leq M\|f\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)| \leq M\|f\|$$

για κάθε $f \in X^*$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| \leq M\|f\|$$

για κάθε $f \in X^*$ (γιατί;).

5. Θεωρούμε την ακολουθία $(g_n) = (\frac{1}{\varepsilon_n} f_n)$ στον X^*. Από την υπόθεση,

$$|g_n(x)| \leq K_x, \quad n \in \mathbb{N},$$

δηλαδή, η (g_n) ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ομοιόμορφου φράγματος. Αφού ο X είναι χώρος Banach, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|g_n\| \leq M, \quad n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \|f_n\| \leq M\varepsilon_n \to 0,$$

άρα, $\|f_n\| \to 0$.

6. Από το (α) στο (β): αν $x \in X$, τότε

$$\|T_n x\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\| \leq (\sup_n \|T_n\|) \cdot \|x\|,$$

άρα

$$\sup_n \|T_n x\| \leq (\sup_n \|T_n\|) \cdot \|x\| < +\infty.$$

Από το (β) στο (γ): όπως πρίν, για κάθε $x \in X$ και $g \in Y^*$, έχουμε

$$\sup_n |g(T_n x)| \leq \sup_n (\|g\| \cdot \|T_n x\|) = \|g\| \cdot \sup_n \|T_n x\| < +\infty.$$

Από το (γ) στο (β): Για κάθε $g \in Y^*$, η ακολουθία $(g(T_n x))$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$. Στη θεωρία είδαμε ότι αυτό μας δίνει ότι η $(T_n x)$ είναι φραγμένη στον Y.

Από το (β) στο (α): αυτό είναι ακριβώς το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος.

7. Ο T είναι ανοικτή απεικόνιση. Ειδικότερα, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε $T(D_X(0,1)) \supseteq D_Y(0,\delta)$ (θυμηθείτε το βασικό λήμμα στην απόδειξη του θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης).

Έστω $0 \neq y \in Y$. Τότε, $\delta y/2\|y\| \in D_Y(0,\delta)$, άρα υπάρχει $z \in X$ με $\|z\| < 1$ και $Tz = \delta y/2\|y\|$. Θέτουμε $x = 2\|y\|z/\delta$. Από τη γραμμικότητα του T,

$$T(x) = T\left(\frac{2\|y\|z}{\delta}\right) = \frac{2\|y\|}{\delta}\frac{\delta y}{2\|y\|} = y,$$

και

$$\|x\| = \frac{2\|y\| \cdot \|z\|}{\delta} \leq \frac{2}{\delta}\|y\|,$$

το οποίο είναι το ζητούμενο, με $M = 2/\delta$.

8. Θεωρούμε τον ταυτοτικό τελεστή

$$I : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2).$$

Ο I είναι γραμμικός, ένα προς ένα και επί, και η υπόθεση μας δίνει ότι ο I είναι συνεχής στο 0, άρα φραγμένος τελεστής (γιατί;). Αφού ο X είναι πλήρης ως προς τις δύο νόρμες, το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης μας λέει ότι ο $I^{-1} = I : (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$ είναι επίσης φραγμένος.

Υπάρχουν λοιπόν $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε: για κάθε $x \in X$,

$$\|x\|_2 = \|I(x)\|_2 \leq a\|x\|_1, \quad \|x\|_1 = \|I^{-1}(x)\|_1 \leq b\|x\|_2.$$

Οι δύο ανισότητες δείχνουν ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

9. Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός ισομορφισμός. Ο $T^{-1} : Y \to X$ ορίζεται από την

$$T^{-1}(y) = (\eta_1, 2\eta_2, 3\eta_3, \ldots).$$

Έχουμε

$$\|Tx\| = \sup_k \frac{|\xi_k|}{k} \leq \sup_k |\xi_k| = \|x\|,$$

άρα ο T είναι φραγμένος, και $\|T\| \leq 1$ (ισχύει ισότητα - γιατί;). Όμως, για κάθε n έχουμε

$$\frac{\|T^{-1}(e_n)\|}{\|e_n\|} = \frac{\|ne_n\|}{\|e_n\|} = n,$$

άρα ο T^{-1} δεν είναι φραγμένος. Το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης δεν εφαρμόζεται, γιατί ο c_{00} δεν είναι πλήρης.

10. Ο T είναι φραγμένος, άρα παίρνοντας $b = \|T\|$ έχουμε

$$\|Tx\| \leq b\|x\|, \quad x \in X.$$

Αφού ο T είναι φραγμένος, γραμμικός, ένα προς ένα και επί, και αφού οι X, Y είναι χώροι Banach, από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης ο T^{-1} είναι φραγμένος. Αν $x \in X$, τότε $x = T^{-1}(Tx)$ άρα

$$\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|Tx\|,$$

δηλαδή ισχύει και η αριστερή ανισότητα, με $a = 1/\|T^{-1}\|$.

11. Υποθέτουμε ότι $x_n \to x$ στον X και $(T_1 + T_2)(x_n) \to y$ στον Y. Θα δείξουμε ότι

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1 x + T_2 x = y,$$

οπότε ο T έχει κλειστό γράφημα.

Αφού ο T_2 είναι φραγμένος και $x_n \to x$, έχουμε

$$T_2 x_n \to T_2 x.$$

Όμως τότε,

$$T_1 x_n = (T_1 + T_2)(x_n) - T_2 x_n \to y - T_2 x.$$

Αφού ο T_1 έχει κλειστό γράφημα, αυτό σημαίνει ότι $y - T_2 x = T_1 x$ (γιατί;), δηλαδή το ζητούμενο.

12. (α) Έστω $y_n = Tx_n$ στο $T(C)$, με $y_n \to y$ στον Y. Θα δείξουμε ότι $y \in T(C)$, δηλαδή ότι υπάρχει $x \in C$ τέτοιο ώστε $y = Tx$.

Αφού το C είναι συμπαγές και $x_n \in C$, υπάρχουν υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) και $x \in C$, τέτοια ώστε $x_{k_n} \to x$. Τότε, αφού η (y_{k_n}) είναι υπακολουθία της συγκλίνουσας ακολουθίας (y_n), έχουμε

$$Tx_{k_n} = y_{k_n} \to y.$$

Ο T έχει κλειστό γράφημα, $x_{k_n} \to x$ και $y_{k_n} \to y$. Άρα, $y = Tx \in T(C)$.

(β) Έστω $x_n = T^{-1} y_n \in T^{-1}(K)$, με $x_n \to x \in X$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $y \in K$ με $x = T^{-1} y$.

Αφού το K είναι συμπαγές υποσύνολο του Y, υπάρχουν (y_{k_n}) και $y \in K$ τέτοια ώστε

$$y_{k_n} = Tx_{k_n} \to y.$$

Όμως, $x_{k_n} \to x$, και ο T έχει κλειστό γράφημα. Άρα, $y = Tx$.

13. Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος, γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής. Για να δείξουμε ότι ο $T^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένος, αρκεί να δείξουμε ότι έχει κλειστό γράφημα.

Έστω $y_n \to y$ στον Y, και $x_n = T^{-1} y_n \to x$ στον X. Θα δείξουμε ότι

$$x = T^{-1} y \Longleftrightarrow Tx = y.$$

(η ισοδυναμία εξηγείται από το ότι ο T είναι ένα προς ένα και επί). Ο T είναι φραγμένος, και $x_n \to x$. Άρα,

$$y_n = Tx_n \to Tx.$$

Όμως, έχουμε και την $y_n \to y$. Από μοναδικότητα του ορίου, $y = Tx$.

14. Αρκεί να δείξουμε ότι ο T έχει κλειστό γράφημα. Υποθέτουμε ότι $x_n \to x$ στον X και $Tx_n \to y$ στον Y. Θα δείξουμε ότι $y = Tx$.

Για κάθε $f \in Y^*$ ισχύουν τα εξής:

(α) Αφού $Tx_n \to y$ και το $f : Y \to \mathbb{R}$ είναι συνεχές,

$$f(Tx_n) \to f(y).$$

(β) Από την υπόθεση, αφού $x_n - x \to 0$,

$$f(T(x_n - x)) = f(Tx_n) - f(Tx) \to 0 \Longrightarrow f(Tx_n) \to f(Tx).$$

Δηλαδή, για κάθε $f \in Y^*$, $f(Tx) = f(y)$. Όμως αυτό σημαίνει ότι

$$y = Tx$$

(βασική συνέπεια του θεωρήματος Hahn-Banach είναι ότι ο Y^* «διαχωρίζει» τα σημεία του Y).

15. Παρατηρούμε πρώτα ότι για τις $f_n : X \to \mathbb{R}$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος ομοιόμορφου φράγματος. Ο X είναι χώρος Banach και για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι φραγμένη (γιατί συγκλίνει). Άρα, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|f_n\| \leq M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Τότε $\|f\| \leq M$ (βλέπε Άσκηση 1), και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $f_n(x) \to f(x)$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x)| &= |f_n(x_n - x) + f_n(x) - f(x)| \\ &\leq |f_n(x_n - x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq M\|x_n - x\| + |f_n(x) - f(x)| \to 0, \end{aligned}$$

δηλαδή, $f_n(x_n) \to f(x)$.

16. Αν ο $R(T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y, τότε είναι χώρος Banach, και ο $T : X \to R(T)$ είναι φραγμένος, γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής. Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, ο $T^{-1} : R(T) \to X$ είναι φραγμένος.

Αντίστροφα: έστω ότι ο $T^{-1} : R(T) \to X$ είναι φραγμένος, και έστω $y_n \in R(T)$ με $y_n \to y \in Y$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $Tx = y$.

Υπάρχουν $x_n \in X$ με $Tx_n = y_n$, και αφού ο T^{-1} είναι φραγμένος, έχουμε

$$(*) \qquad \|x_n - x_m\| = \|T^{-1}(y_n - y_m)\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|y_n - y_m\|$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Όμως η (y_n) συγκλίνει στον Y άρα είναι ακολουθία Cauchy στον Y, και από την $(*)$ συμπεραίνουμε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy στον X. Ο X είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $x_n \to x$.

Ο T είναι φραγμένος και $x_n \to x$, άρα $y_n = Tx_n \to Tx$. Από μοναδικότητα του ορίου,

$$y = Tx \in R(T),$$

δηλαδή το $R(T)$ είναι κλειστό.

17. Αν ο T είναι φραγμένος, τότε για κάθε $g \in Y^*$ το $g \circ T : X \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές (ως σύνθεση συνεχών γραμμικών συναρτήσεων), δηλαδή $g \circ T \in X^*$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, με την υπόθεση $g \in Y^* \Longrightarrow g \circ T \in X^*$ δείχνουμε ότι ο T έχει κλειστό γράφημα, οπότε είναι φραγμένος: έστω $x_n \to x$ στον X και $Tx_n \to y$ στον Y.

Αν $g \in Y^*$, από τη μία μεριά έχουμε

$$Tx_n \to y \Longrightarrow g(Tx_n) \to g(y),$$

και από την άλλη, αφού $g \circ T \in X^*$ και $x_n \to x$, έχουμε

$$g(Tx_n) = (g \circ T)(x_n) \to (g \circ T)(x) = g(Tx).$$

Δηλαδή,

$$g(y) = g(Tx), \quad g \in Y^*$$

και αφού ο Y^* διαχωρίζει τα σημεία του Y, παίρνουμε $y = Tx$. Έπεται ότι ο T έχει κλειστό γράφημα.

18. (α) Αν $f_n \to f$ στον $C^1[0,1]$ και $Tf_n \to g$ στον $C[0,1]$, τότε έχουμε τις ομοιόμορφες συγκλίσεις

$$f_n \to f, \quad f_n' \to g.$$

Είναι γνωστό ότι με αυτές τις υποθέσεις έχουμε $f' = g$ στο $[0,1]$, δηλαδή

$$T(f) = g.$$

Αυτό δείχνει ότι ο T έχει κλειστό γράφημα.

(β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, με $f_n(t) = t^n$. Τότε $\|f_n\| = 1$ για κάθε n, αλλά

$$(Tf_n)(t) = nt^{n-1}, \quad t \in [0,1],$$

δηλαδή, $\|Tf_n\| = n$. Αυτό δείχνει ότι ο T δεν είναι φραγμένος (γιατί;).

Το θεώρημα κλειστού γραφήματος δεν εφαρμόζεται σ' αυτήν την περίπτωση, κι αυτό σημαίνει (αναγκαστικά) ότι ο $C^1[0,1]$ δεν είναι χώρος Banach.

Κεφάλαιο 9

Το θεώρημα σταθερού σημείου

9.1 Συστολές - θεώρημα σταθερού σημείου

Ορισμός (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω $T : X \to X$ μια συνάρτηση. Το $x \in X$ λέγεται *σταθερό σημείο* της T αν $T(x) = x$.

(β) Η T λέγεται *συστολή* στον X, αν υπάρχει $0 < a < 1$ τέτοιος ώστε, για κάθε $x, y \in X$

$$d(T(x), T(y)) \leq ad(x, y).$$

Θεώρημα σταθερού σημείου (Banach) *Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Υποθέτουμε ότι ο X είναι πλήρης και ότι $T : X \to X$ είναι μια συστολή στον X. Τότε, η T έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.*

Απόδειξη: Ορίζουμε διαδοχικά τους όρους μιας ακολουθίας (x_n) στον X ως εξής: επιλέγουμε τυχόν $x_0 \in X$, και θέτουμε

$$x_1 = T(x_0), \quad x_2 = T(x_1) = T^2(x_0), \quad x_3 = T(x_2) = T^3(x_0), \ldots$$

Γενικά,

$$x_n = T^n(x_0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy στον X: αν $m \in \mathbb{N}$, τότε

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\ &\leq ad(x_m, x_{m-1}) \\ &= ad(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \\ &\leq a^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}), \end{aligned}$$

και, συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, βλέπουμε ότι

$$d(x_{m+1}, x_m) \leq a^m d(x_1, x_0), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Αν $m > n$, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη εκτίμηση και την τριγωνική ανισότητα, παίρνουμε

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq a^{m-1} d(x_1, x_0) + a^{m-2} d(x_1, x_0) + \cdots + a^n d(x_1, x_0) \\ &= a^n d(x_1, x_0) \frac{1 - a^{m-n}}{1 - a} \\ &\leq a^n \frac{d(x_1, x_0)}{1 - a}. \end{aligned}$$

Αφού $0 < a < 1$, έχουμε $a^n d(x_1, x_0)/(1-a) \to 0$ καθώς $m, n \to \infty$. Άρα, η (x_m) είναι ακολουθία Cauchy. Ο (X, d) είναι πλήρης, επομένως υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $x_m \to x$. Έχουμε

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \\ &= d(x, x_m) + d(Tx_{m-1}, Tx) \\ &\leq d(x, x_m) + d(x_{m-1}, x) \to 0, \end{aligned}$$

άρα $d(x, Tx) = 0$, δηλαδή $Tx = x$.

Αν υπήρχε κι άλλο σταθερό σημείο y της T, θα είχαμε

$$0 < d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq ad(x, y),$$

άτοπο, αφού $0 < a < 1$. □

Η απόδειξη του θεωρήματος μας δίνει και εκτίμηση για το πόσο κοντά βρισκόμαστε στο σταθερό σημείο x της T μετά το m-στό βήμα της διαδικασίας που περιγράψαμε:

Πόρισμα 9.1.1. Έστω $T : X \to X$ συστολή όπως στο Θεώρημα, και $x_0 \in X$. Αν x είναι το σταθερό σημείο της T, τότε

(α) $d(x_m, x) \leq \frac{a^m}{1-a} d(x_1, x_0)$,

(β) $d(x_m, x) \leq \frac{a}{1-a} d(x_m, x_{m-1})$.

Απόδειξη: Στην απόδειξη του θεωρήματος είδαμε ότι, αν $s > m$ τότε

$$d(x_s, x_m) \leq \frac{a^m}{1-a} d(x_1, x_0).$$

Αφήνοντας το s να πάει στο άπειρο, έχουμε $x_s \to x$, άρα

$$d(x, x_m) = \lim_{s \to \infty} d(x_s, x_m) \leq \frac{a^m}{1-a} d(x_1, x_0).$$

Για το (β) θεωρούμε την

$$y_0 = x_{m-1} \quad , \quad y_1 = x_m \quad , \quad \ldots \quad , \quad y_s = x_{m-1+s} \to x.$$

Εφαρμόζοντας το (α) για την (y_s) με $s = 1$, παίρνουμε

$$d(y_1, x) \leq \frac{a}{1-a} d(y_1, y_0),$$

δηλαδή

$$d(x_m, x) \leq \frac{a}{1-a} d(x_m, x_{m-1}). \quad \square$$

Πολύ συχνά ξέρουμε ότι η $T : X \to X$ είναι συστολή σε ένα υποσύνολο Y του X (και όχι σε ολόκληρον τον X). Αν το Y είναι κλειστό, τότε επιλέγοντας το $x_0 \in Y$ και εξασφαλίζοντας ότι όλοι οι όροι της (x_m) θα παραμείνουν στο Y, μπορούμε να βρούμε σταθερό σημείο της T στο Y (άρα, στον X):

Παράδειγμα. Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος, και $T : X \to X$. Υποθέτουμε ότι η T είναι συστολή (για κάποιο $0 < a < 1$) σε μια κλειστή μπάλα $Y = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$, όπου $x_0 \in X$ και $r > 0$. Αν $d(x_0, Tx_0) < (1-a)r$, τότε η $x_m = T^m x_0$ συγκλίνει σε σταθερό σημείο της T.

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε x_m ανήκει στο Y. Στην απόδειξη του θεωρήματος σταθερού σημείου είδαμε ότι

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{a^n}{1-a} d(x_1, x_0).$$

Παίρνοντας, $n = 0$, έχουμε

$$d(x_m, x_0) \leq \frac{1}{1-a} d(x_1, x_0) = \frac{1}{1-a} d(Tx_0, x_0) < \frac{(1-a)r}{1-a} = r,$$

δηλαδή, $x_m \in Y$, $m \in \mathbb{N}$. □

9.2 Εφαρμογή στις διαφορικές εξισώσεις

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση $f' = F(t, f)$, με αρχική συνθήκη την $f(t_0) = x_0$.

Θεώρημα 9.2.1. *(Picard) Έστω F συνεχής συνάρτηση στο ορθογώνιο*

$$R = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\},$$

τέτοια ώστε $|f(t, x)| \leq M$ για κάθε $(t, x) \in R$. Υποθέτουμε ότι η F ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή: υπάρχει $L > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $(t, x), (t, y) \in R$,

$$|F(t, x) - F(t, y)| \leq L|x - y|.$$

Τότε, η $f' = F(t, f)$, $f(t_0) = x_0$, έχει μοναδική λύση στο διάστημα $[t_0 - h, t_0 + h]$, αν $h < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$.

Απόδειξη: Θεωρούμε τον πλήρη μετρικό χώρο $C[J]$, $J = [t_0 - h, t_0 + h]$, με μετρική την $d(f, g) = \max_{t \in J} |f(t) - g(t)|$, και τον υπόχωρο

$$C_1 = \{f \in C[J] : |f(t) - x_0| \leq Mh\}.$$

Ο C_1 είναι κλειστός υπόχωρος του $C[J]$, άρα πλήρης. Η f είναι λύση της εξίσωσης αν και μόνο αν $Tf = f$, όπου

$$(Tf)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))ds, \quad t \in J.$$

Έχουμε $|f(s) - x_0| \leq Ml \leq b$, άρα $(s, f(s)) \in R$ για κάθε s, και η F είναι συνεχής στο R, άρα το $\int_{t_0}^{t} F(s, f(s))ds$ είναι καλά ορισμένο. Επίσης,

$$|(Tf)(t) - t_0| = \left| \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))ds \right| \leq M|t - t_0| \leq Mh,$$

άρα,

$$f \in C_1 \Longrightarrow Tf \in C_1.$$

Τέλος,

$$\begin{aligned} |(Tf)(t) - (Tg)(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} \{F(s, f(s)) - F(s, g(s))\} \, ds \right| \\ &\leq L \left(\max_{J} |f(s) - g(s)| \right) |t - t_0| \\ &\leq (Lh)d(f, g), \end{aligned}$$

και $0 < Lh < 1$, άρα η T είναι συστολή: $d(Tf, Tg) \leq (Lh)d(f, g)$.

Από το θεώρημα σταθερού σημείου, υπάρχει μοναδική $f \in C_1$ τέτοια ώστε $Tf = f$, δηλαδή

$$f(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))ds, \quad t \in J,$$

οπότε $f' = F(t, f)$, και $f(t_0) = x_0$. □

Σημείωση: Η απόδειξη του θεωρήματος σταθερού σημείου δείχνει ότι μπορούμε να πάρουμε τη λύση f σαν όριο της ακολουθίας

$$f_{n+1}(s) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))ds,$$

ξεκινώντας από τυχούσα $f_0 \in C_1$.

9.3 Εφαρμογή στις ολοκληρωτικές εξισώσεις

(α) **Εξίσωση Fredholm**. *Έστω $J = [a, b]$, και $K : J \times J \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Αν $|K(t, s)| \leq M$ στο $J \times J$, και $|\mu| < 1/M(b - a)$, τότε η*

$$f(t) = g(t) + \mu \int_a^b K(t, s) f(s) ds$$

έχει μοναδική λύση στο J.

Απόδειξη: Ορίζουμε $T : C[a, b] \to C[a, b]$, με

$$(Tf)(t) = g(t) + \mu \int_a^b K(t, s) f(s) ds.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η T είναι συστολή (γιατί;). Όμως,

$$\begin{aligned} d(Tf, Th) &= \max_{t \in J} |(Tf)(t) - (Th)(t)| \\ &= |\mu| \max_{t \in J} \Big| \int_a^b K(t, s)(f(s) - h(s)) ds \Big| \\ &\leq |\mu| M \left(\max_{s \in J} |f(s) - h(s)| \right) (b - a) \\ &= \{|\mu| M (b - a)\} \, d(f, h). \end{aligned}$$

Αφού $|\mu| M (b - a) < 1$, το θεώρημα σταθερού σημείου μας εξασφαλίζει μοναδική $f_0 \in C[a, b]$ τέτοια ώστε $Tf_0 = f_0$. □

(β) **Εξίσωση Volterra** *Έστω $J = [a, b]$, και $K : J \times J \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Τότε, για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$, η*

$$f(t) = g(t) + \mu \int_a^b K(t, s) f(s) ds$$

έχει μοναδική λύση στο J.

Απόδειξη: Για κάθε $f \in C[J]$ ορίζουμε

$$(Tf)(t) = g(t) + \mu \int_a^t K(t, s) f(s) ds, \quad t \in J.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι $T(f) \in C[J]$. Δηλαδή, $T : C[J] \to C[J]$. Για κάθε $f, h \in C[J]$, έχουμε

$$\begin{aligned} |(Tf)(t) - (Th)(t)| &= |\mu| \left| \int_a^b K(t, s)(f(s) - h(s)) ds \right| \\ &\leq |\mu| (\max |K|) d(f, h) \int_a^t ds \\ &= |\mu| (\max |K|) d(f, h)(t - a). \end{aligned}$$

Επαγωγικά δείχνουμε ότι

$$(*) \qquad |(T^m f)(t) - (T^m h)(t)| \leq |\mu|^m (\max |K|)^m \frac{(t - a)^m}{m!} d(f, h).$$

Επαγωγικό βήμα:

$$\begin{aligned} |(T^{m+1} f)(t) - (T^{m+1} h)(t)| &= |\mu| \Big| \int_a^t K(t, s) \left\{ (T^m f)(s) - (T^m h)(s) \right\} ds \Big| \\ &\leq |\mu| (\max |K|) \int_a^t |\mu|^m (\max |K|)^m \frac{(s - a)^m}{m!} d(f, h) ds \\ &= |\mu|^{m+1} (\max |K|)^{m+1} \frac{(t - a)^{m+1}}{(m + 1)!} d(f, h). \end{aligned}$$

Από την $(*)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} d(T^m f, T^m h) &= \max_t |(T^m f)(t) - (T^m h)(t)| \\ &\leq \left\{ |\mu|^m (\max|K|)^m \frac{(b-a)^m}{m!} \right\} d(f,h). \end{aligned}$$

Για μεγάλα m έχουμε $|\mu|^m(\max|K|)^m \frac{(b-a)^m}{m!} < 1$. Άρα, η T^m είναι συστολή στον $C[a,b]$. Έπεται ότι η T^m έχει σταθερό σημείο: υπάρχει f_0 με την ιδιότητα $T^m f_0 = f_0$. Αν πάρουμε τυχούσα $f \in C[a,b]$, τότε $(T^m)^n f \to f_0$ καθώς $n \to \infty$.

Παίρνοντας $f = Tf_0$, έχουμε

$$f_0 = \lim_{n\to\infty} T^{mn}(Tf_0) = \lim_{n\to\infty} T(T^{mn} f_0) = \lim_{n\to\infty} Tf_0 = Tf_0.$$

Η f_0 είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της T, γιατί κάθε σταθερό σημείο της T είναι και σταθερό σημείο της T^m, και η T^m έχει μοναδικό σταθερό σημείο (είναι συστολή). □

9.4 Ασκήσεις

1. Κάθε συστολή $T : X \to X$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2. Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι η πληρότητα του X είναι ουσιαστική για την απόδειξη του θεωρήματος σταθερού σημείου.

3. Έστω $T : [1,+\infty) \to [1,+\infty)$ με $Tx = x + \frac{1}{x}$. Δείξτε ότι αν $x \neq y$ τότε $|Tx - Ty| < |x - y|$, αλλά η T δεν έχει σταθερό σημείο.

4. Αν η T είναι συστολή, τότε η T^n, $n \in \mathbb{N}$ είναι συστολή. Δείξτε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

5. Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος, και $T : X \to X$ συνάρτηση με την ιδιότητα $d(T(x), T(y)) < d(x,y)$ για κάθε $x \neq y$ στον X. Δείξτε ότι η T έχει σταθερό σημείο.

6. Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, με $g(a) < 0$, $g(b) > 0$, και $0 < c \leq g'(x) \leq d$ στο $[a,b]$. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του σταθερού σημείου για να βρείτε καλή προσέγγιση της μοναδικής (γιατί;) λύσης της $g(x) = 0$ στο $[a,b]$.

[*Υπόδειξη:* Θεωρείστε συνάρτηση $f(x) = x - \mu g(x)$ για κατάλληλο μ, και βρείτε σταθερό σημείο της f.]

7. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, και x_0 απλή ρίζα της f στο (a,b). Δείξτε ότι η

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

είναι συστολή σε μια περιοχή του x_0, και συμπεράνετε ότι αν ξεκινήσουμε με x_1 σε αυτή την περιοχή και ορίσουμε (x_n) μέσω της $x_{n+1} = g(x_n)$, τότε $x_n \to x_0$.

8. Δίνεται το γραμμικό σύστημα εξισώσεων $x = Ax + b$, όπου $A = (a_{ij})_{i,j\leq n}$ και $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Αν

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| < 1$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$, δείξτε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση. Δείξτε ότι η λύση αυτή παίρνεται σαν το όριο της $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, όπου $x_1 \in \mathbb{R}^n$ αυθαίρετο, και $x_{n+1} = Ax_n + b$.

9. (α) Το ίδιο με την Άσκηση 9, αν για τον πίνακα A υποθέσουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{kj}| < 1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

(β) Το ίδιο, αν υποθέσουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 < 1.$$

10. Δείξτε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών $f' = |f|^{1/2}$, $f(0) = 0$ έχει λύσεις τις $f \equiv 0$ και $g(t) = t|t|/4$. Έρχεται αυτό σε αντίφαση με το θεώρημα του Picard; Βρείτε κι άλλες λύσεις.

11. Βρείτε όλες τις αρχικές συνθήκες για τις οποίες το πρόβλημα αρχικών τιμών $tf' = 2f$, $f(t_0) = x_0$ (α) δεν έχει λύση, (β) έχει περισσότερες από μία λύση, (γ) έχει ακριβώς μία λύση.

12. Θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$(*) \qquad f(x) = \mu \int_a^b K(x, y, f(y))dy + \phi(x),$$

με συνεχείς K και ϕ, και την K να ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz της μορφής

$$|K(x, y, z_1) - K(x, y, z_2)| \leq M|z_1 - z_2|.$$

Δείξτε ότι η $(*)$ έχει μοναδική λύση αν $|\mu| < \frac{1}{M(b-a)}$.

13. Λύστε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$f(t) - \mu \int_0^1 e^{t-s} f(s)ds = g(t)$$

όπου $|\mu| < 1$, παίρνοντας $f_0 = g$ και ορίζοντας $f_{n+1} = Tf_n$ για κατάλληλη T.

14. Δίνονται ένας χώρος με νόρμα X, ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \to X$, και ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο K του X με την ιδιότητα $T(K) \subseteq K$. Δείξτε ότι ο T έχει σταθερό σημείο στο K (Θεώρημα Markov-Kakutani), ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

(α) Θέτουμε T_0 τον ταυτοτικό τελεστή, $T^k = T \circ \cdots \circ T$ (k φορές). Δείξτε ότι ο

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k, \quad n \in \mathbb{N}$$

είναι φραγμένος, γραμμικός, και $S_n(K) \subseteq K$.

(β) Δείξτε ότι οι S_n αντιμετατίθενται: $S_m \circ S_n = S_n \circ S_m$, $m, n \in \mathbb{N}$.

(γ) Για κάθε $n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$S_{n_1} \circ \cdots \circ S_{n_s}(K) \subseteq S_{n_1}(K).$$

(δ) Έστω (Y, d) συμπαγής μετρικός χώρος. Αν (F_n) ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του Y με την ιδιότητα $\bigcap_{j\leq n} F_k \neq \emptyset$ για κάθε n, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

(ε) $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(K) \neq \emptyset$.

(ζ) Αν $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(K)$, τότε $T(x) - x \in \frac{1}{n}(K - K)$, όπου $K - K = \{u - v : u, v \in K\}$.

(η) Αν $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(K)$, τότε $T(x) = x$.