Υπολογιστικές Μέθοδοι στη Θεωρία Αποφάσεων
Σειρά Ασκήσεων 1
Παράδοση μέχρι 15 Ιανουαρίου 2020

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Θεωρούμε ένα πρόβλημα προγραμματισμού παραγωγής πολλών περιόδων και ενός μοναδικού προϊόντος. Δίνεται ο ορίζοντας προγραμματισμού N, η ζήτηση d_i, το μοναδιαίο κόστος παραγωγής c_i και το κόστος αποθήκευσης h_i ανά μονάδα προϊόντος που μεταφέρεται από την περίοδο i στην περίοδο $i+1$, $i = 1, \ldots, N$. Επίσης υποθέτουμε ότι η χωρητικότητα του αποθηκευτικού χώρου είναι ίση με M.

(α)Να γραφεί το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συνολικού κόστους ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

(β) Να γράψετε μια συνάρτηση Matlab που δέχεται τα παραπάνω δεδομένα ως είσοδο και παράγει τους πίνακες A, b, c του παραπάνω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού σε κανονική μορφή.

(γ) Θεωρήστε $N = 10$ και χρησιμοποιήστε τιμές της επιλογής σας για τα διανύσματα ζήτησης, κόστους παραγωγής και κόστους αποθήκευσης. Έστω $D = \sum_{i=1}^{N} d_i$ η συνολική ζήτηση στη διάρκεια του ορίζοντα. Θεωρήστε $k = 20$ διαφορετικές τιμές της παραμέτρου M ισοκατανεμημένες στο διάστημα με ελάχιστη τιμή $M_0 = D/10$ και μέγιστη τιμή $M_1 = 3D/2$. Λύστε το πρόβλημα για τις k τιμές του M και δημιουργήστε ένα γράφημα με την βέλτιστη τιμή του προβλήματος ως συνάρτηση του M.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. **(α)** Να γράψετε μια συνάρτηση Matlab που παίρνει τα δεδομένα του γενικού προβλήματος διαμετακομιδής σε δίκτυο και επιστρέφει τους πίνακες του π.γ.π. σε κανονική μορφή.

(β) Να γράψετε μια συνάρτηση Matlab που παίρνει τα δεδομένα του γενικού προβλήματος διαμετακομιδής σε δίκτυο και επιστρέφει τους πίνακες του π.γ.π. σε κανονική μορφή.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. Θεωρούμε ένα αυτοκινητόδρομο που διαιρείται σε n μικρότερα τμήματα. Για το φωτισμό του δρόμου θα χρησιμοποιηθούν λάμπες που είναι τοποθετημένες σε m δοσμένα σημεία. Αν η ισχύς της λάμπας στο σημείο j είναι ίση με $x_j, j = 1, \ldots, m$, τότε ο φωτισμός του τμήματος i είναι ίσος με $P_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j$, $i = 1, \ldots, m$, όπου a_{ij} γνωστοί συντελεστές. Ο επιθυμητός φωτισμός για το τμήμα i είναι ίσος με k_i (ενώ και ο υπερφωτισμός και ο υποφωτισμός δεν είναι επιθυμητοί). Το πρόβλημα είναι ότι αν $m < n$ τότε γενικά δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί ακριβώς ο επιθυμητός φωτισμός σε όλα τα τμήματα του δρόμου.

(α) Αναπτύξτε ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού για αυτό το πρόβλημα.

(β) Να γράψετε μια συνάρτηση Matlab που δέχεται τα παραπάνω δεδομένα ως είσοδο και παράγει τους πίνακες A, b, c του παραπάνω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού σε κανονική μορφή.

(γ) Χρησιμοποιήστε δικές σας τιμές για τα δεδομένα του προβλήματος και λύστε το πρόβλημα που αναπτύξατε στα (α) και (β), για την περίπτωση όπου ο απαιτούμενος φωτισμός στα τμήματα του δρόμου είναι μια συνάρτηση τριγωνικής μορφής με μέγιστο στο κέντρο του δρόμου, δηλαδή, ίσος με $k_i = B - d|i - n/2|, i = 1, \ldots, n$, για B, d τέτοια ώστε $B > nd/2$. Πάρτε $B = 100$ και παρουσιάστε σε γράφημα την βέλτιστη τιμή του προβλήματος ως συνάρτηση του d.

Σημείωση: Αν νομίζετε ότι δεν δίνονται όλα τα δεδομένα που χρειάζονται, έχετε δίκιο. Αυτό συμβαίνει συνήθως στα πραγματικά προβλήματα. Κάντε κατάλληλες υποθέσεις και ορίστε τα επιπλέον δεδομένα που θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. Μια μορφή του προβλήματος πολυωνυμικής παρεμβολής στην αριθμητική ανάλυση ορίζεται ως εξής: Έστω ένα σύνολο σημείων $(x_j, y_j), j = 1, \ldots, n$ στο επίπεδο. Ζητείται να βρεθεί το πολυώνυμο βαθμού k με $k < n$ που παρεμβάλλεται κατά το πλησιέστερο δυνατό ανάμεσα στα σημεία. Συγκεκριμένα ζητείται να βρεθούν οι συντελεστές $a_0, \ldots, a_k$ έτσι ώστε το πολυώνυμο

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$$

να ελαχιστοποιεί τη συνολική απόλυτη απόκλιση

$$D(f) = \sum_{j=1}^{n} |y_i - f(x_i)|$$

πάνω σε όλα τα πολυώνυμα βαθμού k με πραγματικούς συντελεστές.

(α) Αναπτύξτε ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού για αυτό το πρόβλημα.

(β) Να γράψετε μια συνάρτηση Matlab που δέχεται τα παραπάνω δεδομένα ως είσοδο και παράγει τους πίνακες A, b, c του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού σε κανονική μορφή.

Γενική Παρατήρηση: Μπορείτε αντί για Matlab να χρησιμοποιήσετε όποιο άλλο λογισμικό προτιμάτε.