

# Ντετερμινιστικά Μοντέλα Επιχειρησιακής Έρευνας

## Ιούνιος 2026

**ΘΕΜΑ 1.** Μια επιχείρηση πρόκειται να παράγει δύο προϊόντα. Οι ποσότητες παραγωγής συμβολίζονται με  $x_1$  και  $x_2$ .

Λόγω αβεβαιότητας στην αγορά εξετάζονται τέσσερα πιθανά σενάρια. Το κέρδος (σε χιλιάδες ευρώ) σε κάθε σενάριο δίνεται από

$$P_1 = 6x_1 + 4x_2,$$

$$P_2 = 5x_1 + 6x_2,$$

$$P_3 = 7x_1 + 2x_2,$$

$$P_4 = 4x_1 + 7x_2.$$

Οι παραγωγικοί περιορισμοί είναι

$$2x_1 + x_2 \leq 100,$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 120,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

(α) Η διοίκηση επιθυμεί να επιλέξει σχέδιο παραγωγής που *μεγιστοποιεί το χειρότερο δυνατό κέρδος* μεταξύ των τεσσάρων σεναρίων. Να διατυπώσετε το αντίστοιχο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

(β) Η διοίκηση αποφασίζει τελικά να χρησιμοποιήσει τη μέθοδο *Goal Programming*. Θεωρεί ότι πρέπει να επιτευχθούν οι παρακάτω στόχοι:

- Το κέρδος σε κάθε σενάριο να είναι τουλάχιστον 350 χιλιάδες ευρώ.
- Η συνολική παραγωγή να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στις 75 μονάδες.

Η υστέρηση από τον στόχο κέρδους τιμωρείται με συντελεστή 10, ενώ η απόκλιση (και προς τις δύο κατευθύνσεις) από τον στόχο της συνολικής παραγωγής τιμωρείται με συντελεστή 1. Να διατυπώσετε το αντίστοιχο μοντέλο Goal Programming.

**ΘΕΜΑ 2. (35%)** Έστω το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$\begin{array}{llll} z_P = \max & x_1 & +x_2 & \\ & 2x_1 & -x_2 & \leq 2 \\ & -x_1 & +2x_2 & \leq 2 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

(α) Να διατυπωθεί το πρόβλημα  $z_P$  σε κανονική μορφή.

(β) Να διατυπωθεί το δυϊκό πρόβλημα  $z_D$ .

(γ) Να βρεθούν οι Βασικές Εφικτές Λύσεις του  $z_P$  και να παρασταθούν γεωμετρικά.

(δ) Για κάθε Βασική Εφικτή Λύση του  $z_P$  να βρεθεί η αντίστοιχη Βασική Λύση του  $z_D$ , να παρασταθεί γεωμετρικά και να δειχθεί αν είναι ή όχι εφικτή.

(ε) Να βρεθούν οι βέλτιστες λύσεις των δύο προβλημάτων με βάση την απάντηση στο (δ).

**ΘΕΜΑ 3.** Έστω το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{array}{ll}\max & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 \leq 4, \\ & x_1 \leq 2, \\ & x_2 \leq 3, \\ & x_1, x_2 \geq 0.\end{array}$$

(α) Γράψτε τις εξισώσεις του κεντρικού μονοπατιού.

(β) Έστω ότι έχουμε ένα αρχικό σημείο  $x^{(0)} = (1, 1)^T$  και αρχική τιμή της παραμέτρου ποινής  $\mu = 1$ .

Εφαρμόστε ένα βήμα της μεθόδου Newton για τον αλγόριθμο του κεντρικού μονοπατιού.

**Διάρκεια : 2.5 ώρες**

**Καλή Επιτυχία!**

## ΘΕΜΑ 1

α) Το πρόβλημα εφ'εξής είναι ως

$$\max f(x)$$

$$\text{v.π.} \quad 2x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{όπου} \quad f(x) = \min \left\{ \begin{array}{l} 6x_1 + 4x_2, \quad 5x_1 + 6x_2, \\ 7x_1 + 2x_2, \quad 4x_1 + 7x_2 \end{array} \right\}$$

Η αντικ. συνάρτηση είναι τμηματικά γραμμική και είναι, επομένως το πρόβλημα ανήκει σε κάποιο maximin:

$$\max \quad z$$

$$\text{v.π.} \quad z \leq 6x_1 + 4x_2$$

$$z \leq 5x_1 + 6x_2$$

$$z \leq 7x_1 + 2x_2$$

$$z \leq 4x_1 + 7x_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

β) Οι ανεξάρτητοι περιορισμοί είναι οι

$$2x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Οι εξαρτημένοι περιορισμοί είναι 2 ειδών:

1) Στόχος κέρδους  $\geq 350$  σε κάθε σενάριο

Η υστέρηση έχει ποινή 10 ανά μονάδα:

$$10(350 - P_1)^+ + 10 \cdot (350 - P_2)^+ + 10(350 - P_3)^+ \\ + 10 \cdot (350 - P_4)^+$$

2) Στόχος συνολικής παραγωγής  $x_1 + x_2 = 75$

Η απόκλιση έχει ποινή 1 ανά μονάδα:

$$1 \cdot (x_1 + x_2 - 75)^+ + 1 \cdot (75 - x_1 - x_2)^+$$

Το μοντέλο goal programming

μπορεί επομένως να εκφραστεί ως:

$$\min 10u_1 + 10u_2 + 10u_3 + 10u_4 + u_5 + v_5$$

$$\text{v.n.} \quad 2x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$6x_1 + 4x_2 + u_1 - v_1 = 350$$

$$5x_1 + 6x_2 + u_2 - v_2 = 350$$

$$7x_1 + 2x_2 + u_3 - v_3 = 350$$

$$4x_1 + 7x_2 + u_4 - v_4 = 350$$

$$x_1 + x_2 + u_5 - v_5 = 75$$

$$x_1, x_2, u_1, \dots, u_5, v_1, \dots, v_5 \geq 0$$

## DEMA 2

$$\textcircled{a} \quad z_p = \max x_1 + x_2$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_4 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

β

$$z_p = \max x_1 + x_2$$

$$2x_1 - x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$z_D = \min 2w_1 + 2w_2$$

$$2w_1 - w_2 \geq 1$$

$$-w_1 + 2w_2 \geq 1$$

$$w_1, w_2 \geq 0$$

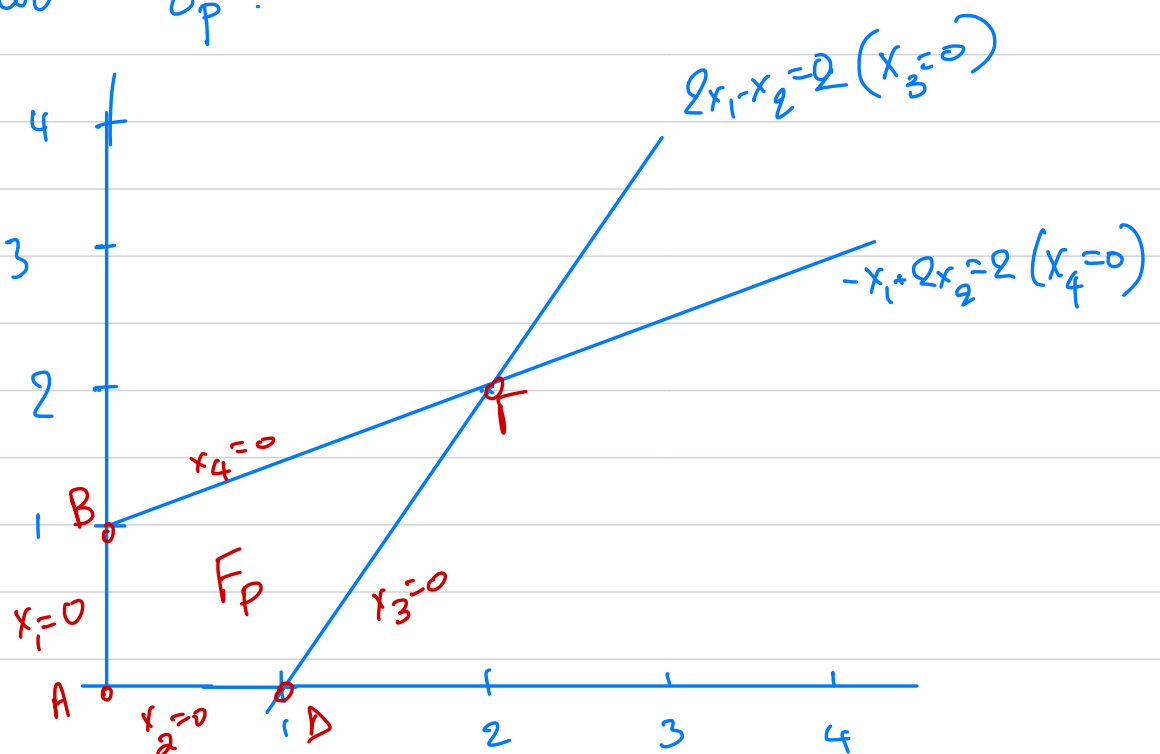
γ

Από την κανονική μορφή του  $z_p$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c' = (1 \ 1 \ 0 \ 0)$$

Οι βασικές εφικτές λύσεις μπορούν να προσδιοριστούν απευθείας από τη γεωμετρική αναπαράσταση του  $z_p$ :



Ο<sub>1</sub> ΒΕΙ αντιστοιχούν στις κορυφές Α, Β, Γ, Δ της εφικτής περιοχής. Για κάθε κορυφή έχουμε:

$$A: \quad x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = (A_3 \ A_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B: \quad x_1 = x_4 = 0 \Rightarrow x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = (A_2 \ A_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

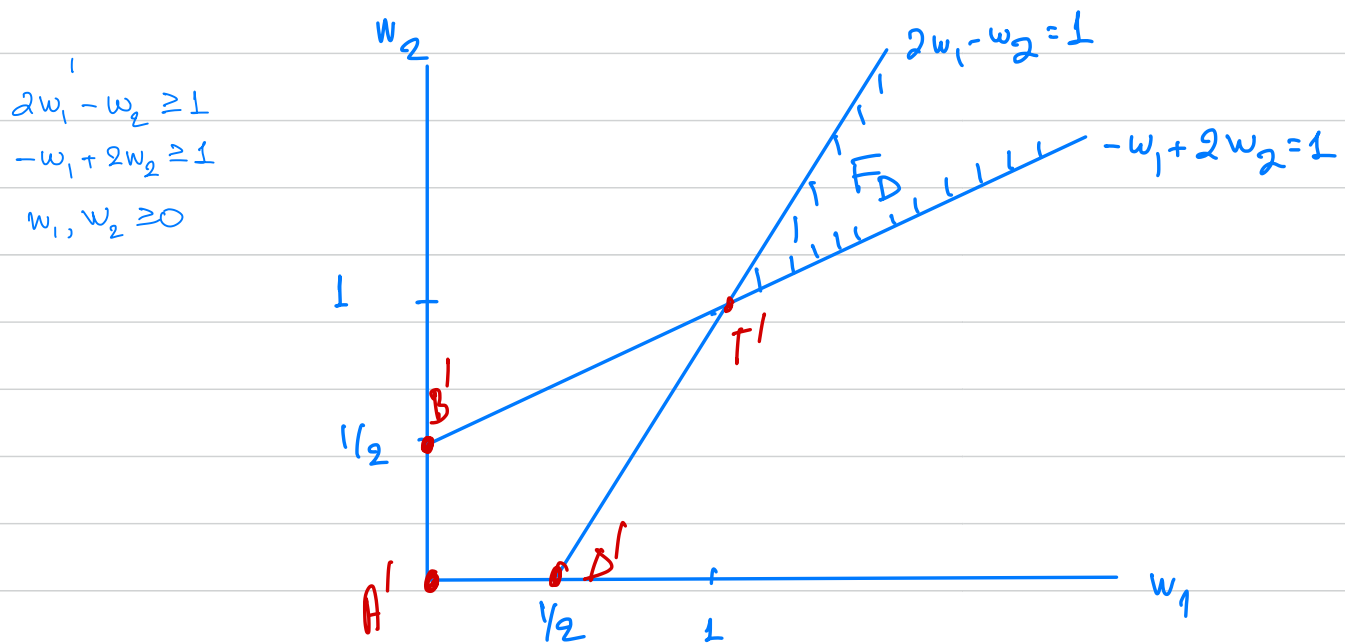
$$\Gamma: \quad x_3 = x_4 = 0, \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = (A_1 \ A_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D: \quad x_2 = x_3 = 0, \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = (A_1 \ A_4) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C'_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

⑤ Η γεωμετρική αναπαράσταση των δεικτών είναι



Για καθεμία από τις ΒΕΛ του  $Z_P$  βρίσκουμε το αντίστοιχο δεικτικό διάνυσμα  $w' = C_B B^{-1}$

A:  $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_{B_1} = (0 \ 0)$

$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad w' = (0 \ 0) \quad (\text{σχετίο } A')$

B:  $B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C_{B_2} = (2 \ 0)$

$B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow w' = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} = (0 \ 1/2)$   
( $B'$ )

$$\Gamma: B_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C'_{B_3} = (1 \ 1)$$

$$B_3^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \Rightarrow W' = (1 \ 1) \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = (1 \ 1) (\Gamma')$$

$$\Delta: B_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C'_{B_4} = (1 \ 0)$$

$$B_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow W' = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = (1/2 \ 0) (\Delta')$$

Από τις λύσεις του δοικού παρατηρούμε ότι μόνο η  $\Gamma'$ :

$W' = (1, 1)$  είναι εφικτή στο δοικό πρόβλημα επομένως

οι κορυφές  $\Gamma, \Gamma'$  αντιστοιχούν σε ένα ζεύγος λύσεων

λύσεων πρωτεύουσας-δοικού:  $x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad W^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

### ΘΕΜΑ 3

$$\textcircled{a} \quad z_p = \max \quad 2x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_2 \leq 3$$

$$z_D = \min \quad 4y_1 + 2y_2 + 3y_3$$

$$y_1 + y_2 \geq 2$$

$$y_1 + y_3 \geq 1$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Γε κανονική μορφή

$$\max \quad 2x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 + w_1 = 4$$

$$x_1 + w_2 = 2$$

$$x_2 + w_3 = 3$$

$$x_1, x_2, w_1, w_2, w_3 \geq 0$$

$$\min \quad 4y_1 + 2y_2 + 3y_3$$

$$y_1 + y_2 - z_1 = 2$$

$$y_1 + y_3 - z_2 = 1$$

$$y_1, y_2, y_3, z_1, z_2 \geq 0$$

Οι εξισώσεις central path είναι:

$$x_1 + x_2 + w_1 = 4$$

$$x_1 + w_2 = 2$$

$$x_2 + w_3 = 3$$

$$y_1 + y_2 - z_1 = 2$$

$$y_1 + y_3 - z_2 = 1$$

$$x_1 z_1 = \mu$$

$$x_2 z_2 = \mu$$

$$y_1 w_1 = \mu$$

$$y_2 w_2 = \mu$$

$$y_3 w_3 = \mu$$

Αυτές ανταποκρίνουν στη γενική μορφή:

$$Ax + w = b$$

$$A^T y - z = c$$

$$x z e = \mu e$$

$$y w e = \mu e$$

οπότε  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Παιρνοντας ως αρχική λύση  $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mu = 1$ ,

εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο Newton path following:

Θεωρούμε (αυθαίρετα) και μια αρχική προσέγγιση  $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

για το δίκτυο (εφίπυ)

Για την αρχική προσέγγιση  $w^{(0)}, z^{(0)}$  μπορούμε να

πάρουμε:  $Ax^{(0)} + w^{(0)} = b \Rightarrow w^{(0)} = b - Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$A^T y^{(0)} - z^{(0)} = c \Rightarrow z^{(0)} = A^T y^{(0)} - c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

οπότε  $\rho = b - Ax^{(0)} = w^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\sigma = c - A^T y^{(0)} + z^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Enkom} : \mu e - XZe = \begin{pmatrix} \mu - x_1 z_1 \\ \mu - x_2 z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu e - \gamma w e = \begin{pmatrix} \mu - y_1 w_1 \\ \mu - y_2 w_2 \\ \mu - y_3 w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 1 - 2 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως οι εξισώσεις ενός βήματος της μεθόδου Newton είναι:

$$A \Delta x + \Delta w = p$$

$$A^T \Delta y - \Delta z = 0$$

$$Z \Delta x + X \Delta z = \mu e - XZe$$

$$W \Delta y + Y \Delta w = \mu e - \gamma w e$$

}  $\Rightarrow$

$$A \Delta x + \Delta w = p \begin{cases} \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta w_1 = 0 \\ \Delta x_1 + \Delta w_2 = 0 \\ \Delta x_2 + \Delta w_3 = 0 \end{cases}$$

$$A^T \Delta y - \Delta z = 0 \begin{cases} \Delta y_1 + \Delta y_2 - \Delta z_1 = 0 \\ \Delta y_1 + \Delta y_3 - \Delta z_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} Z \Delta x + X \Delta z = \\ \mu e - XZe \end{matrix} \begin{cases} \Delta x_1 + \Delta z_1 = 0 \\ \Delta x_2 + \Delta z_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} W \Delta y + Y \Delta w = \\ \mu e - \gamma w e \end{matrix} \begin{cases} 2 \Delta y_1 + \Delta w_1 = 0 \\ \Delta y_2 + \Delta w_2 = -1 \\ 2 \Delta y_3 + \Delta w_3 = 0 \end{cases}$$

Αντί της λύση των παραπάνω γραμμικού  
συστήματος υπολογίζουμε το step size  $\theta$

και από αυτό ως νέες τιμές

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x$$

$$y^{(1)} = y^{(0)} + \Delta y$$

$$z^{(1)} = z^{(0)} + \Delta z$$

$$w^{(1)} = w^{(0)} + \Delta w,$$

είναι νέα τιμή του  $\mu^{(1)}$ , σύμφωνα  
με τον αλγόριθμο.