

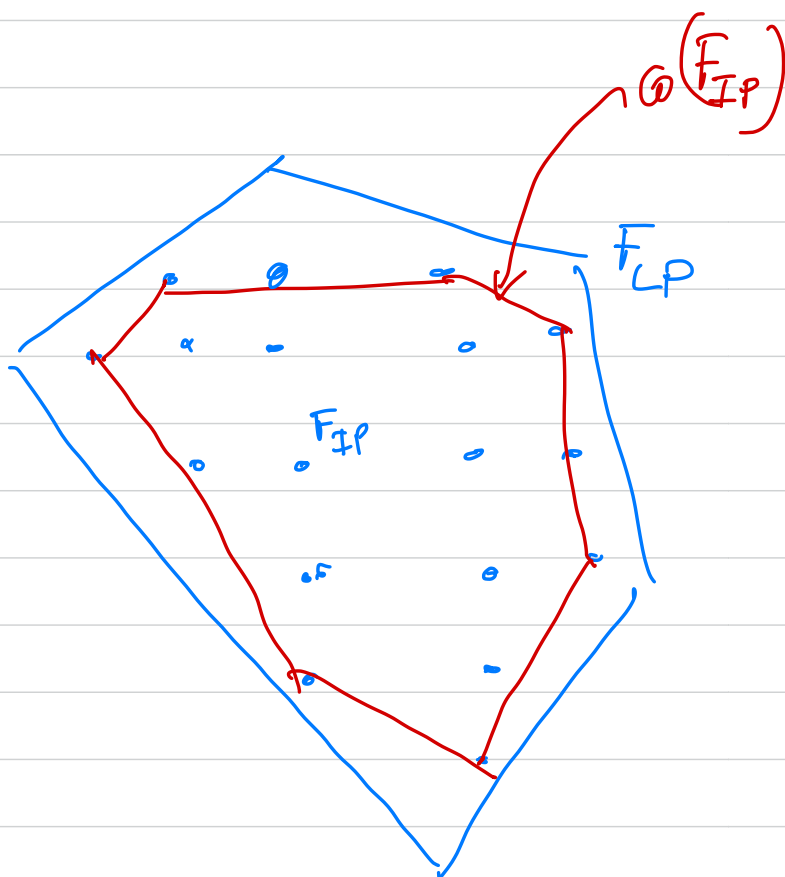
IP

26/5/2026

$$\begin{aligned} z = \max \quad & C^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{LP} = \max \quad & C^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (LP)$$

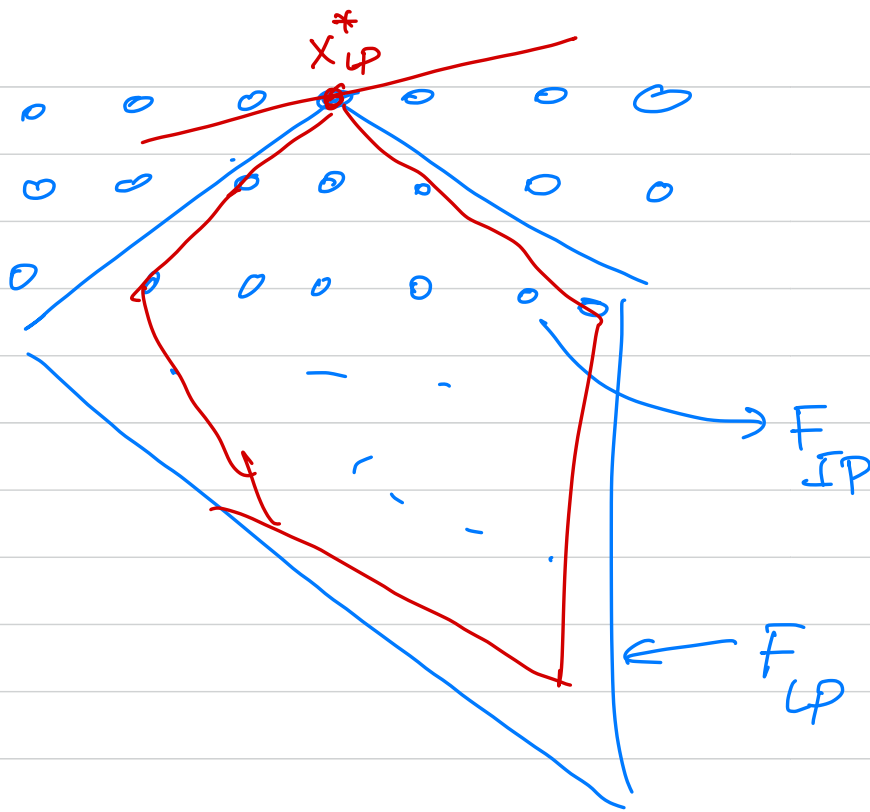
$$z \leq z_{LP}$$



$$F_{IP} \subseteq \omega(F_{IP}) \subseteq F_{LP}$$

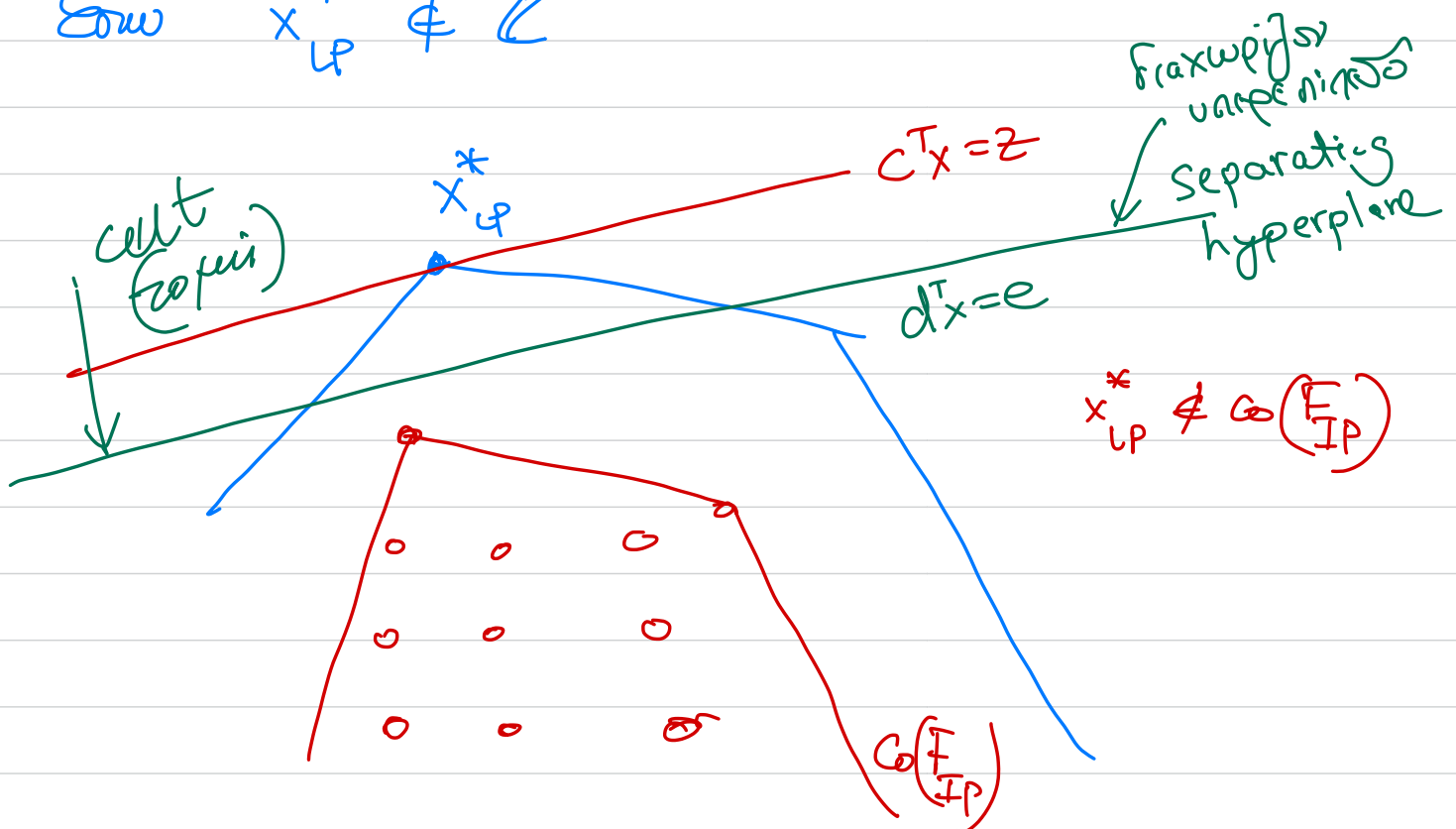
$\omega(F)$ = smallest convex set containing F

or G : convex set and $F \subseteq G \Rightarrow \omega(F) \subseteq G$



On $x_{LP}^* \in \mathbb{Z}^n \Rightarrow x_{IP}^* = x_{LP}^* \text{ και } z_{IP} = z_{LP}$

Now $x_{LP}^* \notin \mathbb{Z}^n$



Τότε $\exists$ separating hyperplane $d^T x = e$:

$$d^T x_{LP}^* > e \quad \kappa'$$

$$d^T x < e \quad \forall x \in \omega(F_{IP}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^T x < e \quad \forall x \in F_{IP}$$

Επομένως το ζήτημα του F_{LP} στο ω
αποίσι $d^T x > e$ δεν υπάρχει ακέραιες
λύσεις

Ορίζουμε ένα νέο LP relaxation

$$\begin{aligned} z_{LP}^{(2)} &= \max C^T x \\ Ax &= b \\ d^T x &\leq e \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$z_{IP} \leq z_{LP}^{(2)} \leq z_{LP}$$

$d^T x = e$: cut ή cutting plane.

Gomory cutting planes

$$z_{LP} = \max c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0$$

Λύουμε με Simplex

Έστω x^* : ΒΕΛ βέλτου με βασικό πίνακα B :

δηλαδή $x_B^* = B^{-1}b$, $x_N^* = 0$ $x^* = \begin{pmatrix} x_B^* \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$

$$Ax = b$$

$$A = \begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

$$Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow \boxed{x_B + \underbrace{B^{-1}N} x_N = B^{-1}b} \quad (*) \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}N : m \times (n-m)$$

$$B = (A_1, \dots, A_m)$$

$$N = (A_{m+1} \dots A_n)$$

$$B^{-1}N = (B^{-1}A_{m+1} \dots B^{-1}A_j \dots B^{-1}A_n)$$

$$B^{-1}A_j = \begin{pmatrix} \bar{a}_{1j} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mj} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} \bar{a}_{10} \\ \vdots \\ \bar{a}_{m0} \end{pmatrix}$$

$$(*) : x_i + \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{a}_{i0} \quad i \in B \quad (\in Ax=b)$$

$$(\text{βέρβαια θέτωρα} \quad x_j \geq 0 \quad j \in N \Rightarrow x_B = B^{-1}b)$$

$$\left. \begin{array}{l} x_j \geq 0 \quad \forall j \\ \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor \leq \bar{a}_{ij} \end{array} \right\} \left[\bar{a}_{ij} \right] x_j \leq \bar{a}_{ij} x_j$$

$$x_i + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leq x_i + \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{a}_{i0}$$

Σω πρόβλημα $\mathbb{Z}_{IP}$ θέλω να είναι x_i, x_j ακέραιοι

$$\Rightarrow \forall x \in F_{IP} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_i + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \in \mathbb{Z} \\ \text{Επίσης} \quad x_i + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leq \bar{a}_{i0} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_i + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor \bar{a}_{i0} \rfloor} \quad (1)$$

$$\forall x \in F_{IP}$$

valid inequality

Αν $\bar{a}_{i0} \notin \mathbb{Z}$ τότε η x_{LP}^* δε ικανοποιεί
την (1) :

$$\text{Επειδή } \left. \begin{aligned} x_{i,LP}^* &= \bar{a}_{i0} \\ x_{j,LP}^* &= 0 \quad j \in N \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$x_i^* + \sum_j \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j^* = \bar{a}_{i0} > \lfloor \bar{a}_{i0} \rfloor$$

δηλ. παραβιάζει την (1)

(1) cutting plane

Προσθέτουμε την (1) στο $Ax=b$

νέο LP με διάσταση $(m+1) \times n$

Αν $x_{LP}^* \notin \mathbb{Z}^n$ επιλέγουμε $i : \bar{a}_{i0} \notin \mathbb{Z}$
ε' ορίζουμε την (1).

Παράδειγμα 2 Branch and Bound

$$z = \max \quad 26x_1 + 28x_2 - 2000x_3$$

$$Ax = b \begin{cases} 9x_1 + 13x_2 & -10x_4 \leq 6700 \\ 7x_1 + 6x_2 & \leq 6200 \\ 10x_1 + 4x_2 - 1540x_3 + x_4 & \leq 7200 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq 1680 \end{cases}$$
$$x_1, \dots, x_4 \geq 0$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, \quad x_3 \in \{0, 1\}$$
$$(0 \leq x_3 \leq 1)$$

Διαφορές κατά έσοδο πρώτα

$$z_{LP} = \max_{Ax=b} C^T x$$

① z_{LP}

x_{LP}	z_{LP}
$x_1 = 768.5$	20118.5
$x_2 = 37.7$	
$x_3 = 0.46$	
$x_4 = 70.6$	

lower bound : 7

$x_1 \leq 768$

$x_1 \geq 769$

②

768
38
0.46
70.6
20115.1

③

769
37.3
0.46
70.6
20117.2

$x_3 = 0$

$x_3 = 1$

④

710.6
23.4
0
0
1913.9

⑤

768
38
1
70.6
19032

ΕΞΙΣΤΑΝ

$x^0 = x_{LP}$

$z^0 = 19032$

X

$x_2 \leq 37$

$x_2 \geq 38$

⑥

769.5
37
0.46
70.6
20116.8

αδύνατο

X

$x_1 \leq 710$

$x_1 \geq 711$

⑧

710
23.8
0
0
1912

κλειστό

$z_{LP} < 19450$

⑨

711
22.5
0
0
1916

κλειστό

$z_{LP} < 19450$

$x_3 = 0$

αδύνατο

X

⑪

825
0
1
72.5
19450

ΕΞΙΣΤΑΝ

VEO LB

$x^0 = x_{LP}$

$z^0 = 19450$

ΒΕΛΤΙΣΤΗ
ΛΥΣΗ

Άσκηση μοιζοφοποίησης (vehicle routing) (VRP)

Εταιρεία έχει K φορτηγά, εξυπηρετεί N πελάτες

Σε μια μέρα έχει M πακέτα για μεταφορά

όπου $\forall m=1, \dots, M$: το πακέτο m πρέπει

να παραδοθεί στον πελάτη f_m

το πακέτο m έχει όγκο V_m

Το φορτηγό k έχει χωρητικότητα (σε όγκο) C_k , $k=1, \dots, K$

Αν το φορτηγό k κάνει παράδοση στον πελάτη n
υπάρχει κόστος h_{kn}

Πώς πρέπει να φορτωθούν τα πακέτα στα
φορτηγά

Μοιζοφοποίηση

$$x_{mk} = \begin{cases} 1, & \text{αν το πακέτο } m \text{ φορτώνεται} \\ & \text{στο φορτηγό } k \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Αν $x_{km} = 1 \Rightarrow$ το φορτηγό k θα πάει στον
πελάτη f_m

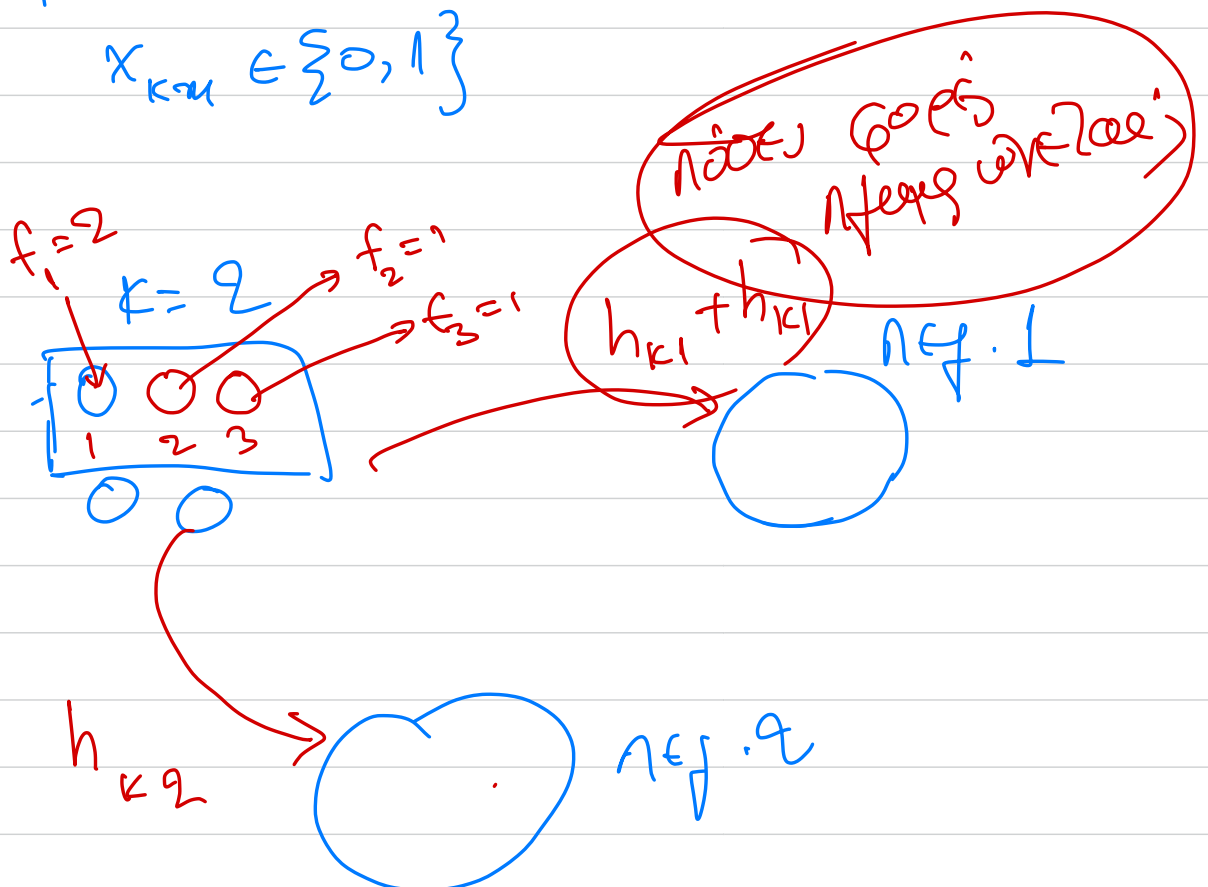
Da exei koros h_{kf_m}

$$\min \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M h_{kf_m} x_{km}$$

$$\sum_{k=1}^K x_{km} = 1 \quad \forall m = 1, \dots, M$$

$$\sum_{m=1}^M v_m x_{km} \leq C_k, \quad k = 1, \dots, K.$$

$$x_{km} \in \{0, 1\}$$



$$y_{km} \mid x_{km} \leq y_{kf}$$