

MIP

19-5-2026

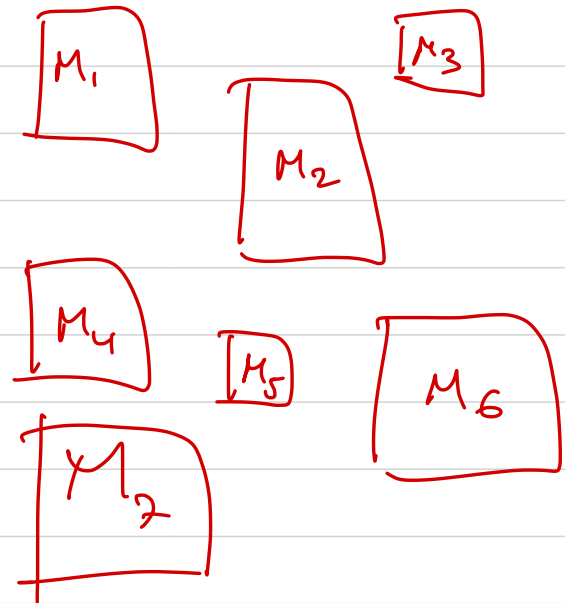
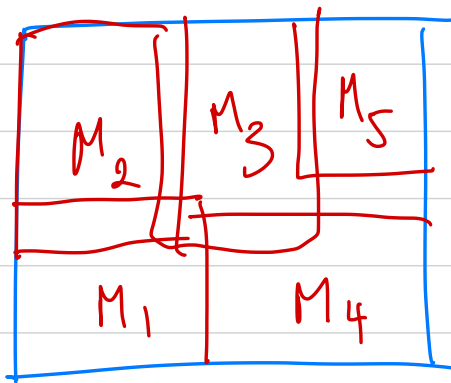
①

Set Covering, Set Packing, Partitioning

$$M = \{1, 2, \dots, m\}$$

$$\mathcal{F} = \{M_j, j=1, \dots, n\}, \quad M_j \subseteq M, j=1, \dots, n \quad \mathcal{F} \subseteq 2^M$$

ⓐ $F \subseteq \mathcal{F}$: covering of M or $\bigcup_{j \in F} M_j = M$



π_j : κόστος αν χρησιμοποιηθεί το σύνολο M_j

Θετούμε το covering ελάχιστων κόστους

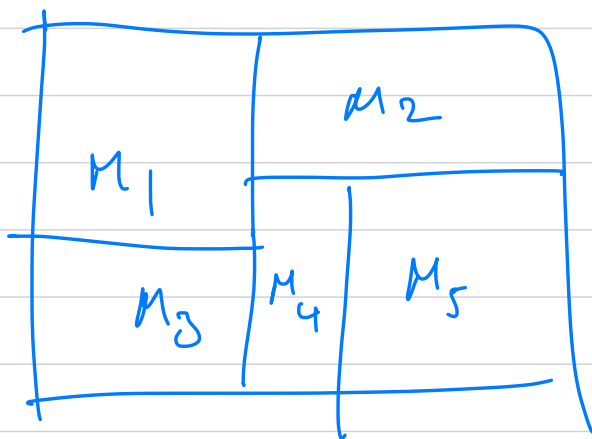
⑥ Packing

$$F \subseteq \mathcal{F} : M_i \cap M_j = \emptyset \quad \forall M_i, M_j \in F$$

π.χ. Θέτουμε το packing π.χ. το μεγαλύτερο
 δυνατό κόσμο

⑦ Διαμέριση (partition)

$$F \subseteq \mathcal{F} : \text{διαμέριση} \Rightarrow \boxed{\text{packing και covering}}$$



$$\text{Διμερεια} \quad \mathcal{F} = \{M_j, j=1, \dots, n\}, \quad c = (c_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$$

$$\text{Εστω} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i \in M_j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\text{π.χ.} \quad M = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$$

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \\ \{1\} & \{1, 5\} \\ M_3 & M_4 \\ \{2, 7\} & \{1, 2, 8\} \end{array} \right\}$$

$$1 \in M_1 \Rightarrow a_{11} = 1$$

$$1 \in M_2 \Rightarrow a_{12} = 1$$

$$1 \in M_4 \Rightarrow a_{14} = 1$$

$$a_{ij} = 0 \text{ otherwise}$$

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} M_1 & \dots & M_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

incidence matrix

Minimum cost covering (F)

$$\text{Eow } x_j = \begin{cases} 1 & \text{or } M_j \in F \\ 0 & \text{or } M_j \notin F \end{cases}$$

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

propertol : $F \text{ covering} \Rightarrow \bigcup_{j \in F} M_j = M \Rightarrow$

$$\forall i \in M \Rightarrow i \in \bigcup_{j \in F} M_j \Rightarrow i \in \text{union of } M_j \in F$$

$$\Rightarrow \text{op. } M_j : i \in M_j \geq 1 \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} a_{i1}, & a_{i2}, & \dots, & a_{in} \\ x_1 & x_2 & & x_n \end{matrix}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 1 \quad \forall i=1, \dots, m \quad \left(\begin{array}{l} i \in \sigma \\ \text{rows } \sigma \text{ of } A \\ 1 \text{ in } M_j \text{ of } F \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow Ax \geq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = e$$

$$\min C^T x$$

$$Ax \geq e$$

$$x \in \{0, 1\}^n$$

Max wt packing

$$\max C^T x$$

$$Ax \leq e$$

$$x \in \{0, 1\}^n$$

$$n = \{1, 2, \dots, 9, 10\}$$

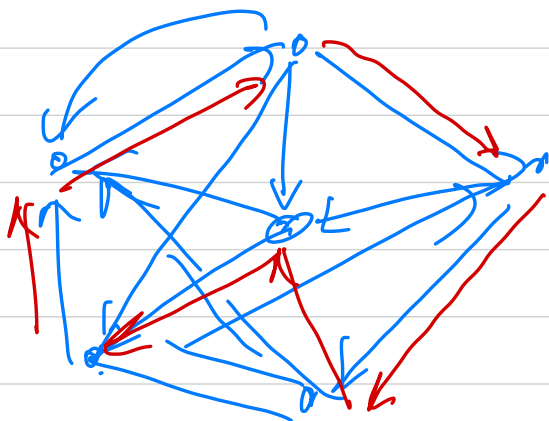
$$F = \left\{ \underbrace{\quad}_{M_1} \quad \underbrace{\quad}_{M_2} \right\}$$

Partitioning : $Ax = e \quad \left\{ \forall i \in M, i \in \sigma \right.$
 $\left. \text{exactly } 1 \text{ in } M_j \in F \right\}$

② TSP

$V = \{1, \dots, n\}$ κορυφές / κόμβοι

$E \subseteq V \times V$ ακμές (κατευθυνόμενες)



c_{ij} : κόστος ακμής (i, j)

Route ελαχ. κόστος

"
Μοιάζει τον ξεκινάει
ε' επιστρέφει στον ίδιο
κόμβο ε' αφαιρεί από
συνολ. ακριβώς 1 φορά

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } (i, j) \in \text{route} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_{ij} \end{pmatrix} \in \{0, 1\}^{|E|}$$

$$\min \sum_{(i, j) \in E} c_{ij} x_{ij}$$

1) Από κάθε κορυφή περνάει ακριβώς
μια ακμή

$$\forall i \in V$$

$$\sum_{j: (i, j) \in E} x_{ij} = 1$$

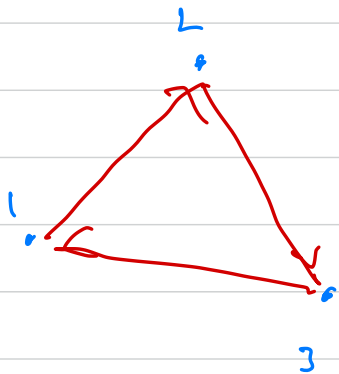
ακμή
που περνάει από i

n απιορ.

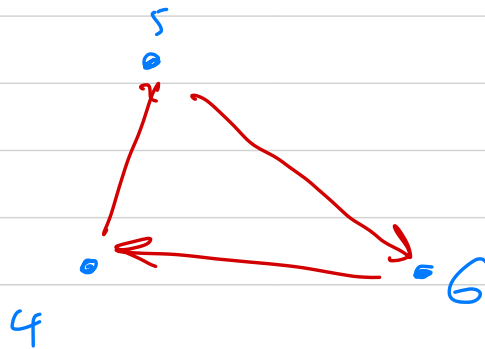
2) $\sum_{j: (j,i) \in E} x_{ji} = 1 \quad \forall i \in V$ means exactly one arrival

$$\forall i \quad \sum_{j: (j,i) \in E} x_{ji} = 1$$

n nodes



$$u = \{1, 2, 3\}$$



$$v \cup u = \{4, 5, 6\}$$

$$\exists (i,j) : i \in u, j \in v$$

$$|u| = 1$$

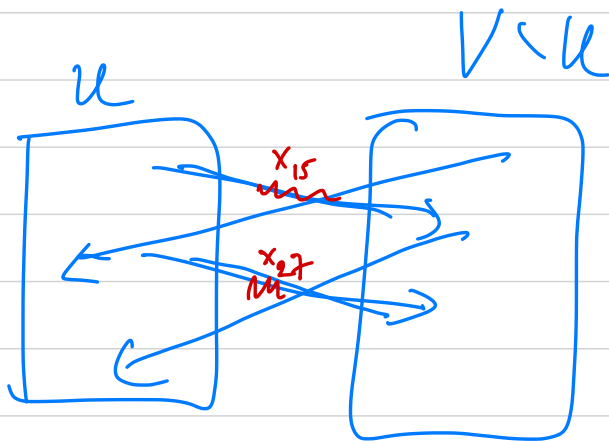


$$\forall u \subseteq V : |u| \geq 2, |V \setminus u| \geq 2$$

$$(2 \leq |u| \leq |V| - 2)$$

$$\sum_{\substack{i \in u, j \in V \\ (i,j) \in E}} x_{ij} \geq 1$$

$$\approx 2^{|V|}$$



$$x_{15} + x_{27} \geq 1$$

Μεθοδολογία για MILP

Χαλαρώνει LP

$$\begin{array}{l|l} z_{IP} = \max C^T x & z_{LP} = \max C^T x \\ F_{IP} \left\{ \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{array} \right. & \left. \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right\} F_{LP} \end{array}$$

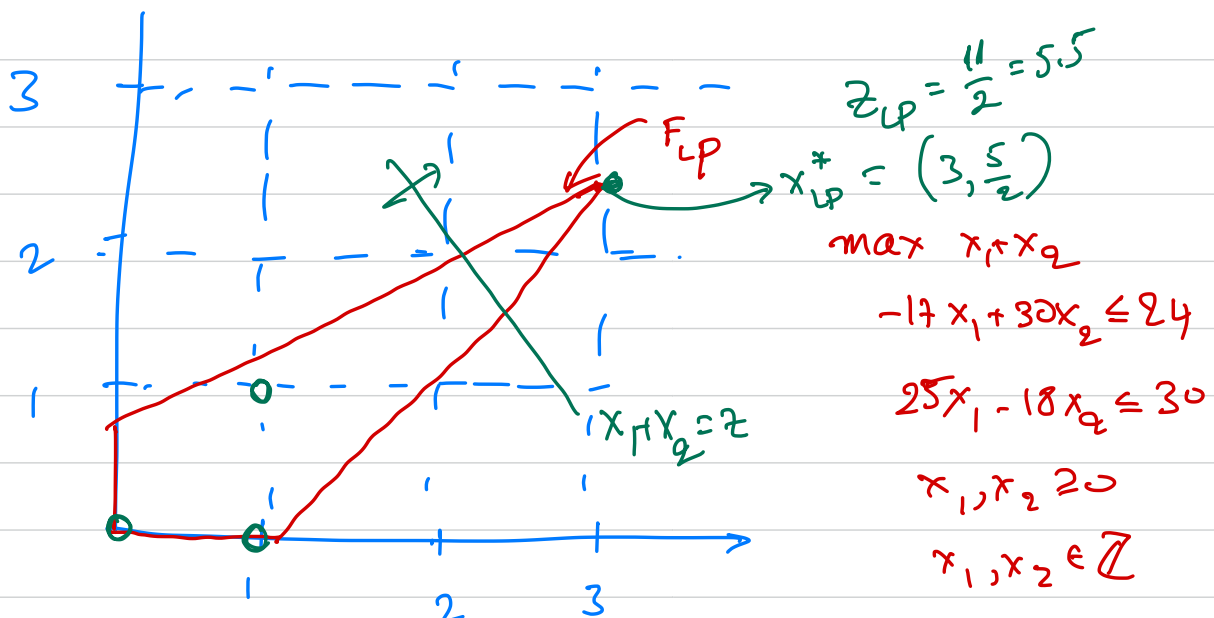
LP-relaxation
χαλαρώνει ΓΠ

Προφανώς $z_{IP} \leq z_{LP}$

Εστω $x_0 \in F_{IP} \subseteq \mathbb{Z}^n$ διακριτό σύνολο

αν F_{LP} φραγμένο $\Rightarrow |F_{IP}| < \infty$

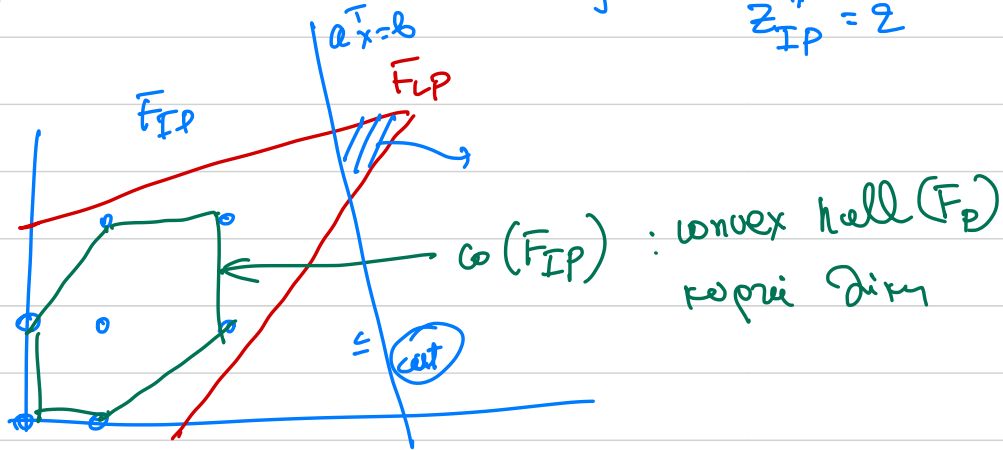
Εστω $x_0 \in F_{IP} \Rightarrow \boxed{z_0 = C^T x_0 \leq z_{IP} \leq z_{LP}}$



$$F_{IP} = \{ (0,0), (1,0), (1,1) \}$$

$$x_{IP}^* = (1,1)$$

$$z_{IP}^* = 2$$



$$\text{Τότε } z_{IP} = \max_{x \in \text{co}(F_{IP})} C^T x \quad \left. \vphantom{\max} \right\} \text{LP !!}$$

Η έκφραση του $\text{co}(F_{IP})$ ως $Ax = b$ είναι δύσκολη πρόβλημα

$$\text{co}(F_{IP}) \subseteq F_{LP}$$

Cutting Plane methods

Προσέχουν διαδοχικά ανισότητες στο F_{LP}
έτσι ώστε να προσεγγίσουν το $\text{co}(F_{IP})$

Valid inequality $a^T x \leq b$

$$\text{αν } a^T x \leq b \quad \forall x \in F_{IP}$$

Cut : $a^T x \leq b$ αν valid ing ϵ'

$$\exists x \in F_{LP} : a^T x > b$$

Μέθοδος ελάσσου-φράγματος (branch and bound)

$$z(F) = \max \{ C^T x : x \in F \}$$

$$F = F_{IP}$$

$$= \{ x : Ax = b, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^n \}$$

1) Έστω $F = F_1 \cup F_2$, : $F_1 \cap F_2 = \emptyset$

$$\text{και } z(F_1) = \max \{ C^T x : x \in F_1 \}$$

$$z(F_2) = \max \{ C^T x : x \in F_2 \}$$

$$\text{τότε } z(F) = \max \{ z(F_1), z(F_2) \} \quad \textcircled{1}$$

2) Έστω $z_{LP}(F_1)$, $z_{LP}(F_2)$ LP-relaxations

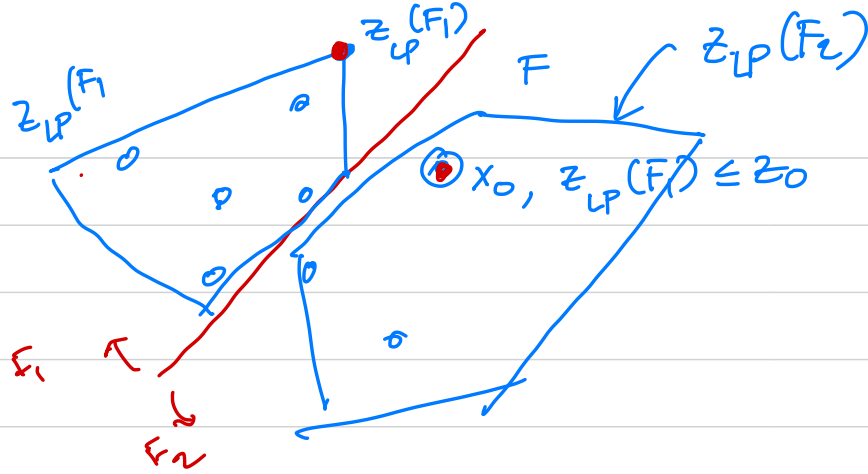
$$\text{Τότε } z(F_1) \leq z_{LP}(F_1) \quad \textcircled{2}$$

$$z(F_2) \leq z_{LP}(F_2)$$

3) Έστω $x_0 \in F$ μια εφικτή (ακέραια) λύση του $z(F)$

$$\text{κ' } z_0 = C^T x_0 \Rightarrow z_0 \leq z(F)$$

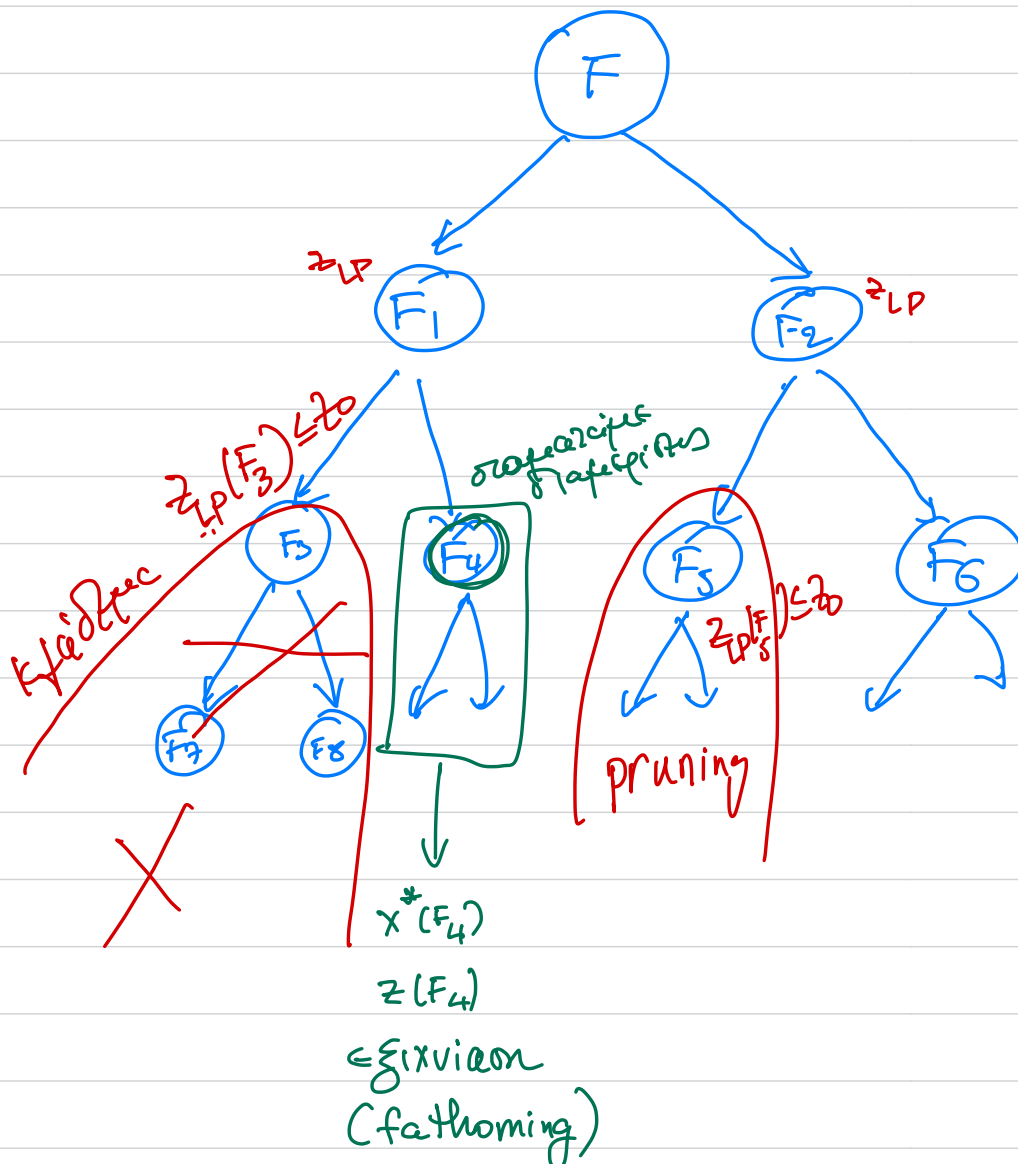
$$\text{Αν } z_{LP}(F_1) \leq z_0$$



Τότε $C^T x \leq C^T x_0 \quad \forall x \in F_1$, F_1 μπορεί να παραμεληθεί

Κλάδοι του F_2

Δέντρο διακρίσεων

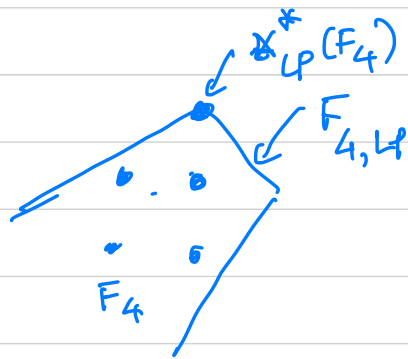


$$x_0 \in F$$

$$z_0 = C^T x_0$$

Εστω ότι σε ένα υποπρόβλημα $(P^*_{F_4})$

$$x_{LP}^*(F_4) \in \mathbb{Z}^n$$



F_4 : fathomed

$$\text{αν } z(F_4) = c^T x_{LP}^*(F_4) > c^T x_0 \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x^0 \leftarrow x^*(F_4) \\ z^0 \leftarrow z(F_4) \end{array} \right\} \text{ βεβαιώνεται καλύτερο}$$

$$\text{Πάρα } z_0 \leq z$$

Πώς γίνεται η διακρίση ενός F_j

Εστω $z_{LP}(F_j)$ LP-relaxation

$x_{LP}^*(F_j)$: βέλτιστη για LP-relaxation

Αν $x_{LP}^*(F_j) \in \mathbb{Z}^n \Rightarrow$ fathoming (stop)

Αν $x_{LP}^* \notin \mathbb{Z}^n$, $z_{LP}(F_j) \leq z^0 \Rightarrow$ pruning (stop)

Diag. perki

$$\exists x_j^* : x_j^* > 0 \text{ k' } x_j^* \notin \mathbb{Z}$$

$$\text{nx. } x_5 = 2.7$$

