

12-5-26

key biblio: Nemhauser and Wolsey
Integer & Combinatorial
Optimization

$$\max \quad c'x + h'y$$

$$Ax + Gy = \underline{b}$$

$$x \in \mathbb{Z}_+^n, y \in \mathbb{R}_+^p$$

MIP

mixed integer
programming

① $p=0 \Rightarrow$ IP Integer programming

$n=0 \Rightarrow$ LP

IP : μεταβλ. σε κανονική μορφή (IP)
δεν είναι πάντα εύκολος:

πχ. $\sqrt{2} x_1 + x_2 \leq 4$

? $x_1, x_2 \geq 0, x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}$

$\sqrt{2} x_1 + x_2 + x_3 = 4$

$x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 ?$

Είναι εφικτός όταν από, οι συντελεστές είναι ρητοί

$$\text{π.χ. } \frac{1}{2}x_1 \leq 3 \Leftrightarrow x_1 \leq 6 \Rightarrow x_1 + x_2 = 6 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \leq 7 \Leftrightarrow 3x_1 + 2x_2 \leq 42 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 42$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$$

3

$$\max c'x$$

$$Ax = b$$

$$x_j \in \{0, 1\}$$



0-1 προγραμματισμός

$$\max c'x$$

$$Ax = b$$

$$0 \leq x_j \leq 1 \quad \forall j$$

$$x_j \in \mathbb{Z}$$

Μοντέλα 0-1 προγραμματισμού

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{αν επιλέξουμε ανόργανο } j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$= 1 \text{ (ανόργανο } j)$$

$j = 1, \dots, n$: επιτοχές / ανόργανα...

Λογικές σχέσεις / ηαριορροφωί

1) Ανί ας η μεροαί να ενεργηνομη-ών
ωί νοφί κ (κ ≤ η)

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq K$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = |\{j : x_j = 1\}| = \text{αρ. των αηοβά-
σεων ηη
ενεργηνοιοιούηαι}$$

$$2) \quad x_i \leq x_j \quad : \quad \alpha \omega \quad x_j = 0 \Rightarrow x_i = 0 \\ \alpha \omega \quad x_i = 1 \Rightarrow x_j = 1$$

$$\alpha \alpha \delta \alpha \mu \quad i \Rightarrow \alpha \alpha \delta \alpha \mu \quad j$$

3) Αηόφαη : εηιφίξω i και j μεφί :

$$x_i, x_j, x_{ij} = 1 (\text{i και j})$$

x_i	x_j	x_{ij}
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

"Προγραμμίς"

$$x_{ij} = x_i \cdot x_j$$

οχι γραμμική
σχέση

$$x_{ij} \leq x_i$$

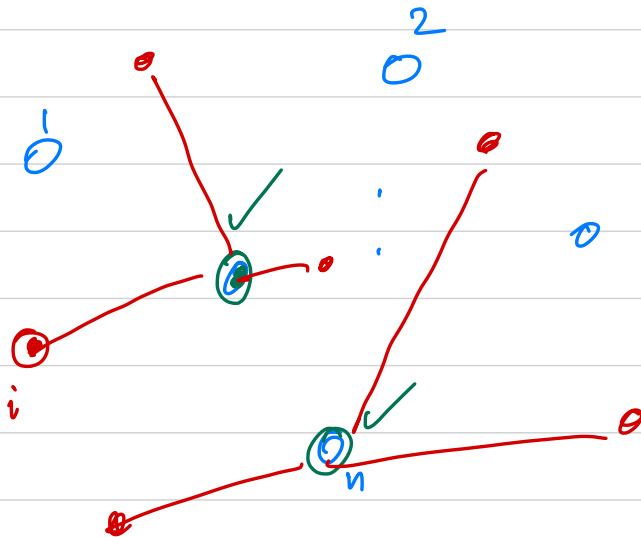
$$x_{ij} \leq x_j$$

$$x_{ij} \geq x_i + x_j - 1$$

$$x_i, x_j, x_{ij} \in \{0, 1\}$$

Facility location problem (Τοποθέτηση
σταθμών παραγωγής)

n TO NODES



Σε κάθε δέσμη
μπορεί να
τοποθετηθεί
ένος σταθμός

m ΠΕΦΑΓΕΣ $i = 1, \dots, m$

c_j = κόστος εγκαθ. σταθμού στη δέσμη j

h_{ij} = " ανάδραση πελάτη i στο σταθμό
στη δέσμη j

Να βρεθεί το σχεδίο τοποθέτησης σταθμών } μίν
 + ανάδοχης } κόστος

Μεταβλητές

$$x_j = 1 \{ \text{σταθμός στη θέση } j \}$$

$$j = 1, \dots, n$$

$$y_{ij} = 1 \{ \text{αφαιρέσει } i \text{ εξου. από σταθμό} \\ \text{στη θέση } j \}$$

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n h_{ij} y_{ij}$$

ν.π.

$$y_{ij} \leq x_j \quad \forall i, \forall j$$

($i \rightarrow j$ μόνο
 αν υπάρχει
 σταθμός στη j)

$$\sum_{j=1}^n y_{ij} = 1 \quad \forall i$$

$$x_j, y_{ij} \in \mathcal{B} = \{0, 1\}$$

Σ

Τοποθέτηση σταθμών - παραγωγή

η δέσμη για σταθμό

σε κάθε σταθμό μπορεί να γίνει
παραγωγή (των ίδιων) προϊόντος

K_j = κόστος ανοίγματος σταθμού j

h_j = μοναδιαίο κόστος παραγωγής
στη δέση j (αν υπάρχει σταθμός)

D = συνολική ζήτηση προϊόντος
(πρέπει να ικανοποιηθεί)

u_j = δυνατότητα σταθμού j (μέγιστη
παραγωγή $x_j \in \mathbb{B}$)

$x_j = 1$ (σταθμός στη δέση j) $j = 1, \dots, n$

y_j = ποσότητα παραγωγής στη δέση j , $y_j \geq 0$

$$\min \sum_{j=1}^n K_j x_j + \sum_{j=1}^n h_j y_j$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \geq D \quad (= D \times b_x)$$

$$y_j \leq u_j x_j$$

παραγωγή
μόνο σε
δέσμη που
υπάρχει
σταθμός

Αν $u_j = \infty$ για κάποια j

$$y_j \leq M x_j$$

$$M \gg$$

(εδώ μπορεί $M=D$ $y_j \leq D x_j$)

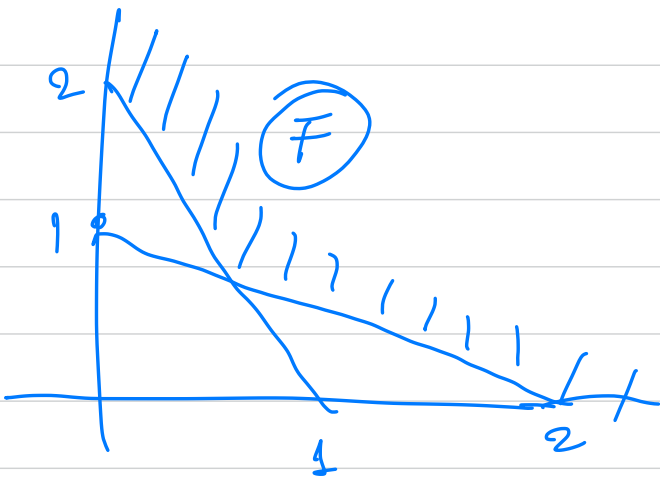
③ Διαφευκτικοί Περιορισμοί

π.χ. $x_1 + 2x_2 \geq 2$

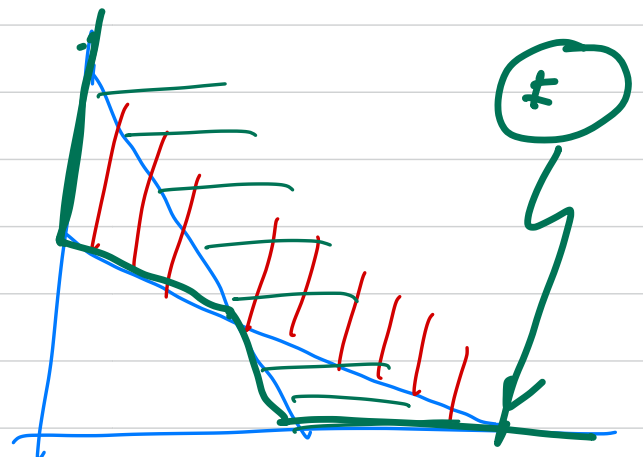
$$2x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Σύγκριση



Διαφύση



F: μη κενό σύνολο !!

$$\begin{array}{l|l} \text{σύνθεση} & \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \geq 2y \\ x_1 + 2x_2 \geq 2(1-y) \\ x_1, x_2 \geq 0, \quad y \in \mathcal{B} \end{array} \\ \hline & \begin{array}{l} y=0 \quad \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \geq 0 \quad \checkmark \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \quad \leftarrow \end{array} \\ y=1 \quad \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \geq 2 \quad \leftarrow \\ x_1 + 2x_2 \geq 0 \quad \checkmark \end{array} \end{array} \end{array}$$

MILP

Γενική Περίπτωση

$$a_i'x \leq b_i \quad i=1, \dots, m \quad \leftarrow y_i = 1 \text{ (ικανοποιείται)}$$

$\rightarrow$ Πρέπει να ικανοποιούνται τουλάχιστον k από τους m $\leftarrow !!$

$$(k=n \Rightarrow LP)$$

$k < n$: διαφευκτικοί απροσδιοστοί

$$\sum_{i=1}^n y_i \geq k$$

0. απ. $a_i'x \leq b_i$ ισχύει μόνο όταν $y_i = 1$

όταν $y_i = 0 \Rightarrow$ ο i γίνεται
 ηθεορασκός
 (ισχύει πάντα)

$$a_i'x \leq b_i + M(1-y_i) \quad i=1, \dots, m \quad M \gg$$

$$y_i = 1 \Rightarrow a_i'x \leq b_i \quad \checkmark \quad (\text{Ενεργοποίηση } a_i)$$

$$y_i = 0 \Rightarrow a_i'x \leq +\infty \quad (\text{το } x \text{ ειναι παντα})$$

$$x_j \geq 0, \quad y_i \in \mathbb{B} \quad i=1, \dots, m$$

④ Πενεραστικό σύνολο τεριών μιας μεταβριτής

$$\text{π.χ.} \quad x_j \in \{1, 5, -7, 13\}$$

$$\text{αν ειχαμε} \quad x_j \in \{2, 3, 4, 5\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_j \geq 2 \\ x_j \leq 5 \\ x_j \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x_j \in \{1, 5, -7, 13\}$$

$$y_1 = 1 (x_j = 1)$$

$$y_5 = 1 (x_j = 5)$$

$$y_{-7} = 1 (x_j = -7)$$

$$y_{13} = 1 (x_j = 13)$$

$$x_j = 1 \cdot y_1 + 5 \cdot y_5 - 7 \cdot y_{-7} + 13 y_{13}$$

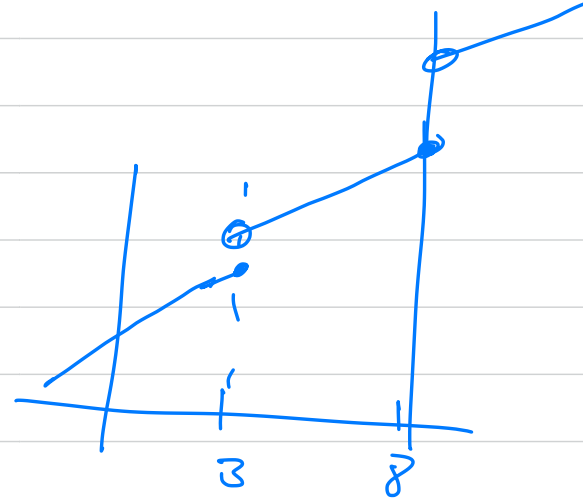
$$y_1 + y_5 + y_{-7} + y_{13} = 1$$

$$y_j \in \{0, 1\}$$

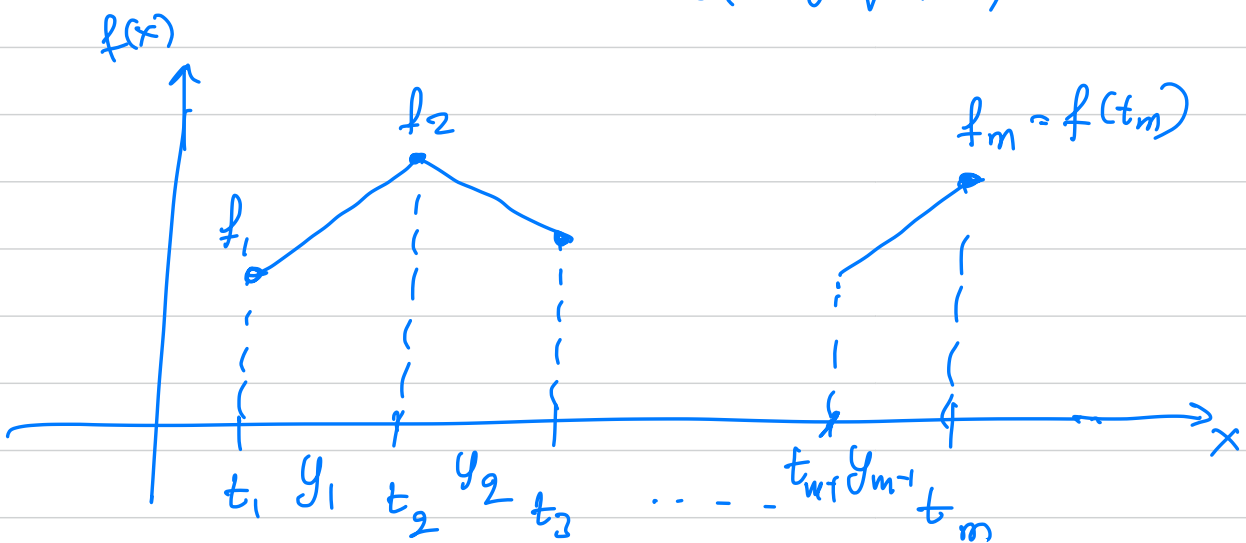
⑤ Τμηματικά γραμμικά απεικ. συναρτήσεις

$LP \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Έχουμε δει } f(x) = \min \{d_i x + e_i, i=1, \dots, k\} \text{ κοίτη} \\ \max f(x) \\ \text{και } f(x) = \max \{d_i x + e_i, i=1, \dots, k\} \text{ κυρτή} \\ \min f(x) \end{cases}$

π.χ. $f(x) = \begin{cases} 2x+5, & x \leq 3 \\ 3x+7, & 3 < x \leq 8 \\ 10x+1, & x > 8 \end{cases}$



Υποθέτουμε $f(x)$ τμηματικά γραμμική
και συνεχής

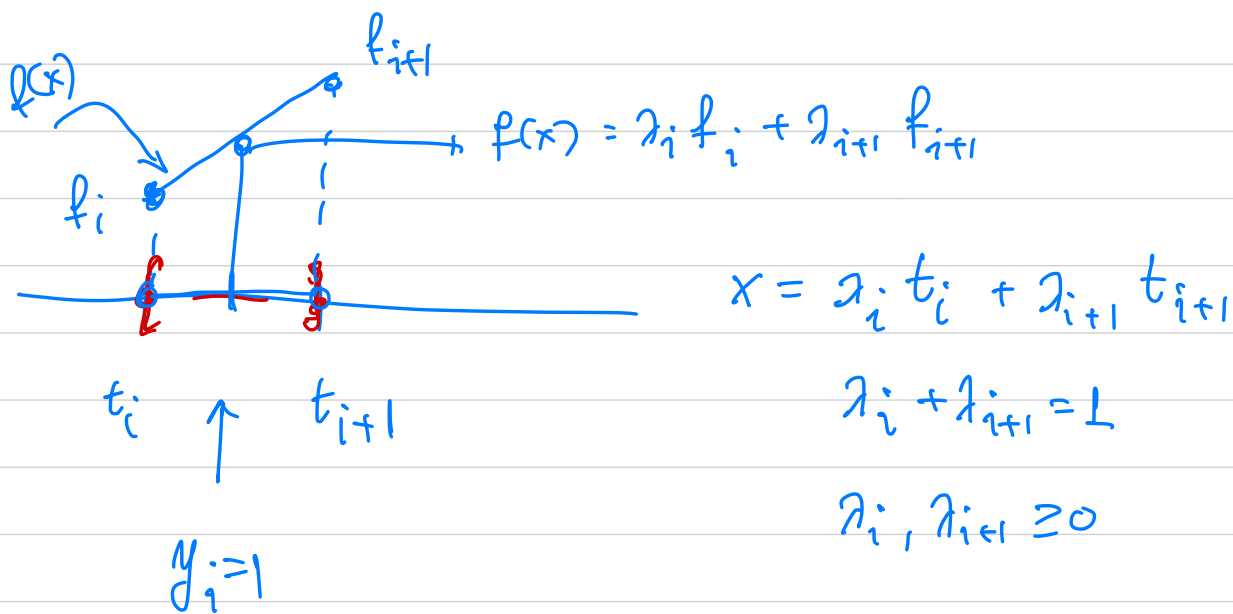


$$x \in [t_1, t_m]$$

$$f(x) = \begin{cases} f_1 + \frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1} (x - t_1) & x \in [t_1, t_2] \\ \vdots & x \in [t_2, t_3] \\ \text{όμοια} & \vdots \end{cases}$$

$$\text{Ερω} \quad z = \min \{ f(x), t_1 \leq x \leq t_m \}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & (t_i \leq x_i < t_{i+1}) & i=1, \dots, m-2 \\ 1 & (t_{m-1} \leq x_i \leq t_m) & i=m-1 \end{cases}$$



Τεχνικά $x = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \dots + \lambda_m t_m$
 $f(x) = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m$
 $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$
 $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$

$\left. \begin{array}{l} \text{δcr} \\ \text{αρκετ} \end{array} \right\}$

$$\text{Αν } y_i = 1 \Rightarrow x \in [t_i, t_{i+1}) \Rightarrow$$

$$\lambda_1 \leq y_1$$

$$\lambda_i \leq y_{i-1} + y_i$$

$$\lambda_m \leq y_{m-1}$$

$$\sum_i y_i = 1$$