

15-5-2026

Άσκηση 1

$$z(c) = \max_{\substack{Ax \leq b \\ x \geq 0}} c^T x$$

F : φραγμένη ($F \neq \emptyset$)

Δείξτε ότι $z(c)$ <sup>τυμμεσικά
φραγμένη</sup> κυρί ορίζεται $c \in \mathbb{R}^n$

$f(x), x \in \mathbb{R}^n$

$$\nabla_f(x) = \text{βαθμίδα/gradient} \\ = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \vdots \\ \partial f / \partial x_n \end{pmatrix}$$

Hessian matrix

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

$f(x)$ κυρί $\Leftrightarrow H_f$ θετικά
ημωρισμένο

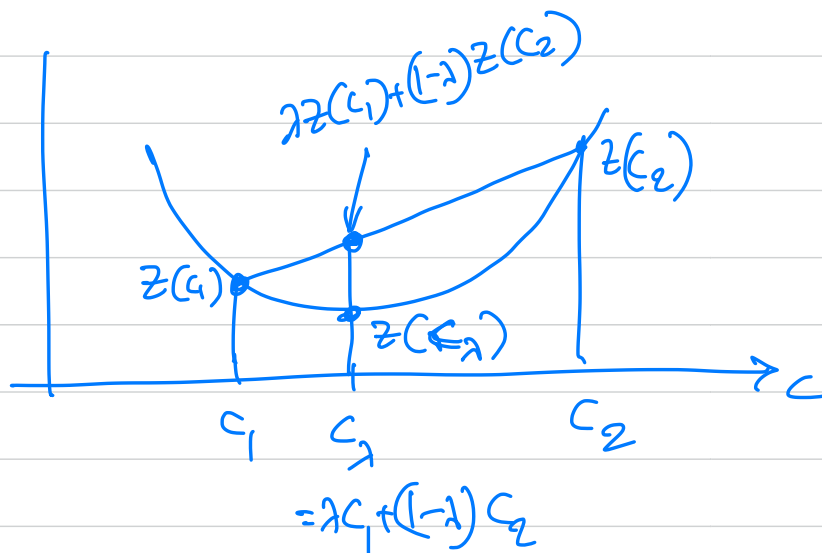
$$\forall y \in \mathbb{R}^n : y^T H_f y \geq 0$$

Εδώ n $z(c)$ δε είναι ναυον
ναρμωρισμένο

$z(c)$ konvex (optimal) $\Leftrightarrow$

$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$$

$$z(\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2) \leq \lambda z(c_1) + (1-\lambda)z(c_2)$$



Zum Beweis

$$z(c_1) = \max_{x \in F} c_1^T x$$

x_1^* best. Lösung

$$z(c_1) = c_1^T x_1^*$$
$$Ax_1^* \leq b$$
$$x_1^* \geq 0$$

$$z(c_2); x_2^* \text{ best. Lösung}$$

$$z(c_2) = c_2^T x_2^*$$
$$Ax_2^* \leq b$$
$$x_2^* \geq 0.$$

$$C_\lambda = \lambda C_1 + (1-\lambda) C_2$$

x_λ^* βέλτιστη

$$Z(C_\lambda) = C_\lambda^T x_\lambda^*$$

$$\left(\begin{array}{l} Ax_\lambda^* \leq b \\ x_\lambda^* \geq 0 \end{array} \right)$$

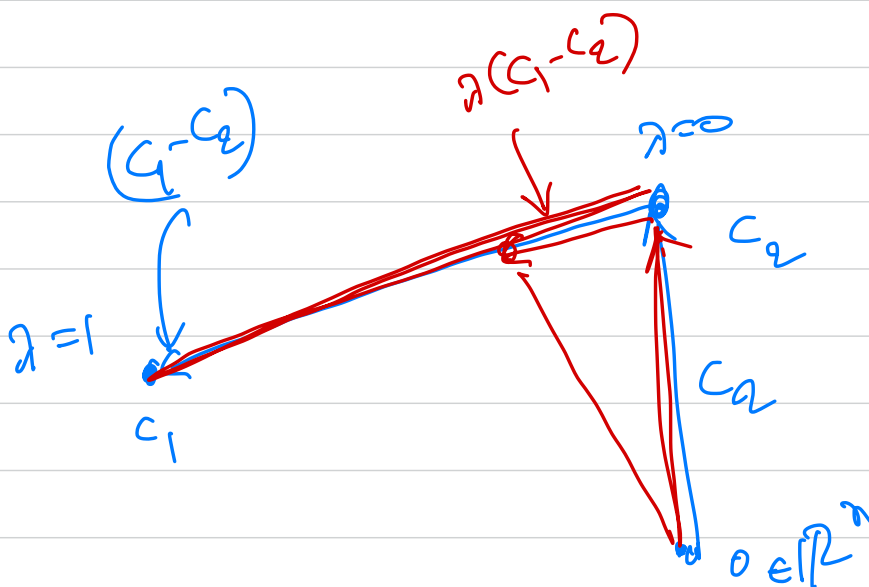
$$Z(C_\lambda) = (\lambda C_1^T + (1-\lambda) C_2^T) x_\lambda^* =$$

$$= \lambda \underbrace{C_1^T x_\lambda^*}_{\leq Z(C_1)} + (1-\lambda) C_2^T x_\lambda^* \quad \left(\leq \lambda Z(C_1) + (1-\lambda) Z(C_2) \right)$$

$$x_\lambda^* \in F$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{οχι γιὰ } \lambda=0 \text{ βέλτιστο στο } Z(C_1) \\ \text{" " " " " " } Z(C_2) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} C_1^T x_\lambda^* \leq Z(C_1) \\ C_2^T x_\lambda^* \leq Z(C_2) \\ \lambda \geq 0 \\ (1-\lambda) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\lambda C_1^T x_\lambda^* + (1-\lambda) C_2^T x_\lambda^* \leq \lambda Z(C_1) + (1-\lambda) Z(C_2) \quad \checkmark$$



πρώτος συνδυασμός

$$C_\lambda = \lambda C_1 + (1-\lambda) C_2$$

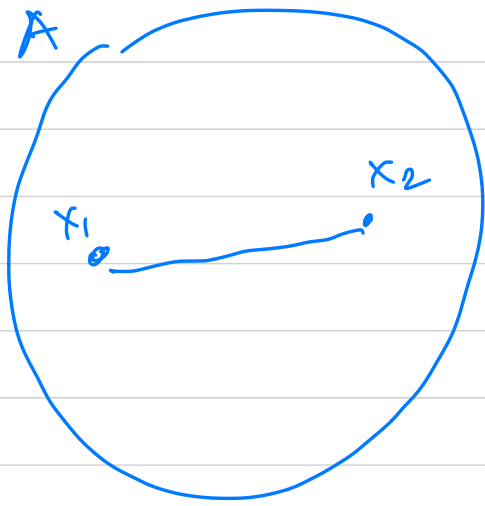
$$\lambda \in [0, 1]$$

$$= C_2 + \lambda (C_1 - C_2)$$

$$\lambda \in [0, 1]$$

$$\lambda = 0 : C_\lambda = C_2$$

$$\lambda = 1 : C_\lambda = C_1$$

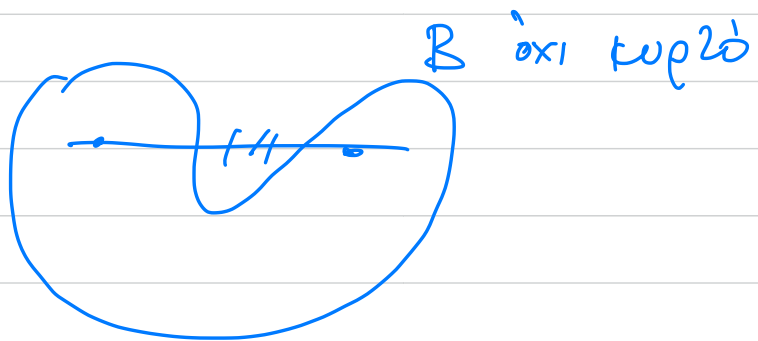


A κυρτός σύνολο

αν $\forall x_1, x_2 \in A$

$\forall \lambda \in [0, 1]$

$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A$



B όχι κυρτό

Ανάλυση με ΓΠ

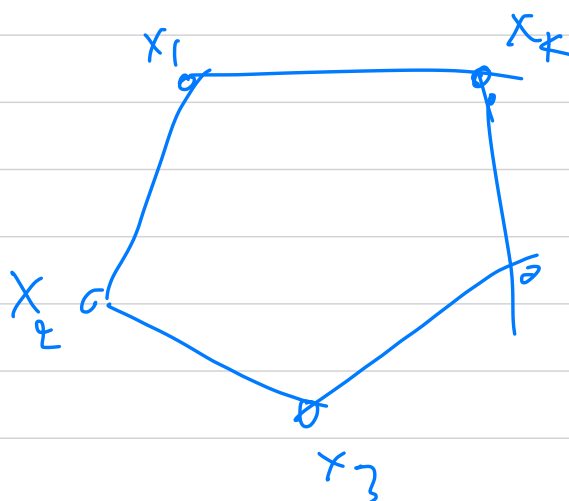
$$z_p(c) = \max C^T x$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

F είναι λογαριθμική φραγμένη

Εστω $x_1, \dots, x_k$ οι κορυφές της F



Η βέλτιστη
λύση επιτυγχάνεται σε
τουλάχιστον
μία κορυφή

Ειδικώς
$$z(C) = \max \{ c^T x_1, \bar{c}^T x_2, \dots, C^T x_k \}$$

$$= \max \{ x_1^T \cdot c, x_2^T c, \dots, x_k^T c \}$$

$\max$ k γραμμικών συναρτήσεων ως προς C

$\Rightarrow z(C) : \text{τη γραμμική} \}$ ως προς C .
 φορτί

Άσκηση 2

$$z(b) = \max_{\substack{Ax \leq b \\ x \geq 0}} c^T x \quad = \max \{c^T x : x \in F(b)\}$$

δ.ο. $z(b)$ τῆς γραμμικῆς καὶ κοίτης!

$$z_p(b) = z_D(b) = \min_w w'b \quad = \min_{\substack{w'A \geq c \\ w' \geq 0}} b'w \quad w \in F_D$$

$w_1, \dots, w_n$: κορυφαῖς τῆς F_D

$$z_D(b) = \min \{w_1'b, \dots, w_n'b\} \quad \text{τῆς γραμμ. κοίτης}$$

Παράδειγμα knapsack

$$z(b) = \max_{\substack{a_1x_1 + \dots + a_nx_n \leq b \\ x_j \geq 0}} c_1x_1 + \dots + c_nx_n \quad (a_j > 0) \\ b \in \mathbb{R}$$

$$z(0) = 0 \quad (F = \{0\})$$

$b \geq 0$: $z(b)$ αίσουσα a

$$b_1 < b_2$$

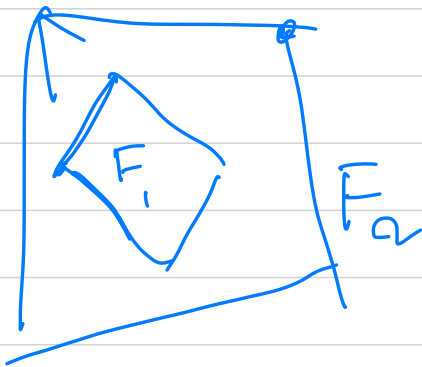
$$F(b_1) = \{x : a^T x \leq b_1\}$$

$$F(b_2) = \{x : a^T x \leq b_2\}$$

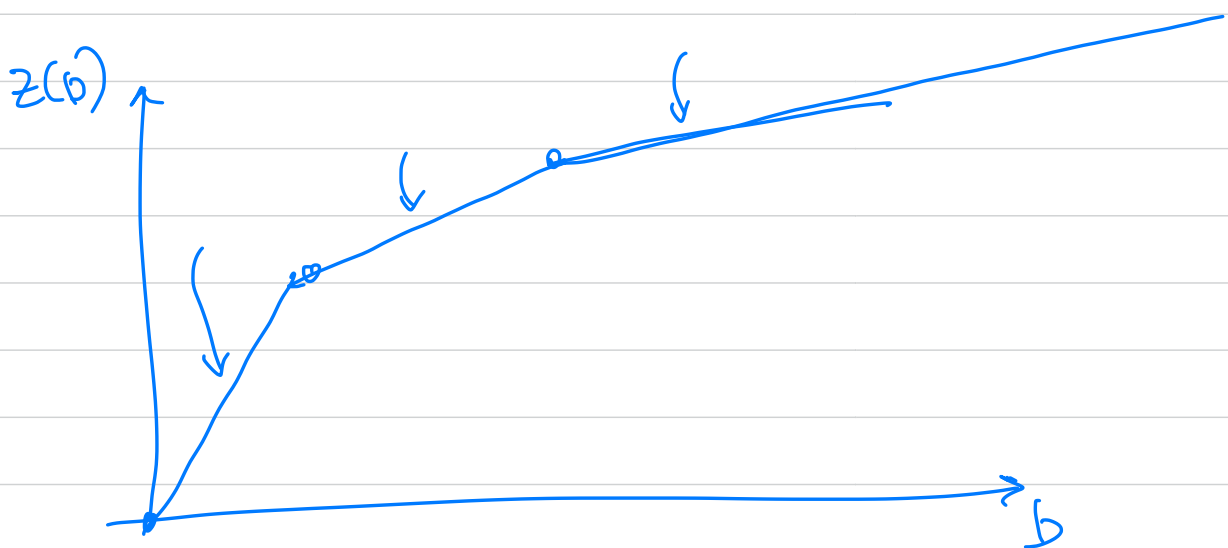
$$F(b_1) \subseteq F(b_2)$$

$$\forall x \in F(b_1) \Rightarrow a^T x \leq b_1 \Rightarrow a^T x \leq b_2 \Rightarrow x \in F(b_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{z(b_1) \leq z(b_2)}$$



$z(b)$: αίσουσα, τμ. γραμμική, κοίτη.



$\frac{dz(b)}{db}$ φθίνουσα (όταν υπάρχει)

$$z_b = \min \{ w_1^T b, \dots, w_k^T b \}$$

$$\max C^T x$$

$$a_1^T x \leq b_1$$

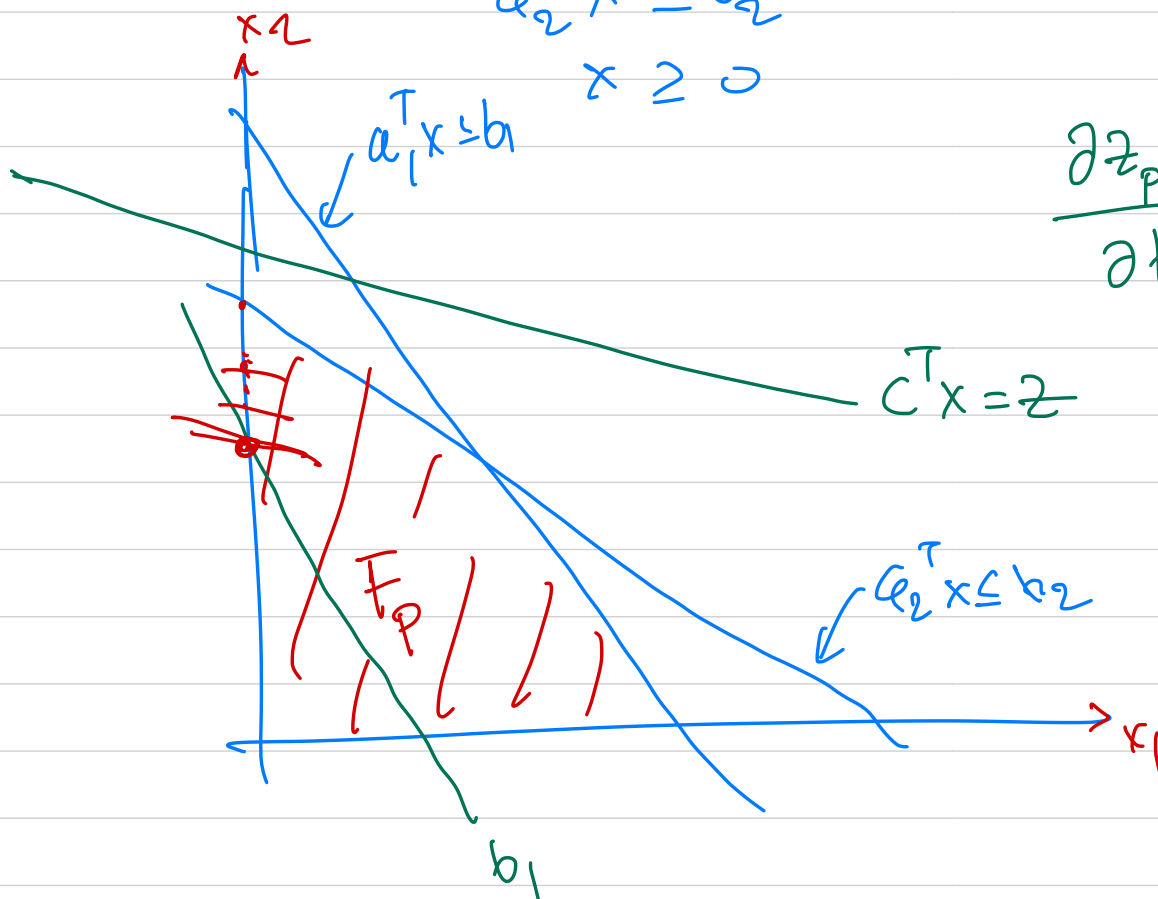
$$a_1 > 0$$

$$a_2^T x \leq b_2$$

$$a_2 > 0$$

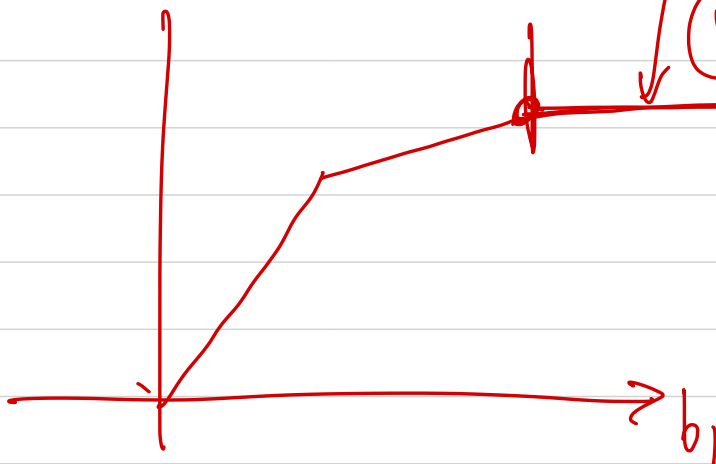
$$x \geq 0$$

$$\frac{\partial z_p(b)}{\partial b_1}$$



$$a_1^T x^* < b_1$$

$$(w_1 = 0)$$



Qot. 3.10

$$\text{Exer } z_p(x) = \max \min \{d_1^T x, \dots, d_k^T x\}$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

$$\begin{array}{l} \max z \\ z \leq d_1^T x \\ \vdots \\ z \leq d_k^T x \end{array}$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

$$\begin{array}{l} \max z \\ z - d_1^T x \leq 0 \\ \vdots \\ z - d_k^T x \leq 0 \end{array}$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

$$z_p = \max z$$

$$z - d_{11}x_1 - \dots - d_{1n}x_n \leq 0$$

$$z - d_{21}x_1 - \dots - d_{2n}x_n \leq 0$$

$$\vdots$$
$$z - d_{k1}x_1 - \dots - d_{kn}x_n \leq 0$$

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$\vdots$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0$$

Μια οικονομική ερμηνεία :

$x_1, \dots, x_n$: ποσότητες παραγωγής
προϊόντων $1, \dots, n$

a_{ij} : ποσότητα πόρων i / μον. παραγ. πρ. j

b_i : διαθέτ. ποσότητα πόρων i

$k = 1, \dots, K$ δυνατές λειτουργίες
επ' εδικομίων που
επηρεάζει το κέρδος
(π.χ. κόστος,
παραγωγικότητα, ...)

z = επιθυμ. ασφάλεια παραγωγών

= μέγιστο δυνατό κέρδος που
(μπορεί σίγουρα να εξασφαλιστεί
κάτω από οποιαδήποτε λειτουργία
 $k = 1, \dots, K$)

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Qu } k=1 & z_p \max & c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \\
 & & a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
 & & \vdots \\
 & & a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
 & & x_j \geq 0
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l} D \\ w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{array} \right.$$

$$z_D = \min w_1 b_1 + \dots + w_m b_m$$

$$a_{1j} w_1 + \dots + a_{mj} w_m \geq c_j, \quad j=1, \dots, n$$

$w_1, \dots, w_m$: τιμές ανά μονάδα πόρων i που προσφέρει ο ελεγχόμενος στον παραγωγό

$a_{1j} w_1 + \dots + a_{mj} w_m$ = ποσό πόρων εισπράζει ο παραγωγός αν "δυστιάσει" μια μονάδα παραγ. προϊόντος

Επιπρόσθετο στο (z_p)

$$z_p = \max z$$

$$z - d_{11}x_1 - \dots - d_{1n}x_n \leq 0 \quad q_1$$

$$z - d_{21}x_1 - \dots - d_{2n}x_n \leq 0 \quad \vdots$$

$$\vdots$$

$$z - d_{k1}x_1 - \dots - d_{kn}x_n \leq 0 \quad q_k$$

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \quad w_1$$

$\vdots$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \quad w_m$$

$$z \in \mathbb{R} \quad x_1, \dots, x_n \geq 0$$

dual

$$z_D = \min w_1 b_1 + \dots + w_m b_m$$

$$q_1 + \dots + q_k = 1$$

$$-d_{11}q_1 - \dots - d_{k1}q_k + a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m \geq 0$$

$\vdots$

$$-d_{1n}q_1 - \dots - d_{kn}q_k + a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m \geq 0$$

$$q_1, \dots, q_k, w_1, \dots, w_m \geq 0$$

Η επένδυση αποδίδει

$w_1, \dots, w_m$

τιμή που
προσφέρει ανά
μονάδα πόρου i

και

$q_1, \dots, q_K \rightarrow ?$

Αν το $(q_1, \dots, q_K)$ θεωρηθεί
ως δίαση πιθανοτήτων

$q_{\cdot k} = P(\text{αξιοποίηση } k), k=1, \dots, K$

$k=1, \dots, K$: σπρατική των επενδύσεων

q : μέγιστη σπρατική επένδυση

$$\underbrace{q_1 d_{1j} + \dots + q_K d_{Kj}}_{E(\text{κέρδος})} = \underbrace{w_1 a_{1j} + \dots + w_m a_{mj}}_{\text{ποσό που εισπράττει}}$$

ο παρατηρητής αν

συντάξει μια μισία

παραγ. πρ. j

παραγ. πρ. j