

| 11-5-2026 |

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΠΕΡΑΒΟΛΩΝΕΣ -WS

ΣΥΝΟΔΕΣ ΤΥΠΕΣ
ΓΩΡ ΝΕΠΙΟΛΕΥΩΝ

$$z_p(b) = \max c^T x$$

$$a_i^T x \leq b_i$$

$$a_m^T x \leq b_m$$

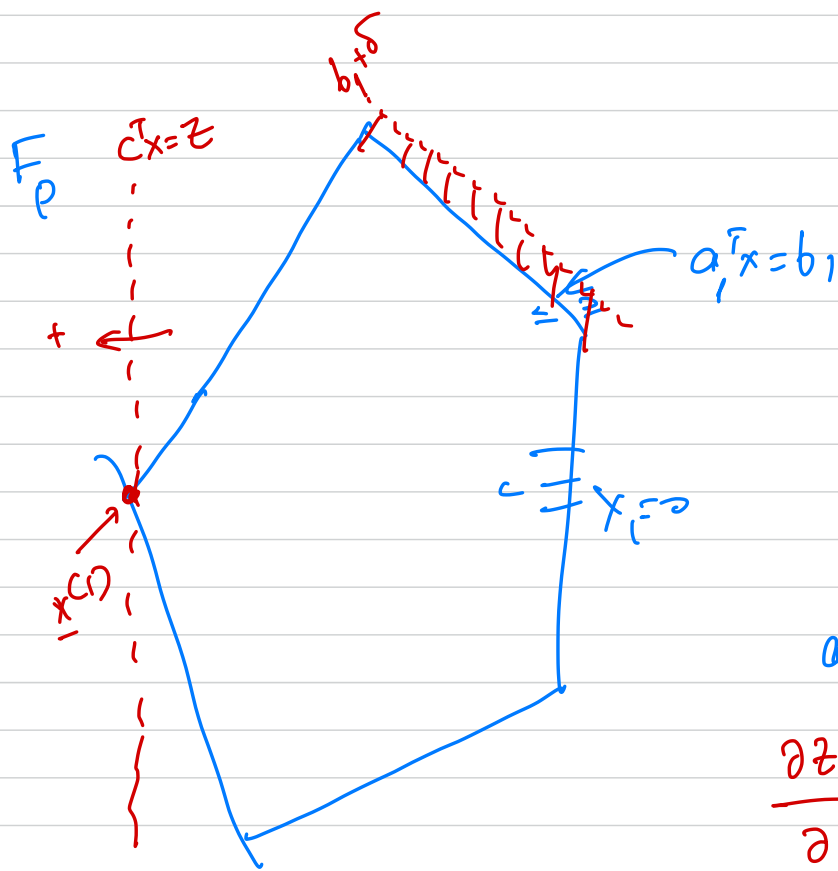
$$x \geq 0$$

$$z_D = \min w^T b$$

$$w^T A \geq c$$

$$w \geq 0$$

Ερωτήματα: $\frac{\partial z_p(b)}{\partial b_1}$



$$a_i^T x \leq b_i \Leftrightarrow a_i^T x + y_i = b_i$$

Case 1 : Βέλτιστη λύση
= $\underline{x^{(1)}}$

$$b'_1 = b_1 + \delta, \delta > 0$$

$$a_1^T x \leq b_1 + \delta$$

$$\frac{\partial z_p(b)}{\partial b_1} = 0 \quad \left(\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{z(b+\delta) - z_p(b)}{\delta} \right)$$

$$a_1^T x^{(1)} < b_1$$

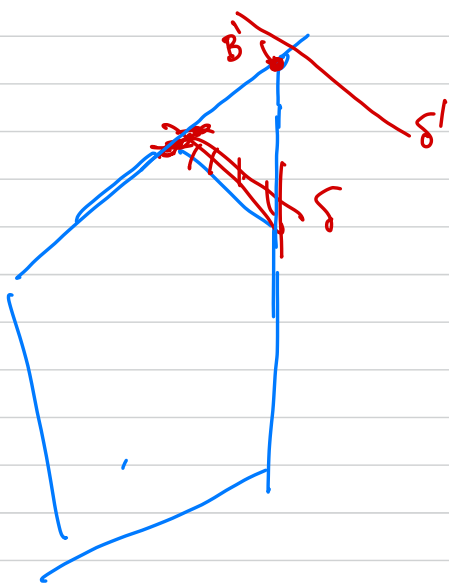
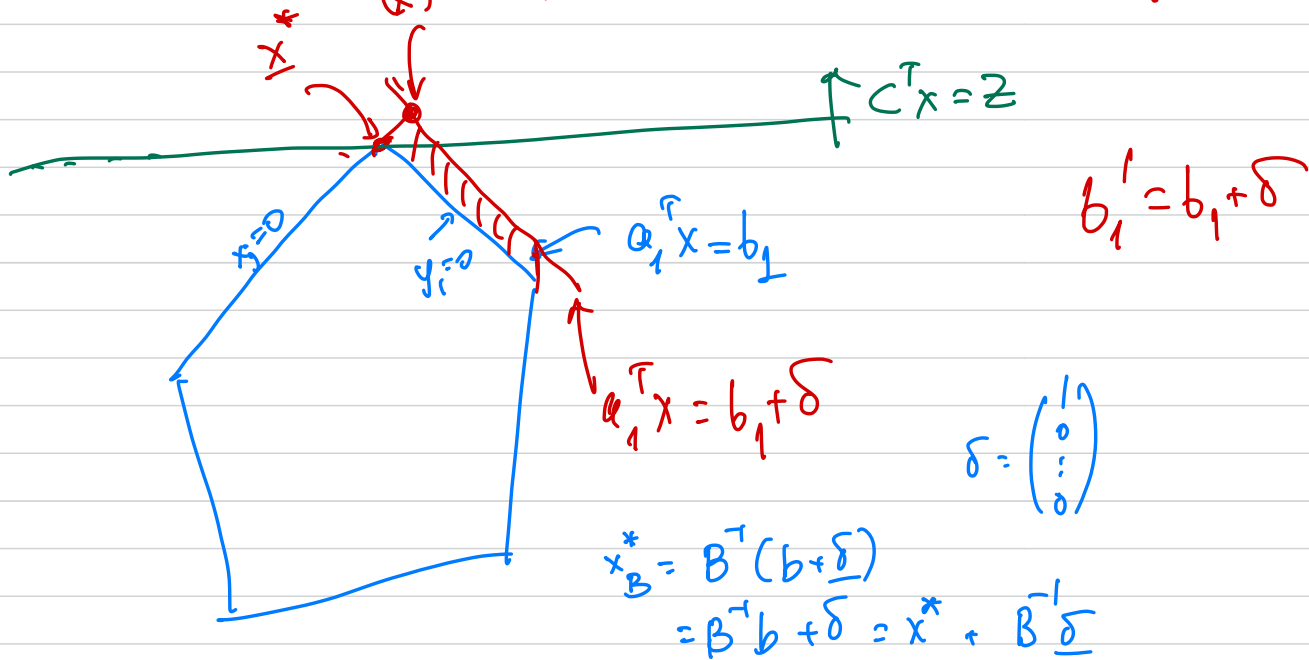
Αν $a_1^T x^{(1)} < b_1$

ο υπ. (1) που εφάρμοζε
μει δυνάμεις
σημ βέλτιστη για

$$\text{το } z \in \frac{\partial z(b)}{\partial b_1} = 0.$$

Τόξε : $w_1^* (b_1 - a_1^T x) = 0 \Rightarrow w_1^* = 0$

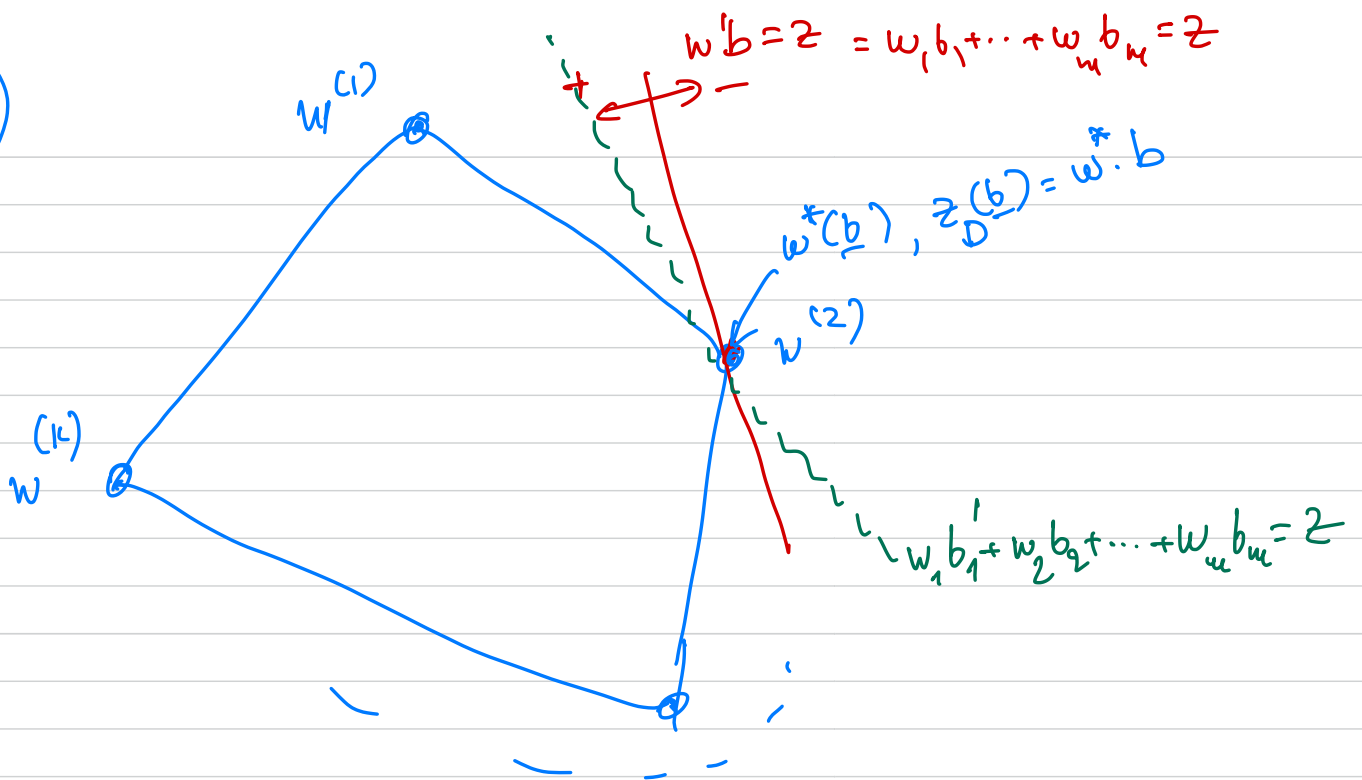
Case 2 $a_1^T x^* = b_1$ (ληφ. (1) ενεργός)



Εστω
$$\left. \begin{aligned} z_D &= \min w^T b \\ w^T A &\leq c \\ w &\geq 0 \end{aligned} \right\}$$

F_D ανεξάρτητη του b !!

FD



$$b_1' = b_1 + \delta \quad : \quad w_1 b_1' + \dots + w_m b_m$$

$$\text{για μικρό } \delta \quad w^*(b_1') = w^*(b_1)$$

$$\begin{aligned} z_D(b_1') &= w_1^* \cdot (b_1 + \delta) + w_2^* b_2 + \dots + w_m^* b_m \\ &= z_D(b_1) + \delta w_1^* \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial z_D}{\partial b_1} = w_1^* \right) !!$$

Θεώρημα

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_D(b)}{\partial b_i} &= w_i^* \quad i=1, \dots, m \\ \frac{\partial z_P(b)}{\partial b_i} &= w_i^* \end{aligned}$$

w_i^* : σκιώδης τιμή του περιορισμού i
(shadow price)

Ασκήσεις

3.4 Πρόβλημα σακκιδίου (knapsack)

1 σακκίον

n υλικά

a_j = βάρος/μπαξά υλικού j $j=1, \dots, n$ ($a_j > 0$)

c_j = αξία/ " " j

Έναξιο βάρος φορτίου $\leq b$

① Πρωτεύον πρόβλημα : διατύπωση + λύση

$$\max c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + y = b$$

$$x_1, \dots, x_n, y \geq 0$$

$$A = (a_1, \underbrace{(a_j)}_{\downarrow}, a_n, 1) \in \mathbb{R}^{1 \times (n+1)}$$

Βασικοί πίνακες $B = (a_j)$, $a_j > 0$

$$B = (1) \leftarrow (y)$$

$$B = (a_j) \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b/a_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B = (1) \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b \end{pmatrix}$$

$$z_j = c^T \underline{x} = c_j \frac{b}{a_j}$$

$$z = 0$$

κέρδος
(BEN)

$$z^* = \max_{j=1, \dots, n} \left\{ \frac{c_j}{a_j} \right\} \cdot 1 \quad \left(\text{or } \max c_j > 0 \right) \quad x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ c_j/a_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$y \rightarrow 0$

Δοικό Πρόβλημα

$$z_p = \max c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

$w \quad a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \leq b$

$x_1, \dots, x_n \geq 0$

$$z_D = \min bw$$

$a_1 w \geq c_1$

$a_2 w \geq c_2$

$\vdots$

$a_n w \geq c_n$

$w \geq 0$

(Υποθέτουμε $a_j > 0$)

$$w \geq \frac{c_1}{a_1}$$

$\vdots$

$$w \geq \frac{c_n}{a_n}$$

$w \geq 0$

$$w \geq \max \left(\max \left(\frac{c_j}{a_j}, j=1, \dots, n \right), 0 \right)$$

$$1) \text{ Aw } c_j \leq 0 \quad \forall j \Leftrightarrow \max c_j \leq 0$$

$$w \geq 0$$

$$z_D : \min_{w \geq 0} w b = 0, \quad w^* = 0$$

$$2) \text{ Aw } \max c_j > 0 \Rightarrow w \geq \max_j \left(\frac{c_j}{a_j} \right) (> 0)$$

$$z_D = \min_{w \geq \max_j \left(\frac{c_j}{a_j} \right)} b w$$

$$= b \cdot \max_j \left(\frac{c_j}{a_j} \right)$$

$$w^* = \max_j \left(\frac{c_j}{a_j} \right)$$

3.5

Farkas's LemmaΈστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ Τότε ακριβώς μια από τις παρακάτω
σχέσεις ισχύει:

i) $\exists x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0$

ii) $\exists w \in \mathbb{R}^m : w'A \geq 0, w'b < 0$

ΑπόδειξηΘα δείξουμε α) (i) $\Rightarrow$ όχι (ii) και

β) όχι (i) $\Rightarrow$ (ii)

Από αυτές θα προκύψει ότι ακριβώς
μια από τις (i) (ii) ισχύει.

Θεωρούμε το παρακάτω ζεύγος πρωτεύοντων-δευτερευόντων:

$$z_p = \max \quad 0^T \cdot x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$z_d = \min \quad w'b$$

$$w'A \geq 0$$

α) Αν ισχύει η (i) σημαίνει ότι το z_p είναι
εφικτό. Όμως οποιαδήποτε εφικτή τιμή

τον z_p έχει τιμή αντικ. ανάρμησης 0, επομένως

το z_p έχει βέλτιστη τιμή και $z_p = 0$.

Επομένως κ' το z_D έχει βέλτιστη τιμή και $z_D = 0$

Αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε εφικτή τιμή του

z_D : $w \in \mathbb{R}^m$: $w'A \geq 0$ ικανοποιεί $w'b \geq z_D = 0$,

επομένως $\nexists w \in \mathbb{R}^m$: $w'A \geq 0$ και $w'b < 0$, δηλαδή οχι (ii)

⑥ Αν δεν ισχύει η (i) τότε το z_p είναι ανέφικτο,

επομένως το z_D μπορεί να είναι είτε ανέφικτο

είτε μη φραγμένο. Όμως το z_D έχει τουλάχιστον

μία εφικτή τιμή $w=0$, επομένως δεν είναι

ανέφικτο, άρα είναι μη φραγμένο και $z_D = -\infty$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον μία εφικτή

τιμή του z_D με $w'b < 0$, επομένως ισχύει η (ii)

