

8-5-2026

Θεώρημα Συμπληρωματικότητας (Complementarity)

$$z_p = \max c^T x$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

$$z_D = \min w^T b$$

$$w^T A \geq c^T$$

$$w \in \mathbb{R}^m$$

$$w \geq 0$$

$$\text{Έστω } u_i = w_i (b_i - a_i^T x), \quad i=1, \dots, m$$

$$v_j = x_j (w^T A_j - c_j), \quad j=1, \dots, n$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Θ} \quad x \in F_p \\ w \in F_D \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u_i \geq 0 \quad \forall i \\ v_j \geq 0 \quad \forall j \end{array}$$

$$\text{Επίσης } \left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m u_i = w^T (b - Ax) = w^T b - w^T Ax \\ \sum_{j=1}^n v_j = (w^T A - c^T) x = w^T Ax - c^T x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m u_i + \sum_{j=1}^n v_j = w^T b - c^T x$$

$$\text{Θ} \quad x \in F_p, \quad w \in F_D \xrightarrow{\text{αριθ. β. διακ.}} w^T b - c^T x \geq 0$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^m u_i + \sum_{j=1}^n v_j = w^T b - c^T x \quad (1)$$

$$\text{Έστω } z_p \text{ έχει βέλτεστο λύση } x^* (\in F_p)$$

$\Rightarrow$ F' στο Z_D έχει βέλτιστη λύση $w^* \in F_D$

$$F' \quad C^T x^* = w^{*T} \cdot b$$

$$(1) \Rightarrow \left. \begin{aligned} 0 \leq \sum u_i + \sum v_j = w^{*T} b - C^T x^* = 0 \\ u_i, v_j \geq 0 \quad \forall i, j \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

συνθήκες
οφειλόμενων
κόστης

$$\Rightarrow \left[\begin{aligned} u_i &= w_i^* (b_i - a_i^T x^*) = 0 & i=1, \dots, m \\ v_j &= (w^{*T} A_j - c_j) x_j = 0 & j=1, \dots, n \end{aligned} \right] \quad (2)$$

Θεώρημα Έστω $\underline{x}, \underline{w}$ εφικτές λύσεις των P, D αντίστοιχα.

Οι $\underline{x}, \underline{w}$ είναι βέλτιστες στα αντίστοιχα προβλήματα αν και μόνο αν ισχύει η (2).

Έστω ισχύει η (2) για $x \in F_P, w \in F_D$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \sum u_i &= 0 \\ \sum v_j &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum u_i + \sum v_j = \underline{w}^T b - C^T \underline{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{x}, \underline{w} \text{ βέλτιστες} \\ \text{από ισχύει δυνάμει}$$

Ανάλυση βελτ. άσκων του D αντί βελτ. άσκ. του P

$$\begin{array}{ll} \text{Εστω} & z_p = \max C^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \max C^T x & x \in \mathbb{R}^n \\ Ax + y = b & y \in \mathbb{R}^m \\ \underline{x} \geq 0, \underline{y} \geq 0 \end{array}$$

$$\text{Simplex} \leftarrow \begin{cases} \max (C^T \ 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ (A \ I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b \\ m \times (n+m) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0 \end{cases}$$

Εστω ότι η β.λ. του P σε ΚΜ είναι $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ με εφελύξεση

$$\begin{pmatrix} x^* \\ x \\ y^* \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{αριθμός } m > 0 \text{ συνιστώσες}$$

Εστω $x_1, \dots, x_{m_1} > 0$ ($m_1 + m_2 = m$)
 $y_1, \dots, y_{m_2} \geq 0$

Για τις $x_j > 0$ ($j=1, \dots, m_1$) $\xrightarrow{(2)}$ $\boxed{w^T A_j - c_j = 0}$ $j=1, \dots, m_1$

$\Rightarrow$ ο j απ. του D είναι εφελύξ. (ικανοποιεί τις με ισότητα)
 $j=1, \dots, m_1$

Για τις $y_i > 0$ ($i=1, \dots, m_2$)

$$y_i = b_i - a_i^T x > 0 \quad (y_i: \text{λεξίσμα του } a_i^T x \leq b_i)$$

$$\Rightarrow a_i^T x < b_i$$

$$(2) \Rightarrow \boxed{w_i = 0 \quad (i = 1, \dots, m_2)}$$

Συνολικά

$$\begin{cases} w^T A_j = c_j & j = 1, \dots, m_2 \\ w_i = 0 & i = 1, \dots, m_1 \end{cases} \quad \begin{matrix} w \in \mathbb{R}^m \\ m \text{ εξισ.} \\ m \text{ αγνώστων} \end{matrix} \quad (3)$$

$$\Downarrow \text{μοαδική γύμ} \Leftrightarrow w^T B = c_B$$

$$w^T = c_B B^{-1}$$

Πρωτεύον (HKM)

Δυϊκό (HKM)

$$\text{αν } x_j > 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\bullet j \text{ ημ. ενεργός } (=) \\ (w^T A_j = c)$$

ο i ημροετός

είναι ανεερός ($<$)

$$a_i^T x < b_i$$

$$\Leftrightarrow$$

$$w_i = 0$$

$$\text{αν } \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \text{ εκπληοιέτη} \Rightarrow m_1 + m_2 < m \Leftrightarrow$$

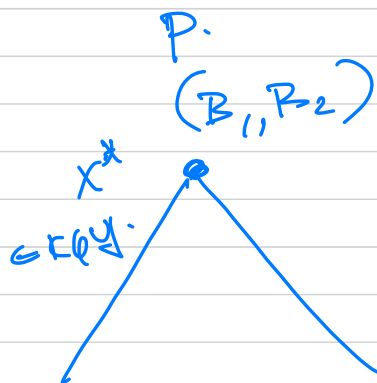
$\Leftrightarrow$ το σύστημα (3) έχει λοηαηής λύτες

$\Rightarrow D$ έχει λοηαηής βετωος λύτες

Πρωτ.

Βλ. Εγκυκλοπαιδεία

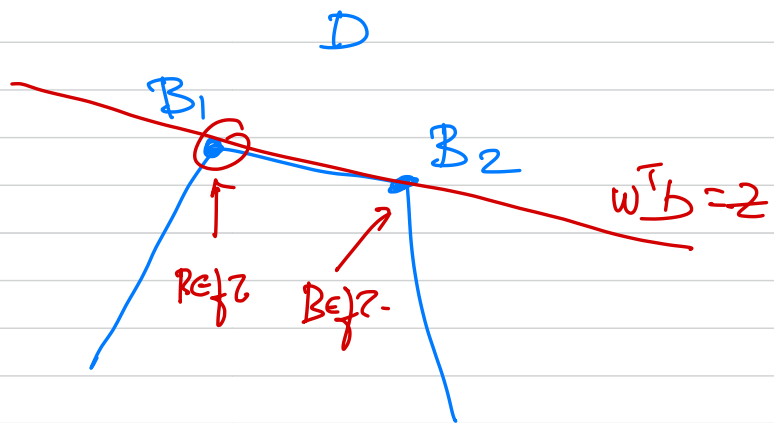
Πολλαπλές Βλ



Δοκίμ

Πολλαπλές Βλ

Βλ Εγκυκλοπαιδεία



Οικονομική (Φυσική) Ερμηνεία Δυτικού

$$\text{Εστω } z_p = \max \quad c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$\vdots$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0$$

Παραγωγή
σε
μοναδιαία
βάση

$$z_p = \max C^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0$$

$x_1, \dots, x_n$: ποσότητες παραγωγής προϊόντων $1, \dots, n$

$c_1, \dots, c_n$: μοναδιαία κέρδη " $1, \dots, n$

b_i : διαθ. ποσότητα πόρων i $i = 1, \dots, m$

a_{ij} : ποσότητα πόρων i που απαιτείται ανά
μονάδα παραγ. πρ. j

Θεωρούμε τα παρατηρηθέντα προϊόντα
κ' έναν εξωτερικό "επενδυτή/αγοραστή"
που θέλει να αγοράσει τους πόρους παραγωγής
με το ελάχιστο δυνατό κόστος για αυτόν

① Εστω ότι κάνει μια συνθηκική χρηματική
προσφορά ύψους z στον παραγωγό

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \min z \\ \text{υ.π. } z \geq z_p \end{array} \right\} \Rightarrow z^* = z_p$$

(2) Έστω ότι ο σχεδιασμός προσφέρεται να αγοράσει ποσότητες των πόρων παραγωγής $i=1, \dots, m$ σε τιμές $p_1, \dots, p_m$ ανά μονάδα $\leftarrow$ προσφορά

κόστος $\min p_1 b_1 + \dots + p_m b_m$

v.p. ?

ο παραγωγός μπορεί $\left\{ \begin{array}{l} \text{μτ } a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1} \text{ ποσότητες} \\ \text{παραγ. 1 μονάδα προϊόντος} \\ \text{1 τ' αγοράσει } C_1 \text{ ευρώ} \end{array} \right.$

Αν τα p είναι τιμές τότε

$$p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + \dots + p_m a_{m1} \leq C_1$$

ο παραγ. θα προτιμήσει να μην πουλήσει αυτές τις ποσ. από αγορά

$\Rightarrow$ ο αγοραστής έχει προφ.

ομολογία

ταυτόχρονα

$$a_{11} p_1 + \dots + a_{m1} p_m \geq C_1$$

$$a_{12} p_1 + \dots + a_{m2} p_m \geq C_2$$

$\vdots$

$$a_{1n} p_1 + \dots + a_{mn} p_m \geq C_n$$

Το πρόβλημα των αρραβώνων $\min p^T b$
 $p^T A \geq c$ $= z_D$
 $p \geq 0$

Εστω p^* η β.λ. του δυνίκου

p_i^* = η εφακιστική τιμή που θα δέχεται
 ο παραγωγός ανά μονάδα πόρων i
 στο πρόβλημά του

η εσωτερική αξία των πόρων i / μονάδα
 στο πρόβλημά του παραγωγού

[θα δείξουμε ότι $\frac{\partial z_p}{\partial b_i} = p_i^*$]