

9-3-2026

Ασκήσεις Κεφ. 1

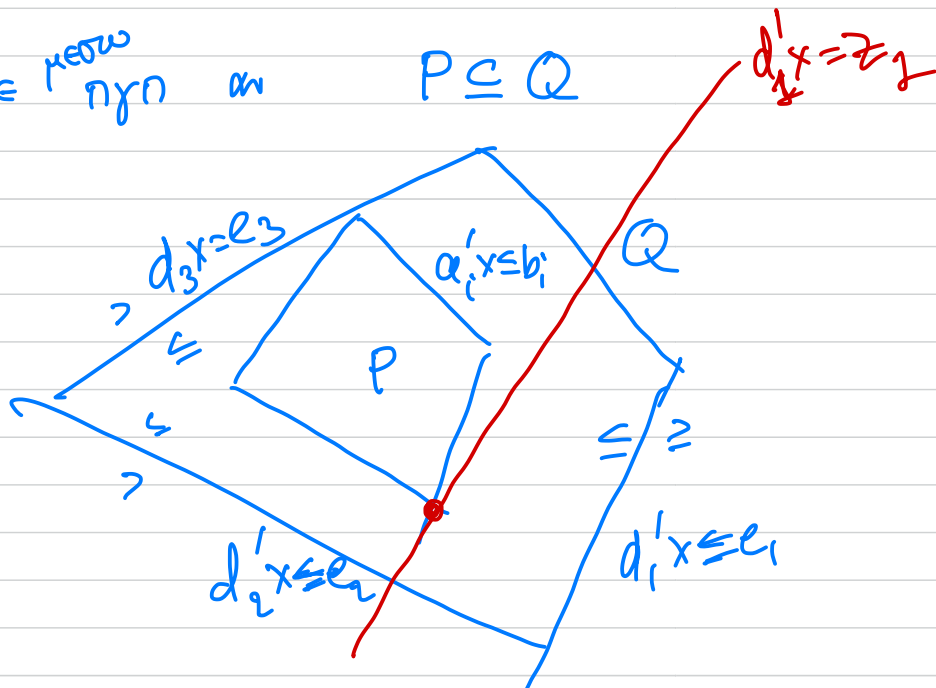
① Έστω δύο κυρτά νοζιδόρα (γραμμικά)

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i'x \leq b_i, i=1, \dots, m\} = \{x : Ax \leq b\}$$

$$Q : \{x \in \mathbb{R}^n : d_i'x \leq e_i, i=1, \dots, k\}$$

Ελέγξτε μέσω
nyn αν

$$P \subseteq Q$$



$$P \subseteq Q \Rightarrow \forall x \in P \Rightarrow x \in Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \forall x : Ax \leq b \Rightarrow d_i'x \leq e_i \quad i=1, \dots, k. \right\}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\max \{d_i'x : Ax \leq b\}}_{\text{nyn}} \leq e_i, i=1, \dots, k.$$

Επομένως να ελέγξουμε αν $P \subseteq Q$

λύνουμε τα πγπ

$$z_i = \max d_i' x \quad i=1, \dots, k$$
$$Ax \leq b$$

κ' τότε

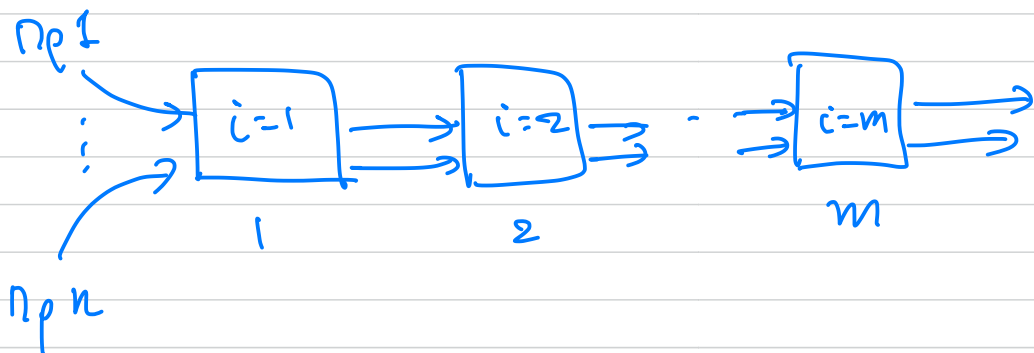
$$P \subseteq Q \text{ ανν } z_i \leq e_i \quad i=1, \dots, k.$$

② 1.1

n προϊόντα σε μια περίοδο

c_j : κέρδος/μονάδα πρ. j

m μηχανήματα



a_{ij} : χρόνος ανα μονάδα πρ. j στο μηχαν. i

b_i : διαθ. χρόνος μηχαν. i μέσα στην περίοδο
Μεγ. κέρδους.

Μεταβλητές απόφασης

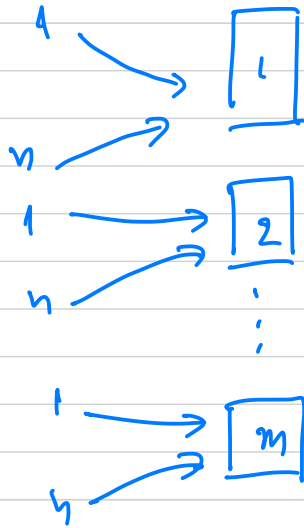
x_j = ποσ. πρ. j, $j=1, \dots, n$

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i=1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0$$

3 1.2



a_{ij} : χρ. ο. / μ. π. j στο
μ. π. i

c_j : κέρδος / μ. π. πρ. j

b_i : διαθ. χρ. μ. π. i

Μεταβλητές

x_{ij} : ποσ. πρ. j που παραγέται στο μ. π. i

$$\max \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_j x_{ij} = \sum_{j=1}^n c_j \left[\sum_{i=1}^m x_{ij} \right]$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq b_i \quad i=1, \dots, m$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$

3 1.6

Πρόβλημα παραγωγής T περιόδων (Πηροία)

c_t : κόστος / μ. π. περίοδο T

h_t : κόστος αποθ. / μονάδα πρ. T

d_t : ζήτηση περιόδου t

Αρχική Μορφοποίηση:

x_t : παραγ. αρχή πρ. t, $t=1, \dots, T$

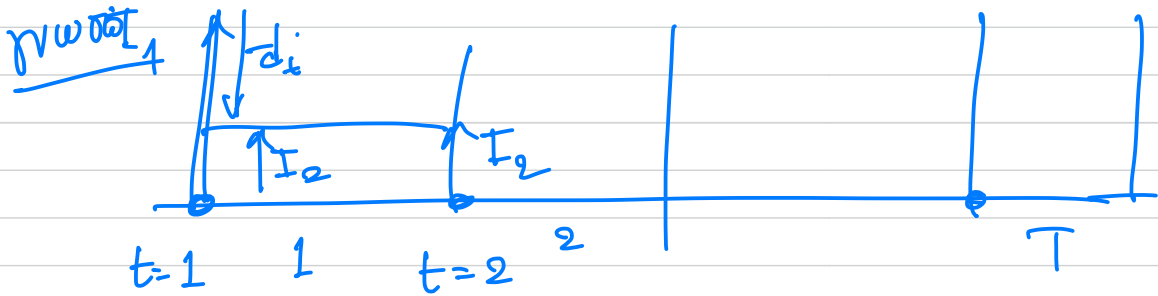
(I_1 : πρ. 0)

I_t : απόθεμα συν. αρχή πρ. t, $t=2, \dots, T+1$

$$\min \sum_{t=1}^T c_t x_t + \sum_{t=1}^T h_t I_{t+1}$$

$$\text{v.}\eta. \quad I_{t+1} = I_t + x_t - d_t, \quad t=1, \dots, T$$

$$x_t, I_t \geq 0 \quad \forall t$$



Νέος 'προβλεπτός' : Θέλουμε εξομάλυνση της παραγωγής

$$\text{Ιδανικά} \quad x_t = r \quad \forall t=1, \dots, T$$

$$\text{Δυνατά} \quad r = \bar{d} = \frac{\sum d_t}{T} \quad \left(\text{δηλ. } rT = \sum_{t=1}^T d_t \right)$$

$x_t = r$ ελαστικοί προβλεπτοί (νομική παραβίαση)

Εάν p_t = κόστος ανά περίοδο υπέρβασης
της παραγωγής από $\bar{d}$ συν. με t

q_t = κόστος υπεργίτησης από $\bar{d}$ συν. με t

$$\min \quad \sum_{t=1}^T c_t x_t + \sum_{t=1}^T h_t I_{t+1} + \sum_t p_t v_t + \sum_t q_t u_t$$

$$\text{v.π.} \quad I_{t+1} = I_t + x_t - d_t \quad t=1, \dots, T$$

$$x_t + u_t - v_t = \bar{d} \quad t=1, \dots, T$$

$$I_t \geq 0, \quad x_t \geq 0, \quad u_t \geq 0, \quad v_t \geq 0$$

(v.d.o. που βεβαιώνει ότι $u_t v_t = 0 \quad \forall t$)

Εστω ^{εφικτή} λύση $I_t, x_t, \dots$ όπου $u_t > 0, v_t > 0$

$$x_1 + u_1 - v_1 = \bar{d}$$

a) Αν $u_1 < v_1$ (πχ. $u_1 = 2, v_1 = 4 \quad x_1 + 2 - 4 = \bar{d}$)
κόστος $(\sum c_t x_t + \dots) + p_1 u_1 + q_1 v_1 (\dots)$

Εστω λύση με ίδια x_t, I_t, u_t, v_t

$$\text{εφόσον} \quad u'_1 = 0, \quad v'_1 = v_1 - u_1$$

ήπια αυτή είναι εφικτή

$$x_1 + 0 - (v_1 - u_1) = \bar{d} \Leftrightarrow x_1 + u_1 - v_1 = \bar{d}$$

Το κόστος ως

$$\underbrace{\sum c_t x_t + \sum h_t I_{t+1}}_{\text{ίδιο}} + \underbrace{p_1 \cdot 0 + q_1 \cdot (v_1 - u_1)}_{< p_1 u_1 + q_1 v_1} + \underbrace{\sum_{t=2}^T p_t + \dots}_{\text{ίδιο}}$$

β) Όμοια για $v < u$

4 1.7 Πρόβλημα εφημερίδοπώλη (news vendor model)

Παραγωγή μιας περιόδου Q (όχι ανόθετα)

Κόστος παραγωγής = c / μονάδα

Τιμή πώλησης = v / μονάδα.

Ζήτηση περιόδου D : τυχαία μεταβλητή.

$$p(k) = P(D = k) \quad , k = 0, 1, \dots, M$$

Αν $D < Q$ (παραγωγή) $\Rightarrow Q - D$ ανώριτα ποσότητα
έχει μηδενική αξία

Αν $D > Q \Rightarrow D - Q$: έλλειψη (χαμένος πωλητός)
χωρίς αξία πωλητή

(α) Να εκφραστεί το αναμ. κέρδος μιας περιόδου
συνάρτηση των Q

Να δ.ο. είναι τυπ. γραμμική κ' κοίτη ως προς Q

(β) Να ποσοτικοποιηθεί μέσω πηχ (μεγισ. αναμ. κέρδους).

(α) Έστω $\pi(Q) = E_D(\text{κέρδος μιας περιόδου} | Q)$

$\Pi(Q, D)$: κέρδος μιας περιόδου

Q = παραγωγή

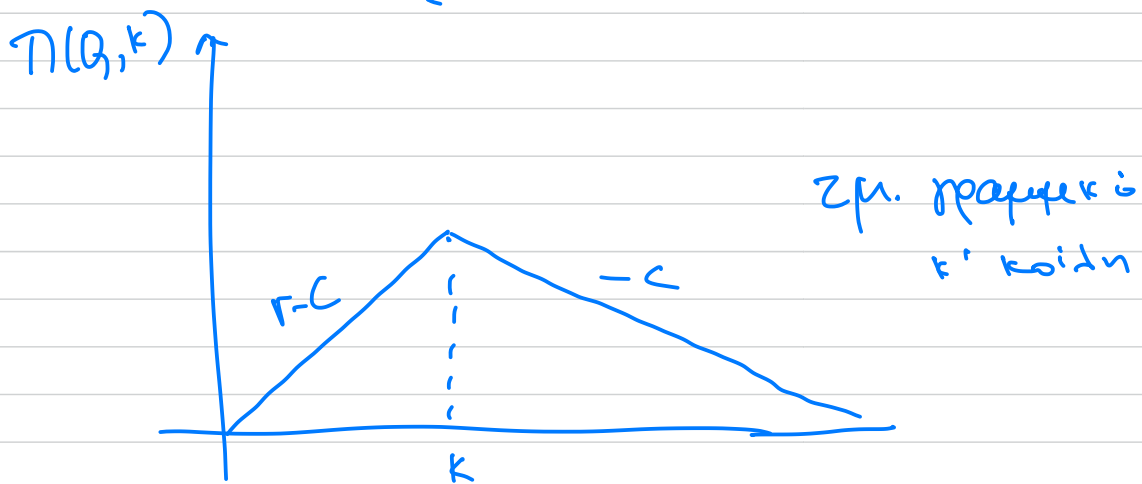
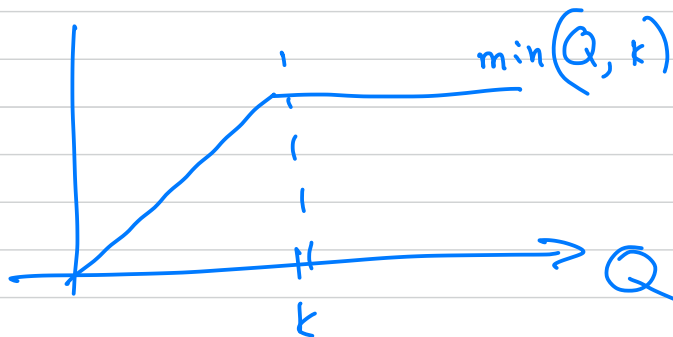
D = ζήτηση

$$\Rightarrow \pi(Q) = E(\Pi(Q, D))$$

$$\pi(Q) = \sum_{k=0}^M \Pi(Q, k) \cdot p(k)$$

Αρκετά να δούμε $\Pi(Q, k)$ $\leftarrow$ γραμμική και κοίτη για κάθε k .

$$\begin{aligned} \Pi(Q, k) &= r \cdot \text{πωξιόνες} - c \cdot \text{παραγωγή} \\ &= r \cdot \min(Q, k) - cQ \end{aligned}$$



$$\pi(Q) = r \sum_{k=0}^M p(k) \min(Q, k) - cQ$$

Μοντελοποίηση μέσω u_k, v_k

$$\begin{aligned}\min(Q, \kappa) &= Q - \underbrace{(Q - \kappa)^+}_{u_\kappa} \\ &= \kappa - \underbrace{(\kappa - Q)^+}_{v_\kappa} \dots\end{aligned}$$

⑤ 1.3 n projects

x_j = % συμμετοχής στο j

a_i^j : χρηματορροή του j στην περίοδο i
 $i=1, \dots, T$

(δαπάνη) s_i = έξοδα της εταιρείας περίοδο i

Δυνατότητα δανεισμού κ' αποταμίευσης
σε κάθε περίοδο με κοινό
επιτόκιο r

μεταβλ. $\begin{cases} y_i = \text{πρόσ. αποταμίευσης τηρ. } i & (y_i \geq 0) \\ W_i = \text{συνολικό πρόσ. στην τράπεζα στην} & (W_i \geq 0) \\ \text{περίοδο } i \end{cases}$

$$W_{i+1} = (1+r)(W_i + y_i)$$

z_i : κατανάλωση υπηρεσίας i

x_j = % of project j , y_t = αποσπασμό περ. t .

I_t : κέρφαλο που κρατείται
στο αρχή περ. t .

u_{jt} : αναζητησι (κατανάλωση) υπηρεσίας t . στο πρόγ. j

$$v_{jt} : \text{εσοδή} \quad \max \sum_{t=1}^T w_t + I_{t+1}$$

$$I_{t+1} = (I_t + y_t)(1+r)$$

Εσοδα στα projects : $\forall j$ $v_{jt} - u_{jt} = a_t^j x_j$

Κέρδος :

