

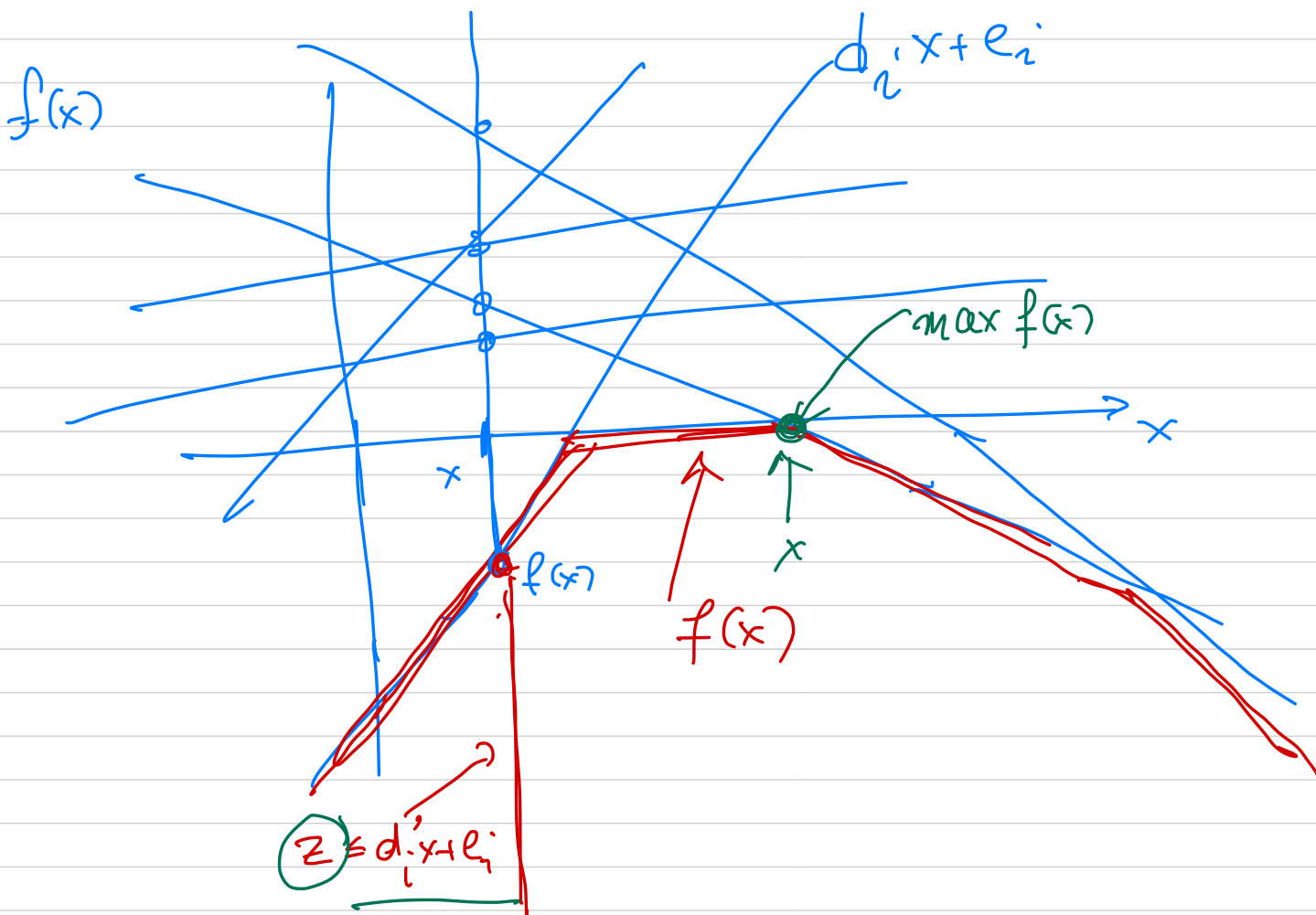
Τμήματα Γραμμικής Συνάρτησης

① Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \min \{ d_i'x + e_i, i=1, \dots, k \}$$

$f(x) = a'x, x \in \mathbb{R}^n$: γραμμική
 $f(x) = a'x + k, x \in \mathbb{R}^n$ μη γραμμική (αφφινική-affine)

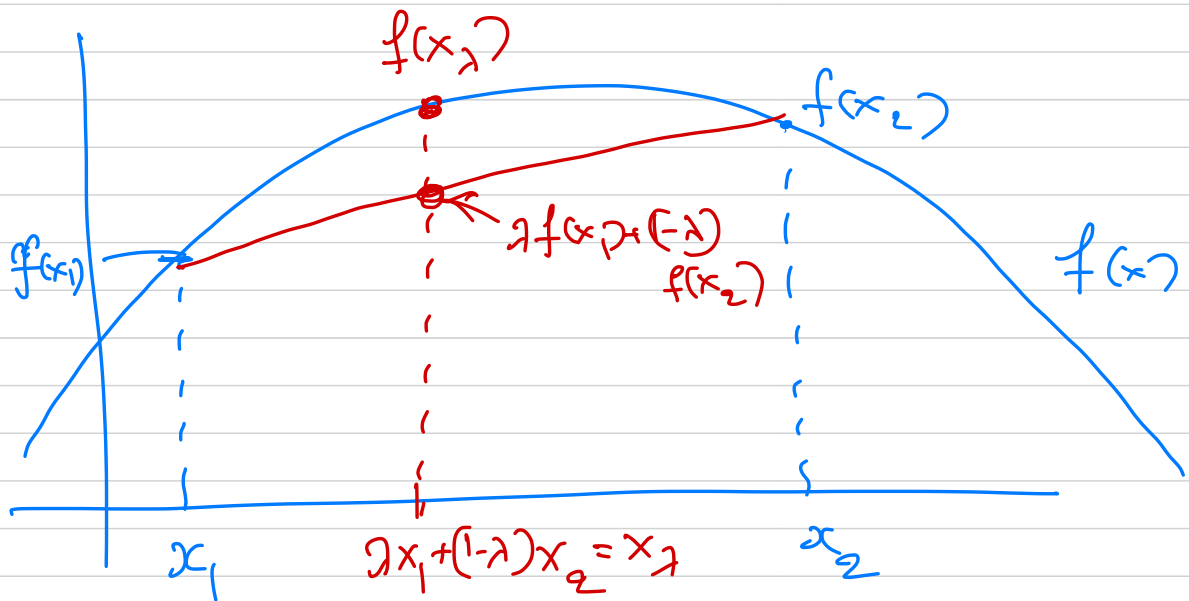
$d_i \in \mathbb{R}^n, e_i \in \mathbb{R}$ γνωστές παράμετροι



Λήμμα : $f(x)$: κοίλη (concave)

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

$$\forall x_1, x_2, \forall \lambda \in [0, 1]$$



f : κυρτή (convex)

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

$$\forall x_1, x_2, \forall \lambda \in [0, 1]$$

Λήμμα : f_1, f_2 κυρτές $\Rightarrow \max(f_1, f_2)$: κυρτή

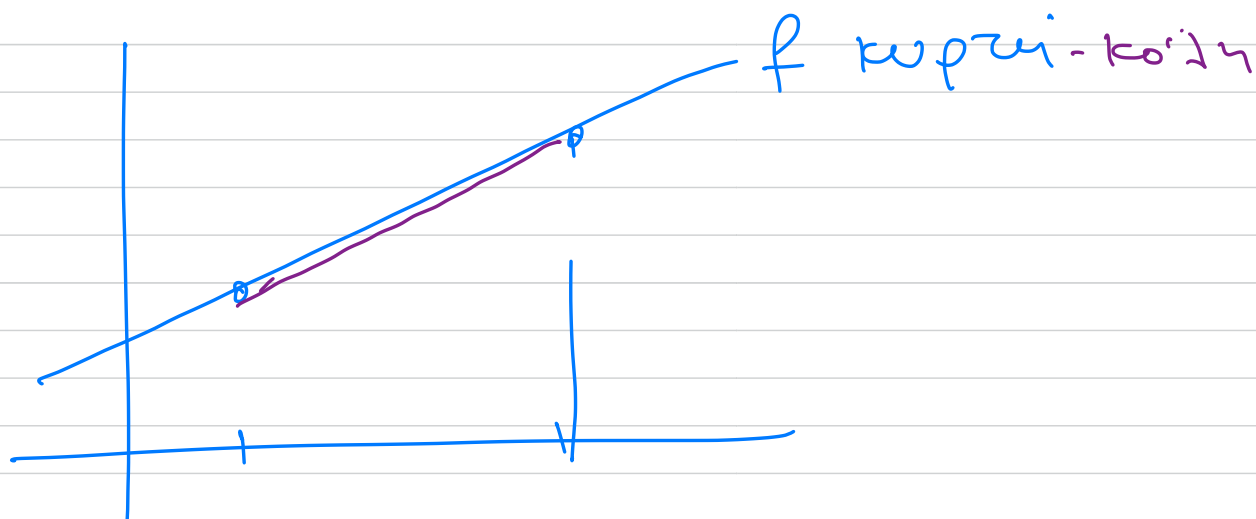
f_1, f_2 : κοίλες $\Rightarrow \min(f_1, f_2)$: κοίλη



Ανάλυση: άσκηση

Qv $f(x) = d'x + e \Rightarrow f$: κέρσι και κοίτη

$\max \{ \text{αφθικιών} \}$ κέρσι
 $\min \{ \text{αφθικιών} \}$ κοίτη



Έστω

$$z_{PW} = \max_x f(x) \\ Ax = b \\ x \geq 0$$

$$\text{όπου } f(x) = \min \{ d'_i x + e_i, i=1, \dots, k \}$$

Θέλουμε να δείξουμε πχπ. ??

Παρατήρηση

$$a = \min(b, \gamma, \delta)$$

$$a = \min(b, \gamma, \delta) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \leq b \\ a \leq \gamma \\ a \leq \delta \end{array} \right.$$

$$a = \min(b, \gamma, \delta) \Leftrightarrow$$

$$a = \max z$$

$$\text{υ.π. } z \leq b$$

$$z \leq \gamma$$

$$z \leq \delta$$

πχπ

$$\Rightarrow \forall x : f(x) = \min \{ d'_i x + e_i, i=1, \dots, k \} =$$

$$\forall x \quad f(x) = \max z$$

$$z \leq d_i'x + e_i \quad i=1, \dots, k.$$

Εστω

$$z_{LP} = \max_{(x, z)} z$$

$$Ax = b$$

$$z \leq d_i'x + e_i \quad i=1, \dots, k$$

$$x \geq 0$$

Θεώρημα

Αν ένα από τα z_{PW} κ' z_{LP}
έχει βέλτωση τότε έχει και
το άλλο και επίσης

$$z_{LP} = z_{PW}$$

κ' οι βέλτωση αυτές ταυτίζονται στο x

Λήμμα

Αν το z_{LP} έχει βέλτωση λύση (x_1, z_1)

$$\text{Τότε } z_1 = f(x_1) \left(= \min \{d_i'x + e_i, i=1, \dots, k\} \right)$$

Ανάλυση

$$z_{LP} = \max_{(x, z)} z$$

$$Ax = b$$

$$z \leq d_i'x + e_i \quad \forall i$$

$$x \geq 0$$

(x_1, z_1) b.v. του $z_{LP} \Rightarrow$ και εφικτή

$$\Rightarrow z_1 \leq d_i' x_1 + e_i \quad \forall i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_1 \leq \min \{d_i' x_1 + e_i, i=1, \dots, k\} \\ = f(x_1)$$

$$\Rightarrow z_1 \leq f(x_1)$$

$$\text{Εάν } z_1 < f(x_1) \Rightarrow \exists z' : z_1 < z' \leq f(x_1)$$

$$\text{Για το } z' : z' \leq d_i' x + e_i \quad \forall i=1, \dots, k$$

$$\Rightarrow (x_1, z') \text{ εφικτή λύση στο } z_{LP} \\ \text{και } z' > z_1$$

άρα no

για (x_1, z_1) βέλτεση λύση

Ανάλυση Θεωρημάτων

$$z_{PW} = \max_x f(x) \\ Ax = b \\ x \geq 0$$

$$z_{LP} = \max z \\ (s.t.) \quad Ax = b \\ x \geq 0 \\ z \leq d_i'x + e_i \quad \forall i$$

$$Qw \quad z_{PW} \text{ ανήκει στο } \Rightarrow z_{LP} \text{ ανήκει στο}$$

$$Qw \quad z_{LP} \quad " \Rightarrow \nexists x : Ax = b, x \geq 0 \Rightarrow z_{LP} \text{ ανήκει.}$$

α) Έστω z_{PW} έχει b.v. x_0 οπότε $z_{PW} = f(x_0)$

$$\text{Τότε } f(x_0) \leq d_i'x_0 + e_i \quad \forall i$$

$$\text{και} \quad Ax_0 = b \\ x_0 \geq 0$$

$$\Rightarrow (f(x_0), x_0) \text{ εφικτή λύση του } z_{LP} \\ (\text{οχι αναγκ. βέλτεση})$$

$$\Rightarrow z_{LP} \geq f(x_0) \Rightarrow \underline{z_{LP} \geq z_{PW}}$$

$$\text{Έστω } z_{LP} > z_{PW} \quad (\text{θα καταφ. σε άτοπο})$$

$\Rightarrow \exists$ μια επικρίσιμη λύση (x_1, z_1) του Z_{LP}
π.ω. $z_1 > z_{PW}$

$$\forall i \in I \quad z_1 \leq d_i' x + e_i \quad \forall i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_1 \leq f(x_1)$$

$$\text{και} \quad Ax_1 = b \\ x_1 \geq 0$$

Επομένως $\exists x_1 : Ax_1 = b, x_1 \geq 0$ και
 $f(x_1) \geq z_1 > z_{PW}$

$\Rightarrow \exists$ επικρίσιμη λύση x_1 στο Z_{PW} με
 $f(x_1) > z_{PW}$ άρα $(z_{PW} : b, A)$

$$\Rightarrow z_{LP} = z_{PW}$$

$(f(x_0), x_0)$ β.λ. στο Z_{LP}

⑥ (Αντιστοίχο) Έστω $z_{LP} \in \mathbb{R}$ b.v.

$$(x_1, z_1)$$

$\Rightarrow$ επί λήψη $z_1 = f(x) \Rightarrow \dots$

$$z_{PW} = \max_{\substack{Ax=b \\ x \geq 0}} f(x)$$

$$f(x) = \min \{d_i x + e_i\}$$

(maximin problem)

Minimax

$$z_{PW} = \min_{\substack{Ax=b \\ x \geq 0}} g(x)$$

$$g(x) = \max \{d_i' x + e_i\}$$

$\Leftrightarrow$

$$z_{LP} = \min_{(x, z)} z \quad \begin{matrix} Ax=b \\ x \geq 0 \end{matrix}$$

$$z \geq d_i' x + e_i \quad i=1, \dots, k.$$