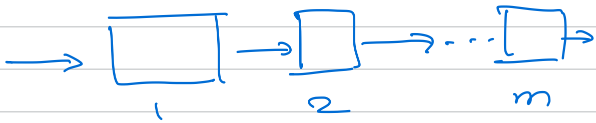
2024-03-11

Ασκήσεις Κεφ. 1

① 1.1 n προϊόντα, μια περίοδο

c_j = κέρδος/μον. πρ. j

m μηχανήματα



a_{ij} = χρόνος επεξεργ. μονάδας πρ. j στο μηχάνημα i, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$

b_i = διαθ. χρόνος μηχαν. i, $i=1,\dots,m$

x_j = ποσ. παραγωγής πρ. j, $j=1,\dots,n$

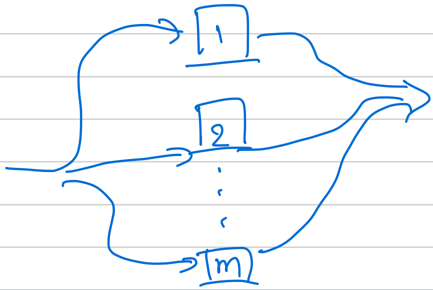
$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=1,\dots,m$$

$$x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,n$$

② 1.2 Ίδιο πλαίσιο με το πρ. 1.1 όμως:

Κάθε προϊόν χρειάζεται επεξεργασία μόνο από ένα μηχάνημα (οποιοδήποτε)



x_j = ποσ. παρ. πρ. j ? δεν αρκεί

x_{ij} = ποσ. πρ. j που παράγεται στο μηχ. i

$i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$

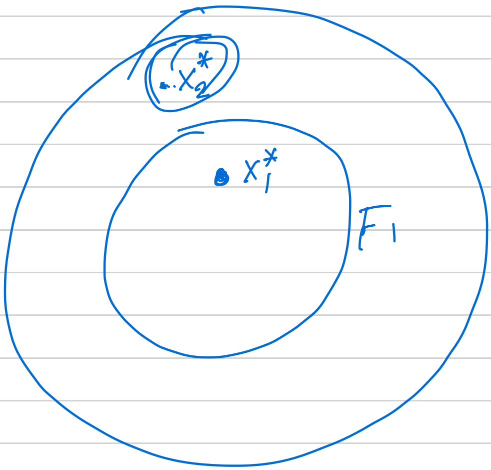
$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} c_j \underbrace{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}}_{\text{παραγ. ποσότητα πρ. } j} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \le b_i \qquad i=1,\dots,m \\ x_{ij} \ge 0 \qquad \forall i,j \end{cases}$$

③ (εκτός σημ.)

P1 $\qquad\qquad\qquad$ P2

$$z_1 = \max_{x \in F_1} g(x) \qquad\qquad z_2 = \max_{x \in F_2} g(x)$$

Αν $F_1 \subseteq F_2$ πώς σχετίζονται τα z_1, z_2?



$z_2 \geq z_1$

$\forall\, x_1 \in F_1 \Rightarrow x_1 \in F_2$

Έστω x_1^* βέλτιστη λύση του F_1 $\Rightarrow z_1 = g(x_1^*)$

Όμως $x_1^* \in F_1 \Rightarrow x_1^* \in F_2$ (εφικτή λύση του F_2)

$\Rightarrow z_2 = \max\{g(x) : x \in F_2\} \geq g(x_1^*) = z_1$ ✓

Αν $\qquad z_1 = \min\limits_{x \in F_1} g(x) \qquad\qquad z_2 = \min\limits_{x \in F_2} g(x)$

$$F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow z_1 \geq z_2$$

Ερώτημα Έστω z_1 = βέλτιστη τιμή 1.1

z_2 = " " 1.2

Έστω $(x_1, \dots, x_n)$ εφικτή λύση του 1.1.

$$
\begin{array}{ccccc}
\boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \cdots & \boxed{m} \\
x_1 & x_1 & x_1 & & x_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
x_n & x_n & x_n & & x_n
\end{array}
$$

Επομένως π.χ. αν

$$
\begin{array}{lll}
x_{11} = x_1 & x_{12} = x_2 & \cdots \\
x_{21} = 0 & x_{22} = 0 & \\
\vdots & \vdots & \\
x_{m1} = 0 & x_{m2} = 0 &
\end{array}
$$

$$\sum a_{1j} x_{1j} \leq b_1$$

$$\sum a_{ij} x_{ij} = 0 \leq b_i \qquad \forall i = 2, \dots, m$$

$$\sum_j c_j \sum_i x_{ij} = \sum c_j x_j$$

Η $\{x_{ij}\}$ είναι εφικτή στο 1.2

$$\Rightarrow z_2 \geq \sum c_j x_j \quad \forall \{x_j\} \text{ εφικτή στο } 1.1.$$

$$\Rightarrow \boxed{z_2 \geq z_1}$$

4 1.3

Εταιρεία έχει n διαθέσιμα επενδ. προγράμματα

Κάθε πρόγραμμα: διάρκεια T περιόδων

Μπορεί να επενδύσει σε οποιοδήποτε κλάσμα (< ή ≥ 1)

του προγράμματος θέλει.

Κάθε πρόγραμμα j :

Στη διάρκεια περιόδου $i = 1, \ldots, T$ χρηματοροή $= a_i^j$ (>0 ή <0)

Στο τέλος των T περ. (για T+1) τελική απόδοση $= c_j$

Σε κάθε περίοδο δυνατότητα αποταμίευσης ή δανεισμού χρημ. ποσού από τράπεζα

Επιτόκιο δανεισμού $= r$ (καταθέσεις / δανεισμός)

Σε κάθε περίοδο s_i = εισόδημα από εξωτ. πηγές (γνωστό)

Μεγ. συνολικού κέρδους εταιρείας στο τέλος του ορίζοντα.

Μεταβλητές

x_j = βαθμός επένδυσης στο πρόγραμμα j, $j = 1 \ldots, n$

y_i = ποσό αποταμίευσης ή δανεισμού στην αρχή περιόδου i, $i = 1, \ldots, m$

r_i = ποσό που καταναλώνεται στην περίοδο i, $i = 1, \ldots, m$ κ' δεν επιστρέφει στα προγράμματα.

Κέρδος: π.χ. αν στη περ. 2 έχω επιστροφή χρημάτων από τα προγράμματα = 1000 κ' αυτά τα χρησιμοποιώ για χρηματοδότηση επομ. περιόδων αυτό είναι κέρδος κ' πώς το μετράω;

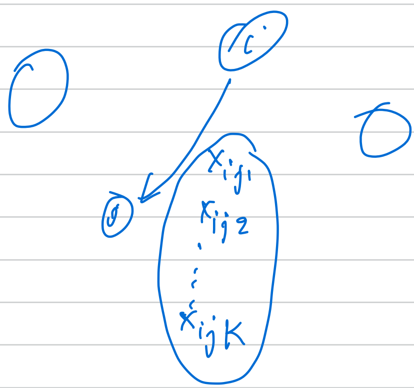
Άσκηση: γράψτε το μοντέλο με τις παραπάνω μεταβλητές.

(προσοχή στους περιορισμούς)

(αναλογία με το πρόβλημα αποθεμάτων)

1.4

μεταβλητές x_{ijk} = ποσότητα πρ. k μεταφέρεται στην ακμή (i,j)



1.6

Πρόβλημα παραγωγής T περιόδων

<u>Επιπλέον</u> : Σε κάθε περίοδο <u>επιθυμητό</u> (ιδανικό)

επίπεδο παραγωγής $= \dfrac{d_1 + \cdots + d_T}{T} = m$

(στόχος εξομαλυνόμενης παραγωγής)

Για να συμπεριληφθεί στο μοντέλο

περιορισμός $\boxed{x_i = m}$ $\forall i$ (x_i = ποσ. παραγωγής περ. i)

συνήθως ανέφικτο ή πολύ κακή λύση

καλύτερα $x_i + u_i - v_i = m$

$u_i, v_i \geq 0$ (αποκλίσεις)

αντ. συνάρτηση $\sum_j c_j x_i + \sum h_i I_{i+1} + \cdots + \sum_{i=1}^{T} (p_i u_i + q_i v_i)$

1.7

Πρόβλημα εφημεριδοπώλη

Παραγωγή σε μια περίοδο

Κόστος παραγωγής $= c$ / μον. προϊόντος

Τιμή πώλησης $= r$ / μον. προϊόντος

$(r > c)$

Απούλητα προϊόντα μηδενική αξία

Ελλείψεις = χαμένες πωλήσεις

D = ζήτηση περιόδου

Αν D = γνωστή : τετριμμένο πρόβλημα $x = D$ → παραγωγή

Έστω D : άγνωστη στην αρχή περιόδου που καθορίζεται η παραγωγή

(λήψη αποφάσεων υπό αβεβαιότητα)

$P(D=k) = p_k, \quad k = 0,1,2,\ldots,M$ D: διακριτή τμ.

$x = ?$ → παραγωγή

$$\left.\begin{array}{c}\max E(\text{κέρδος}) \\ (x \geq 0)\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΠΓΠ ?}$$

$\text{Κέρδος} = \Pi(D, x)$

π.χ. $c = 10$, $r = 15$, $x = 100$, $D = 70$

$\Pi = ?$ παραγωγή $x = 100$ κόστος $10 \times 100 = 1000$

πωλήσεις 70 έσοδα $70 \times 15 = 1050$

κέρδος $= 50$

$D = 120 \Rightarrow$ πωλήσεις 100 κόστη 1000

έσοδα 1500

κέρδος 500

<u>Γενικά</u>

Κόστος $= c \cdot x$

Έσοδα $= r \cdot \min(D, x)$

Κέρδος $= r \min(D, x) - c x$.

$$E(\text{Κέρδος}) = r \cdot \sum_{k=0}^{M} \min(k, x) - c x.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \max\limits_{x} \; r \sum\limits_{k=0}^{M} p_k \min(k, x) - c x \\ x \geq 0. \end{array} \right\}$$

μη γραμμική κ' κοίλη

$\Downarrow$

πρόβλημα <u>maximin</u>

Ορίζω νέες μεταβλητές S_k = πωλήσεις αν η ζήτηση = $D=k$

$$S_k = \min(x,k)$$

$$S_k = \max Z_k \qquad = \text{πωλήσεις αν } D=k.$$

$$Z_k \le x$$

$$Z_k \le k.$$

πωλήσεις

$$\max \sum_{k=0}^{M} p_k Z_k - cx$$

$$Z_k \le k \qquad k=0,\dots,M$$

$$Z_k \le x \qquad k=0,\dots,M$$

$$x \ge 0$$

$$\Downarrow$$

στη βέλτιστη λύση $Z_k = \min(k,x)$

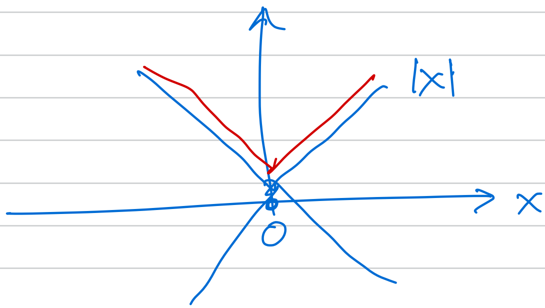
1.8

$$\min \sum_{i=1}^{n} c_i |x_i| \qquad Ax = b$$

$c_i \geq 0 \ \forall i$

ΠΓΠ ?

$\sum_{i=1}^{n} c_i |x_i|$ τμ γραμμική κυρτή.



$|x| = \max(x, -x)$

μοντελ. αναφορά με 2ο. 1.7