Ασκήσεις ΣΤ

1. Έστω $F_1 \xrightarrow{\pi_1} F_2 \xrightarrow{\pi_2} F_3 \cdots \xrightarrow{\pi_n} F_{n+1} \cdots$ μια άπειρη ακολουθία πεπερασμένα γεννώμενων ελευθέρων ομάδων και επιμορφισμών. Δείξτε ότι υπάρχει ένας δείκτης s έτσι ώστε για καθε $i \geq s$ ο π_i να είναι ισομορφισμός.

2. Έστω $F = \langle\, x,\, y \,\rangle$ η ελεύθερη ομάδα σε δύο γεννήτορες. Έστω N η κανονική υποομάδα της F η παραγόμενη από τα $xyx^{-1}y$ και $yxy^{-1}x$. Να υπολογίσετε την ελεύθερη διάσταση της N και να βρήτε ένα σύνολο ελευθέρων γεννήτορων της.

3. Έστω G ομάδα. Να αποδείξετε την ισοδυναμία των παρακάτω προτάσεων.

   i) $\bigcap \{\, H \mid H \leq_f G \,\} = 1.$

   ii) $\bigcap \{\, N \mid N \lhd_f G \,\} = 1.$

   iii) Για κάθε $g \in G$ υπάρχει M_g πεπερασμένη ομάδα και $\varphi : G \longrightarrow M_g$ ομομορφισμός έτσι ώστε $\varphi(g) \neq 1$.

   iv) Για κάθε $g \in G$ υπάρχει $H_g \leq_f G$ έτσι ώστε $g \notin H_g$.

4. Έστω $F = \langle\, a,\, b \,\rangle$ η ελεύθερη ομάδα σε δύο γεννήτορες και N_k η κανονική υποομάδα της F η παραγόμενη απο τα a^{2^k} και b, $k \geq 0$. Δείξτε ότι κάθε F/N_k είναι πεπερασμένη κυκλική.
   Έστω $N = \bigcap_k N_k$. Δείξτε ότι η F/N είναι άπειρη κυκλική.

5. Έστω $F = \langle\, a,\, b \,\rangle$ η ελεύθερη ομάδα σε δύο γεννήτορες. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\varphi : F \longrightarrow F$ με $\varphi(a) = ab$ και $\varphi(b) = a^{-1}$ ορίζει ένα αυτομορφισμό της F. Να υπολογίσετε τον αντίστροφό του.

   Να ορίσετε έναν μονομορφισμό της F, ο οποίος δεν είναι αυτομορφισμός.

   Μπορείτε να ορίσετε έναν επιμορφισμό της F, ο οποίος δεν είναι αυτομορφισμός?

6. Έστω $F = \langle\, x,\, y \,\rangle$ η ελεύθερη ομάδα διάστασης 2. Ορίζουμε H να είναι το σύνολο όλων των στοιχείων της F με άρτιο (ανηγμένο) μήκος.

   Δείξτε ότι το H είναι κανονική υποομάδα της F δείκτου 2. Μάλιστα δε η H είναι ελεύθερη διάστασης 3. Συγκεκριμμένα δείξτε ότι το σύνολο $\{\, x^2, xy,\, xy^{-1} \,\}$ αποτελεί ένα σύνολο ελευθέρων γεννητόρων της H.

7. *i)* Έστω $Aut(\mathbb{Q})$ η ομάδα αυτομορφισμών της προσθετικής ομάδας των ρητών. Δείξτε ότι η $Aut(\mathbb{Q})$ είναι ισόμορφη με την πολλαπλασιαστική ομάδα $(\mathbb{Q}^*,\, \cdot\,)$ των ρητών αριθμών.

   ii) Δείξτε ότι η $(\mathbb{Q}^*,\, \cdot\,)$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.

   Συγκρίνετε με το γνωστό θεώρημα ότι η ομάδα αυτομορφισμών μιας πεπεραμένα γεννώμενης προσσεγγιστικά πεπερασμένης ομάδας είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.

8. Μια ομάδα G θα ονομάζεται **διαιρετή**, αν για κάθε $g \in G$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ η εξίσωση $x^n = g$ έχει λύση στην G, δηλαδή υπάρχει $r \in G$ έτσι ώστε $r^n = g$.

   Δείξτε ότι:

   Κάθε πηλίκο μιας διαιρετής ομάδας είναι διαιρετή ομάδα.

   Μια διαιρετή ομάδα δεν έχει (γνήσιες) υποομάδες πεπερασμένου δείκτη.

   Κάθε ομομορφισμός $\varphi : G \longrightarrow \Phi$ από μια διαιρετή ομάδα G σε μια πεπερασμένη ομάδα Φ είναι τετριμμένος.

   Μια διαιρετή ομάδα G δεν είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.

9. Έστω p ένας πρώτος αριθμός και η ομάδα με παράσταση $G = \langle\, a_1,\, a_2 \cdots \mid a_{i+1}^p = a_i,\ a_i a_j = a_j a_i \,\rangle$.

   Δείξτε ότι:

   Η G είναι διαιρετή.

   Η G δεν είναι πεπερασμενα γεννώμενη.

   Η G είναι τοπικά κυκλική, δηλαδή κάθε πεπερασμένα γεννώμενη υποομάδα της είναι κυκλική.

   Η G δεν είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.

10. Έστω G μια ομάδα.

    Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

    $i)$ Η G είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.

    $ii)$ Υπάρχει μια οικογένεια $(K_i)_{i\in I}$ πεπερασμένων ομάδων όπου η G εμφυτεύεται στο καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{i\in I} K_i$.

11. Έστω G μια ομάδα και $S = \{\, a_1,\, a_2,\, \dots ,\, a_n \,\}$ ένα σύνολο γεννητόρων της. Έστω $\mathcal{G}(G,\, S)$ το αντίστοιχο γράφημα Cayley. Έστω H η υποομάδα της G η παραγόμενη από τα στοιχεία $a_2,\, a_3,\, \dots ,\, a_n$. Από το γράφημα $\mathcal{G}(G,\, S)$ διαγράφουμε όλες τις ακμές που αντιστοιχούν στον γεννήτορα a_1.

    Δείξτε ότι προκύπτει ένα μη συνεκτικό γράφημα, το οποίο αποτελείται από συνεκτικά υπογραφήματα, όλα ισόμορφα μεταξύ τους. Κάθε ένα από τα οποία έχει ως κορυφές τα στοιχεία ενός συμπλόκου gH.

    Εφαρμογή: Έστω G η διεδρική ομάδα $D_{2n} = \langle\, a,\, b \mid a^2 = 1,\, b^n = 1,\, aba = b^{n-1} \,\rangle$ και ως H μια περίπτωση έχουμε $H_1 = \langle\, a \,\rangle$ και μια άλλη $H_2 = \langle\, b \,\rangle$.

12. Έστω Γ ένα γράφημα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

    (α′) Το Γ είναι δένδρο.

    (β′) Για κάθε δύο κορυφές $v,\, u \in V(\Gamma)$ υπάρχει μοναδικό ανηγμένο μονοπάτι με άκρα τις v και u.

    (γ′) Διαγράφοντας οποιαδήποτε ακμή e, το γράφημα καθίσταται μη συνεκτικό.

    (δ′) Στην περίπτωση που το Γ είναι πεπερασμένο ισχύει: $\mid V(\Gamma) \mid = \mid E(\Gamma) \mid +1$.

13. Έστω G μια ομάδα, η οποία δρα χωρίς αντιστροφές επί του δένδρου T. Για κάθε $g \in G$ και για κάθε κορυφή $v \in V(T)$ ορίζουμε $d(gv,\, v) =$ το μήκος του (μοναδικού)ανηγμένου μονοπατιού που έχει άκρα τις κορυφές gv και v. Έστω $r(g) = min\{\, d(gv,\, v),\ v \in V(T) \,\}$ και $T_g \{\, v \in V(T) \mid d(gv,\, v) = r(g) \,\}$.

    $i)$ Δείξτε ότι το T_g αποτελεί τις κορυφές ενός υποδένδρου του T. Επιπλέον δείξτε ότι στην περίπτωση, όπου $r(g) \neq 0$, το T_g είναι ένα διπλά άπειρο μονοπάτι.

    $ii)$ Έστω $g,\, t \in G$ και $n \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι $r(g^n) = \mid n \mid \cdot r(g)$ και $r(t^{-1}gt) = r(g)$.
    Επί πλέον δείξτε ότι το αποτέλεσμα της δράσης της κυκλικής ομάδας $\langle\, t \,\rangle$ επί του δένδρου T_g είναι το δένδρο $T_{tgt^{-1}}$.

14. Έστω $(T,\, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο. Για κάθε $u \in T$ έστω $A_u = \{\, v \in V(T) \,:\, v \leq u \,\}$.

    Υποθέτουμε ότι ότι το T έχει τις εξής ιδιότητες:

    $i)$ Υπάρχει ελάχιστο στοιχείο στο T. Δηλαδή υπάρχει $u_0 \in T$ με $u_0 \leq v$ για κάθε $v \in T$.

$ii)$ Για κάθε $u \in T$ το σύνολο A_u είναι γραμμικά διατεταγμένο.

$iii)$ Για κάθε $u \in T$ το σύνολο $S_u = \{ w \in T \mid u < w$ και δεν υπάρχει $x \in T$ έτσι ώστε $u < x < w \}$ είναι πεπερασμένο.

Κατασκευάζουμε το εξής γράφημα X: Ορίζουμε $V(X) = T$ και σύνολο προσανατολισμένων ακμών $E_+(X) = \{ (u, v) \in T \times T$ με $v \in S_u \}$. Δείξτε ότι το X είναι δένδρο.

Έστω G μια ομάδα, η οποία δρα επί του X με την ιδιότητα να διατηρεί την διάταξη (αν $u, v \in T$ με $u \leq v$ τότε $gu \leq gv$, $g \in G$).

1) Να περιγράψετε την σταθεροποιούσα και την τροχιά μιας κορυφής $u \in T$.

2) Έστω $u, v \in T$ με $u \leq v$. Δείξτε ότι $Stab_G(u) \geq Stab_G(v)$.

3) Έστω $u_0 < u_1 < \cdots < u_n < \cdots$ μια άπειρη γνησίως αύξουσα κορυφών του X. Δείξτε ότι υπάρχει μια ακολουθία υποομάδων της G με $G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_i \geq G_{i+1} \geq \cdots$ με $[G_i : G_{i+1}] \leq \mid S_{u_{i+1}} \mid$.

4) Υποθέτουμε ότι υπάρχει κορυφή u με $Stab_G(u) = 1$. Τι συμπεραίνετε για την ομάδα G?