

Ασκήσεις Δ

1. Δείξτε ότι μια ελεύθερη ομάδα $F = \langle X \rangle$ είναι ελεύθερη στρέψης.
Είδικότερα, δείξτε ότι αν $1 \neq w \in F$, τότε $|w| < |w^2| < |w^3| < \dots$.
2. Έστω μια ελεύθερη ομάδα $F = \langle X \rangle$ και $v, w \in F$ με $v \cdot w = w \cdot v$. Δείξτε ότι υπάρχει $u \in F$ με την ιδιότητα $v = u^n$, $w = u^m$, όπου $n, m \in \mathbb{Z}$.
3. Έστω μια ελεύθερη ομάδα $F = \langle X \rangle$ και $v, w \in F$ με $v^n \cdot w^m = w^m \cdot v^n$. Δείξτε ότι $v \cdot w = w \cdot v$ και άρα υπάρχει $u \in F$ με την ιδιότητα $v = u^n$, $w = u^m$, όπου $n, m \in \mathbb{Z}$.
4. Έστω μια ελεύθερη ομάδα $F = \langle X \rangle$. Δείξτε ότι η κεντροποιούσα ενός μη τετριμμένου στοιχείου της είναι άπειρη κυκλική.
Κατά συνέπεια το κέντρο μια ελεύθερης ομάδας είναι τετριμμένο, εκτός και αν είναι η άπειρη κυκλική.
5. Έστω μια ελεύθερη ομάδα $F = \langle X \rangle$ και $1 \neq w \in F$. Δείξτε ότι η κανονικοποιούσα της κυκλικής ομάδας $\langle w \rangle$ είναι άπειρη κυκλική.
6. Έστω μια ελεύθερη ομάδα $F = \langle X \rangle$. Δείξτε ότι η μεταθετικότητα είναι μεταβατική. Δηλαδή αν $vw = wv$ και $wu = uw$, τότε $vu = uv$.
Δώστε ένα παράδειγμα ομάδας όπου η μεταθετικότητα δεν είναι μεταβατική.
7. Έστω G μια ομάδα, δείξτε ότι κάθε στοιχείο της μορφής $aba^{-1}b^{-1}$ με $a, b \in G$ είναι γινόμενο τετραγώνων.
8. Έστω G ομάδα και X ένα σύνολο γεννητόρων της. Έστω $K = \langle g^2 \mid g \in G \rangle$ και $H = \langle xyx^{-1}y^{-1}, z^2 \mid x, y, z \in X \rangle^G$. Δείξτε ότι $K = H$.
9. Έστω G μια ομάδα με n το πλήθος γεννήτορες και r το πλήθος ορίζουσες σχέσεις. Υποθέτουμε ότι $r < n$, δείξτε ότι η G είναι άπειρη ομάδα.
10. Έστω G και $N \triangleleft G$. Υποθέτουμε ότι το πηλίκο G/N είναι ελεύθερη ομάδα. Δείξτε ότι υπάρχει F ελεύθερη υποομάδα της G ώστε η G να διασπάται επί της N δια της F .
11. Ορισμός. Μια ομάδα P θα ονομάζεται προβολική αν για κάθε επιμορφισμό (τυχαίων) ομάδων $\beta : G \rightarrow H$ και κάθε $\alpha : P \rightarrow H$ ένας ομομορφισμός ομάδων, υπάρχει ομομορφισμός ομάδων $\gamma : P \rightarrow G$, ώστε $\beta\gamma = \alpha$.

Θα δούμε ότι αυτή η ιδιότητα είναι "ισοδύναμη" με τον ορισμό της ελεύθερης ομάδας. Προφανώς, κάθε ελεύθερη ομάδα είναι προβολική (Πρόταση 0.1.5).

"Αντίστροφα", έστω P μια προβολική ομάδα. Στην θέση της ομάδας H λαμβάνουμε την την P και στη θέση του ομομορφισμού α τον ταυτοτικό. Επίσης, επειδή η P μπορεί να θεωρηθεί ως πηλίκο μιας ελεύθερης ομάδας, στην θέση της G λαμβάνουμε μια ελεύθερη ομάδα, έστω F , της οποίας πηλίκο είναι η P και β τον αντίστοιχο επιμορφισμό. Τότε θα έχουμε ότι υπάρχει ομομορφισμός ομάδων $\gamma : P \rightarrow F$, ώστε $\beta\gamma = \alpha = 1_P$. Άρα η γ είναι αναγκαστικά 1-1. Οπότε υπάρχει υποομάδα, έστω R , της F ισόμορφη με την P ($R = \gamma(P)$). Τότε, επειδή $F/N \approx P$, (N είναι ο $\ker\beta$) έχουμε ότι $N \cap R = 1$ και συνεπώς η F είναι μια διασπαστική επέκταση επί της N δια της $R = \gamma(P)$, η οποία είναι ισόμορφη με την P .

Άρα αποδείξαμε ότι η P είναι μια αναίρεση μιας ελεύθερης ομάδας.

Για τους ισοδύναμους ορισμούς της αναίρεσης βλέπε την άσκηση 8 στην ομάδα ασκήσεων Γ .

12. Έστω F ελεύθερη ομάδα και H υποομάδα της πεπερασμένου δείκτη. Δείξτε ότι για κάθε άλλη μη τριμιμένη υποομάδα της F η τομή της με την H είναι μη τριμιμένη.