Ασκήσεις Α

Ορολογία: Έστω ότι η ομάδα G δρα επί του συνόλου X, τότε το σύνολο θα ονομάζεται G-σύνολο και μια απεικόνιση $\varphi : X \longrightarrow Y$ μεταξύ δύο G-συνόλων θα ονομάζεται G-απεικόνιση αν για κάθε $x \in X$ ισχύει: $g \cdot \varphi(x) = \varphi(g \cdot x)$ για κάθε $g \in G$ και $x \in X$. Ένα υποσύνολο Y ενός G-συνόλου θα ονομάζεται G-υποσύνολο, αν είναι G-σύνολο ως προς τον περιορισμό της δράσης της G στο σύνολο Y.

1. Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα, η οποία δρά πιστά στο πεπερασμένο σύνολο X, με τροχιές $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Υποθέτουμε ότι κάθε τροχιά έχει πληθικό αριθμό $\mid X_i \mid = n_i$. Δείξτε ότι η G μπορεί να εμφυτευθεί στην $S_{n_1} \times S_{n_2} \times \cdots \times S_{n_k}$.

2. Έστω V διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος F διάστασης n. Να μελετήσετε την δράση της πολλαπλασιαστικής ομάδος F^* του σώματος F επί του V (τροχιές, σταθεροποιούσες, ...). Είναι πιστή;

   Να εντρυφείσετε περισσότερο όταν το σώμα είναι πεπερασμένο.

3. Έστω G πεπερασμένη απλή ομάδα και H υποομάδα της δείκτου πρώτου αριθμού p. Δείξτε ότι ο p είναι ο μεγαλύτερος πρώτος διαιρέτης της G και ότι ο p^2 δεν διαιρεί την τάξη της G.

4. Ένα (μη κενό) G-σύνολο θα ονομάζεται *ανάγωγο* αν το μόνο (μη κενό) G-υποσύνολο είναι το X.

   (α΄) Έστω X ένα G-σύνολο. Δείξτε ότι οι τροχιές είναι τα μόνα ανάγωγα G-υποσύνολα του X. Δηλαδή η δράση είναι μεταβατική αν και μόνο αν το X είναι ανάγωγο.

   (β΄) Έστω φ μια G-απεικόνιση μεταξύ των G-συνόλων X και Y. Δείξτε ότι η εικόνα $Im\varphi$ είναι G-υποσύνολο του Y. Συνεπώς αν το Y είναι ανάγωγο, τότε αναγκαστικά η φ είναι επί.

   (γ΄) Έστω X ένα πεπερασμένο G-σύνολο. Δείξτε ότι το σύνολο, έστω S_X^G, των 1-1 και επί G-απεικονίσεων από το X στο X αποτελεί υποομάδα της S_X. Μάλιστα δε, αν το X είναι ανάγωγο, τότε $\mid S_X^G \mid \leq \mid X \mid$.

   (δ΄) Έστω G ομάδα και $H \leq G$. Αν X είναι το G-σύνολο των αριστερών συμπλόκων της H στην G, δείξτε ότι το X είναι ανάγωγο και $S_X^G \approx N_G(H)/H$.
   Υπόδειξη: Ορίζουμε την εξής απεικόνιση: $\vartheta : N_G(H) \longrightarrow S_X^G$ με $\vartheta(g) = \pi_g$, όπου $\pi_g(xH) = gxH$.
   Αποδεικνύουμε:
   1. Η ϑ είναι καλά ορισμένη.
   2. Η ϑ είναι ομομορφισμός ομάδων.
   3. Η ϑ είναι επί.
   4. $Ker\vartheta = H$.

   Τέλος

5. Έστω G πεπερασμένη ομάδα, η οποία δρα μεταβατικά επί του πεπερασμένου συνόλου X με $\mid X \mid = n$. Δείξτε ότι $\mid G \mid$ είναι πολλαπλάσιο του n. Δώστε ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε $\mid G \mid = n$.

6. Έστω G ομάδα με τάξη ίση με $2r$, όπου $r > 1$ περιττός. Έστω g ένα στοιχείο της G με τάξη ίση με 2 (*). Αν ϱ είναι η αναπαράσταση της G, δείξτε ότι $\varrho(g)$ είναι περιττή μετάθεση. Επομένως η G δεν είναι απλή ομάδα.

   (*) Δείξτε (χωρίς το Θεώρημα Sylow) ότι πράγματι υπάρχει στοιχείο τάξης 2.

7. Έστω $\mathbb{F}$ ένα σώμα με χαρακτηριστική διάφορο του 2 και $G = GL_n(\mathbb{F})$. Για $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, ορίζουμε T_i τον διαγώνιο πίνακα όπου τα i πρώτα στοιχεία της διαγωνίου είναι ίσα με 1 και τα υπόλοιπαίσα με -1. Δείξτε ότι κάθε στοιχείο τάξης 2 της ομάδας G είναι συζυγές με έναν από τους πίνακες T_i και ότι δύο πίνακες T_i, T_j δεν είναι συζυγείς μεταξύ τους.

8. Έστω G μια ομάδα με $k(G)$ θα συμβολίζουμε τον αριθμό των κλάσεων συζυγίας της.

   (α΄) Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και p ο μικρότερος πρώτος διαιρέτης της τάξης της G. Υποθέτουμε ότι $k(G) > \mid G \mid /p$, δείξτε ότι $Z(G) \neq 1$.

   (β΄) Έστω G πεπερασμένη μη αβελιανή ομάδα.
   Δείξτε ότι $k(G) > \mid Z(G) \mid +1$.
   Αν $\mid G \mid = p^3$, p-πρώτος, δείξτε ότι $\mid Z(G) \mid = p$ και
   $k(G) = p^2 + p - 1$.
   Αν $H \lhd G$, δείξτε ότι $k(G/H) \leq k(G) - j + 1$, όπου j είναι ο αριθμός των G-κλάσεων συζυγίας των στοιχείων της H.
   Αν το πηλίκο $G/Z(G)$ είναι αβελιανή ομάδα, τότε
   $k(G) \geq \mid G/Z(G) \mid + \mid Z(G) \mid -1$.
   Αν ο $k(G)$ είναι άρτιος, τότε η τάξη της G είναι άρτια. Δώστε παράδειγμα όπου το αντίστροφο δεν ισχύει.

9. (Θεώρημα του Cauchy) Έστω G πεπερασμένη ομάδα και p ένας πρώτος διαιρέτης της τάξης της G. Δείξτε ότι υπάρχει στοιχείο της G με τάξη ίση με p.

   (Η απόδειξη να γίνει χωρίς το Θεώρημα του Sylow.)