Στη σελίδα αυτή γράψτε μόνο τα στοιχεία σας.

Γράψτε τις απαντήσεις σας στις επόμενες σελίδες, κάτω από τις αντίστοιχες ερωτήσεις. Στις απαντήσεις σας μην ξεπερνάτε, για οποιοδήποτε λόγο, τα καθορισμένα όρια αριθμού γραμμών. Σελίδες για πρόχειρο θα σας δοθούν χωριστά.

Γράψτε τον ΑΜ σας σε όλες τις σελίδες (και ονοματεπώνυμο και ΑΜ στο πρόχειρο).

Επώνυμο:

Όνομα:

ΑΜ:													

Βαθμοί

1	2	3	Σύνολο

Καλη Επιτυχια

Μη γράφετε στο πίσω μέρος της σελίδας

Θέμα 1 [3.5 μονάδες] Στοιχειώδης συνδυαστική: Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να τοποθετήσουμε $2t+1$ **μη** διακεκριμένες μπάλες σε 4 διακεκριμένα κουτιά έτσι ώστε κανένα κουτί να μην περιέχει περισσότερες μπάλες από τα άλλα τρία μαζί. **Να λύσετε την άσκηση χωρίς χρήση ΓΣ.** *Υπόδειξη:* Από όλους τους δυνατούς τρόπους τοποθέτησης αφαιρέστε τους μη επιθυμητούς. Μην κάνετε πράξεις, απλώς σημειώστε τι χρειάζεται να αφαιρεθεί από τι.

Απάντηση: Ο συνολικός αριθμός τοποθέτησης των μπαλών χωρίς περιορισμούς, αφού πρόκειται για μη διακεκριμένες μπάλες, είναι:

$$\binom{2t+1+4-1}{3}.$$

Αν ένα κουτί περιέχει περισσότερες μπάλες από τα άλλα τρία μαζί, θα πρέπει να περιέχει $\geq t+1$ μπάλες. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε συγκεκριμενοποιήσει ποιο κουτί έχει τις $\geq t+1$ μπάλες· για να βρούμε με πόσους τρόπους μπορεί να συμβεί αυτό ρίχνουμε $t+1$ μπάλες σε αυτό το κουτί, και στη συνέχεια ρίχνουμε αυθαιρέτως τις υπόλοιπες t σε όλα τα κουτιά. Αυτό μπορεί να συμβεί κατά

$$\binom{t+4-1}{3}$$

τρόπους. Υπάρχουν όμως συνολικά 4 κουτιά που δεν πρέπει να πάρουν $\geq t+1$ μπάλες. Επομένως η απάντηση είναι

$$\binom{2t+1+4-1}{3} - 4\binom{t+4-1}{3} = \binom{2t+4}{3} - 4\binom{t+3}{3}.$$

Θέμα 2 [3.5 μονάδες] Γεννήτριες συναρτήσεις: Να αποδείξετε τον τύπο:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Υπόδειξη: Πολλαπλασιάστε και τα δύο μέλη με z^m και προσθέστε για $m = 0 \ldots \infty$. Στη συνέχεια στο αριστερό μέλος αλλάξτε τη σειρά των αθροισμάτων. Χρησιμοποιήστε γνωστές ΓΣ, προσέχοντας τα άκρα.

Απάντηση: Αν κάνουμε ό,τι λέει η υπόδειξη, παίρνουμε αριστερά:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{\infty} \binom{k}{m} z^m = \sum_{k=0}^{n} (1+z)^k = \frac{(1+z)^{n+1}-1}{1+z-1} = \frac{(1+z)^{n+1}-1}{z}. \quad (1)$$

Δεξιά παίρνουμε:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \binom{n+1}{m+1} z^m = \frac{1}{z} \sum_{m0}^{\infty} \binom{n+1}{m+1} z^{m+1}$$
$$= \frac{1}{z} \sum_{m=1}^{\infty} \binom{n+1}{m} z^m = \frac{1}{z}((1+z)^{n+1}-1). \quad (2)$$

Από τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει ότι αν θεωρήσουμε τα $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m}$ και $\binom{n+1}{m+1}$ ως ακολουθίες ως προς m, έχουν την ίδια ΓΣ, άρα είναι ίσα.

Θέμα 3 [3.5 μονάδες] Θεώρημα Hall: Σε ένα διμερή γράφο με μέρη A, B, κάθε κορυφή $u \in A$ έχει **τουλάχιστον** δύο γείτονες και κάθε κορυφή $v \in B$ έχει **το πολύ** δύο γείτονες. Να αποδείξετε ότι υπάρχει αντιστοίχιση (ταίριασμα) που καλύπτει όλες τις κορυφές του A (ενδεχομένως να μην καλύπτονται όλες οι κορυφές του B). *Υπόδειξη:* Αποδείξτε ότι $\forall S \subseteq A, |\Gamma(S)| \geq |S|$ ($\Gamma(S)$ συμβολίζει το σύνολο των γειτόνων του S). Για να το αποδείξετε, υπολογίστε άνω και κάτω φράγμα για τον αριθμό των ακμών μεταξύ S και $\Gamma(S)$· για το κάτω φράγμα χρησιμοποιήστε ότι κάθε στοιχείο του S έχει τουλάχιστον δύο γείτονες, παρομοίως, αλλά για το $\Gamma(S)$, για το άνω φράγμα. Να είστε σύντομοι και ακριβείς.

Απάντηση: Επειδή κάθε στοιχείο του S συνδέεται με δύο τουλάχιστον στοιχεία του $\Gamma(S)$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον $2|S|$ ακμές μεταξύ των S και $\Gamma(S)$. Επειδή κάθε στοιχείο του $\Gamma(S)$ συνδέεται με το πολύ δύο στοιχεία του A, άρα και του S, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν το πολύ $2|\Gamma(S)|$ ακμές μεταξύ των S και $\Gamma(S)$. Επομένως $2|S| \leq 2|\Gamma(S)|$, άρα $|S| \leq |\Gamma(S)|$, επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Hall.