
Διακριτά Μαθηματικά
Σημειώσεις

ΧΡΗΣΤΟΣ Α. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2013

Περιεχόμενα

1	Στοιχειώδης συνδυαστική απαρίθμησης	7
1.1	Πληθικός αριθμός	7
1.2	Βασικές αρχές απαρίθμησης	8
1.3	Εφαρμογές	12
1.3.1	Αναδιατάξεις	13
1.3.2	Υποσύνολα και συνδυασμοί	15
1.3.3	Συνθέσεις ακεραίων	18
1.3.4	Συνδυασμοί με επανάληψη	19
1.4	Η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού	20
1.4.1	Επί απεικονίσεις	22
1.4.2	Αναδιατάξεις χωρίς σταθερά σημεία	24
1.5	Ασκήσεις	25
2	Απεικονίσεις, διαμερίσεις συνόλων και μερικές διατάξεις	41
2.1	Η αρχή του περιστερώνα	41
2.2	Διαμερίσεις και σχέσεις ισοδυναμίας	44
2.3	Μερικές διατάξεις	46
2.4	Αλυσίδες και αντιαλυσίδες	49
2.5	Το Θεώρημα του Sperner	52
2.6	Ασκήσεις	54
3	Γραφήματα	67
3.1	Η έννοια του γραφήματος	67
3.2	Περίπατοι και συνεκτικότητα	71
3.3	Δένδρα	73
3.3.1	Ορισμοί και ιδιότητες	73
3.3.2	Το Θεώρημα Cayley–Sylvester	76
3.3.3	Δένδρα με ρίζα	78
3.4	Χρωματισμοί και ταιριάσματα	81
3.4.1	Ο χρωματικός αριθμός	81

3.4.2	Διμερή γραφήματα	83
3.4.3	Το Θεώρημα του Γάμου	85
3.5	Το χρωματικό πολώνυμο	90
3.6	Επίπεδα γραφήματα	97
3.7	Ασκήσεις	100
4	Γεννήτριες Συναρτήσεις	123
4.1	Ορισμοί και παραδείγματα	123
4.1.1	Οι αριθμοί Fibonacci	123
4.1.2	Τυπικές δυναμοσειρές	125
4.1.3	Συνθέσεις ακεραίων	130
4.2	Διαμερίσεις ακεραίων	133
4.3	Εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις	136
4.4	Ασκήσεις	139
5	Παράρτημα	151

Προαπαιτούμενα

Θεωρούμε γνωστές στοιχειώδεις έννοιες της θεωρίας συνόλων, όπως τις έννοιες του εγκλεισμού συνόλων $A \subseteq B$, της ένωσης, της τομής και του καρτεσιανού γινομένου (πεπερασμένου πλήθους) συνόλων, καθώς και την έννοια της απεικόνισης συνόλων και εκείνης της σύνθεσης απεικονίσεων. Θεωρούμε επίσης γνωστές βασικές ιδιότητες των φυσικών, ακεραίων, ρητών και πραγματικών αριθμών και της φυσικής διάταξης στα σύνολα αυτά. Στο παράρτημα που δίνεται στο τέλος των σημειώσεων υπενθυμίζουμε την αρχή της πεπερασμένης μαθηματικής επαγωγής καθώς και την έννοια της διαιρετότητας στο σύνολο των ακεραίων, η οποία περιστασιακά θα μας φανεί χρήσιμη.

Συμβολισμοί

Θα χρησιμοποιήσουμε τους εξής συμβολισμούς:

\emptyset : το κενό σύνολο

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$: το σύνολο των φυσικών αριθμών

\mathbb{Z} : το σύνολο των ακεραίων

$\mathbb{Z}_{>0} = \{1, 2, \dots\}$: το σύνολο των θετικών ακεραίων

\mathbb{Q} : το σύνολο των ρητών

\mathbb{R} : το σύνολο των πραγματικών

$[n]$: το σύνολο $\{1, 2, \dots, n\}$.

Θα γράφουμε $A \subseteq B$ αν το σύνολο A περιέχεται στο σύνολο B και $A \subset B$, όταν $A \subseteq B$ και αποκλείεται η ισότητα. Θα συμβολίζουμε με $A \setminus B$ ή με $A - B$ τη διαφορά $\{x \in A : x \notin B\}$ του συνόλου B από το σύνολο A . Για απεικόνιση συνόλων $f : A \rightarrow B$ και υποσύνολα $C \subseteq A$ και $D \subseteq B$, θα συμβολίζουμε με $f(C)$ την εικόνα του C και με $f^{-1}(D)$ την αντίστροφη εικόνα του D , μέσω της f , δηλαδή

$$\circ f(C) = \{f(x) : x \in C\},$$

$$\circ f^{-1}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\}.$$

Θα γράφουμε απλούστερα $f^{-1}(y)$ για την αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(\{y\})$ ενός υποσυνόλου $\{y\}$ του B με ένα μόνο στοιχείο, οπότε $f^{-1}(y) = \{x \in A : f(x) = y\}$.

Κεφάλαιο 1

Στοιχειώδης συνδυαστική απαρίθμησης

Το κύριο πρόβλημα της απαριθμητικής συνδυαστικής είναι η καταμέτρηση των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου. Προβλήματα αυτού του είδους εμφανίζονται σε ένα ευρύτατο φάσμα των σύγχρονων μαθηματικών. Οι πλούσιες τεχνικές που έχουν αναπτυχθεί για τη λύση τους αποτελούν σημαντικό μέρος των μεθόδων που χρησιμοποιούνται στα διακριτά μαθηματικά. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε βασικές αρχές απαρίθμησης και θα τις εφαρμόσουμε σε στοιχειώδη προβλήματα. Σημαντική έννοια για τη μελέτη μας είναι αυτή της αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης (1-1 αντιστοιχίας) πεπερασμένων συνόλων.

1.1 Πληθικός αριθμός

Πρωταρχική έννοια για τη μελέτη των προβλημάτων με τα οποία θα ασχοληθούμε στο κεφάλαιο αυτό είναι αυτή της αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης συνόλων.

Ορισμός 1.1.1 *Μια απεικόνιση συνόλων $\varphi : A \rightarrow B$ λέγεται αμφιμονοσήμαντη (ή 1-1 αντιστοιχία, ή 1-1 και επί απεικόνιση) αν για κάθε στοιχείο y του B υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του A , τέτοιο ώστε $\varphi(x) = y$.*

Ισοδύναμα, η απεικόνιση $\varphi : A \rightarrow B$ είναι αμφιμονοσήμαντη αν και μόνο αν υπάρχει απεικόνιση $\psi : B \rightarrow A$ τέτοια ώστε η σύνθεση $\psi \circ \varphi$ να είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο A και η $\varphi \circ \psi$ να είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο B , δηλαδή τέτοια ώστε $\psi(\varphi(x)) = x$ για κάθε $x \in A$ και $\varphi(\psi(y)) = y$ για κάθε $y \in B$. Στην περίπτωση αυτή, καθεμιά από τις φ, ψ λέγεται *αντίστροφη απεικόνιση της άλλης*. Παρατηρούμε ότι η σύνθεση δύο αμφιμονοσήμαντων απεικονίσεων είναι επίσης αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Αν $A = \{a, b, c\}$, όπου a, b, c είναι διαφορετικά ανά δύο στοιχεία του A και $B = \{1, 2, 3\}$, τότε η απεικόνιση $\varphi : A \rightarrow B$ με $\varphi(a) = 3, \varphi(b) = 1, \varphi(c) = 2$ είναι αμφιμονοσήμαντη, με αντίστροφη απεικόνιση την $\psi : B \rightarrow A$ με $\psi(1) = b, \psi(2) = c, \psi(3) = a$. \square

Ορισμός 1.1.2 Ένα σύνολο S λέγεται πεπερασμένο αν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ και αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : S \rightarrow [m]$, όπου $[0] := \emptyset$. Ο ακέραιος m λέγεται πληθικός αριθμός, ή πλήθος των στοιχείων, του S και συμβολίζεται με $\#S$.

Ο ακέραιος αυτός είναι μοναδικός για το συγκεκριμένο σύνολο S . Πράγματι, αν υπήρχαν αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις $f : S \rightarrow [m]$ και $g : S \rightarrow [n]$ για διακεκριμένους ακεραίους m, n , τότε συνθέτοντας την f με την αντίστροφη της g προκύπτει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των συνόλων $[n]$ και $[m]$, πράγμα το οποίο (δεχόμεστε ως γνωστό ότι) είναι αδύνατο.

1.2 Βασικές αρχές απαρίθμησης

Αρχίζουμε με τις ακόλουθες απλές αλλά θεμελιώδεις αρχές απαρίθμησης.

Πρόταση 1.2.1 Αν $\varphi : A \rightarrow B$ είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση πεπερασμένων συνόλων, τότε $\#A = \#B$.

Απόδειξη. Έστω $\#B = m$, οπότε υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : B \rightarrow [m]$. Η σύνθεση $f \circ \varphi : A \rightarrow [m]$ είναι επίσης αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση και συνεπώς $\#A = m$. \square

Πρόταση 1.2.2 (Προσθετική Αρχή) Αν A_1, A_2, \dots, A_n είναι πεπερασμένα σύνολα ανά δύο ξένα μεταξύ τους (δηλαδή $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$), τότε

$$\# \bigcup_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \#A_i.$$

Απόδειξη. Η περίπτωση $n = 1$ είναι τετριμμένη. Έστω ότι $n = 2$ και ότι $\#A_1 = m_1, \#A_2 = m_2$. Τότε υπάρχουν αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις $f_1 : A_1 \rightarrow [m_1]$ και $f_2 : A_2 \rightarrow [m_2]$. Από αυτές ορίζεται η απεικόνιση $f : A_1 \cup A_2 \rightarrow [m_1 + m_2]$ με

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{αν } x \in A_1 \\ f_2(x) + m_1, & \text{αν } x \in A_2. \end{cases}$$

Αφήνεται στον αναγνώστη να επαληθεύσει ότι η απεικόνιση f είναι επίσης αμφιμονοσήμαντη και συνεπώς ότι ισχύει

$$\#(A_1 \cup A_2) = m_1 + m_2 = (\#A_1) + (\#A_2).$$

Για τη γενική περίπτωση χρησιμοποιούμε επαγωγή στο n . □

Ας εφαρμόσουμε τις αρχές αυτές σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.2.1 Έστω a_n το πλήθος των υποσυνόλων του $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Για $n = 1, 2, 3$ έχουμε $a_n = 2, 4, 8$, αντίστοιχα. Για παράδειγμα, τα τέσσερα υποσύνολα του $\{1, 2\}$ είναι τα \emptyset , $\{1\}$, $\{2\}$ και $\{1, 2\}$. Θα δείξουμε ότι ισχύει $a_n = 2^n$ για κάθε n .

Πρώτη απόδειξη. Έστω A_n το σύνολο των υποσυνόλων (δυναμοσύνολο) του $[n]$ και έστω $B_n = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$. Για $S \subseteq [n]$ θέτουμε

$$\varphi(S) = \epsilon_1 + \epsilon_2 2 + \epsilon_3 2^2 + \dots + \epsilon_n 2^{n-1},$$

όπου

$$\epsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } i \in S \\ 0, & \text{αν } i \notin S. \end{cases}$$

Για παράδειγμα αν $n = 4$ και $S = \{2, 4\}$, τότε $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 0$ και $\epsilon_2 = \epsilon_4 = 1$ και συνεπώς $\varphi(S) = 0 + 2 + 0 + 2^3 = 10$. Παρατηρούμε ότι $\varphi(S) \in B_n$ για κάθε $S \subseteq [n]$, οπότε έχουμε ορίσει μια απεικόνιση $\varphi : A_n \rightarrow B_n$. Από την Πρόταση 5.0.3 προκύπτει ότι κάθε $y \in B$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $y = \epsilon_1 + \epsilon_2 2 + \dots + \epsilon_n 2^{n-1}$, όπου $\epsilon_i \in \{0, 1\}$ για $1 \leq i \leq n$. Κατά συνέπεια υπάρχει μοναδικό υποσύνολο S του $[n]$ με $\varphi(S) = y$, συγκεκριμένα το σύνολο $S = \{i \in [n] : \epsilon_i = 1\}$. Επομένως η απεικόνιση φ είναι αμφιμονοσήμαντη και από την Πρόταση 1.2.1 προκύπτει ότι $\#A_n = \#B_n = 2^n$ για κάθε n . □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Αν $n = 3$, τότε η απεικόνιση φ της προηγούμενης απόδειξης είναι η παρακάτω:

$$\begin{array}{ll} \emptyset \mapsto 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2^2 = 0 & \{3\} \mapsto 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 = 4 \\ \{1\} \mapsto 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2^2 = 1 & \{1, 3\} \mapsto 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 = 5 \\ \{2\} \mapsto 0 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2^2 = 2 & \{2, 3\} \mapsto 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 = 6 \\ \{1, 2\} \mapsto 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2^2 = 3 & \{1, 2, 3\} \mapsto 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 = 7 \end{array}$$

□

Δεύτερη απόδειξη. Έστω πάλι A_n το σύνολο των υποσυνόλων του $[n]$. Για $T \subseteq [n]$ έχουμε είτε $n \notin T$, είτε $n \in T$. Συνεπώς, θέτοντας $B_n = \{T \subseteq [n] : n \in T\}$, έχουμε $A_n = A_{n-1} \cup B_n$ και $A_{n-1} \cap B_n = \emptyset$. Από την Πρόταση 1.2.2 προκύπτει ότι

$$a_n = a_{n-1} + \#B_n.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι υπάρχει η εμφανής 1-1 αντιστοιχία $\varphi : A_{n-1} \rightarrow B_n$ με $\varphi(S) = S \cup \{n\}$ για $S \in A_{n-1}$. Συνεπώς, από την Πρόταση 1.2.1 έχουμε $\#B_n = \#A_{n-1} = a_{n-1}$. Συμπεραίνουμε ότι $a_n = 2a_{n-1}$, από όπου ο τύπος $a_n = 2^n$ προκύπτει με επαγωγή στο n . \square

Από τις προηγούμενες αποδείξεις, η πρώτη χρησιμοποιεί μόνο τη θεμελιώδη αρχή της Πρότασης 1.2.1 αλλά απαιτεί περισσότερη ευρηματικότητα. Λέμε ότι μια τέτοια απόδειξη βασίζεται στην *τεχνική της 1-1 αντιστοιχίας*. Η δεύτερη απόδειξη μπορεί να περιγραφεί διαφορετικά ως εξής. Κάθε στοιχείο $T \subseteq [n]$ του A_n προκύπτει με δύο δυνατούς τρόπους από ένα στοιχείο $S \subseteq [n-1]$ του A_{n-1} , καθώς μπορούμε να επιλέξουμε αν θα συμπεριλάβουμε το n στο S ή όχι για να πάρουμε το T . Ομοίως, κάθε στοιχείο S του A_{n-1} προκύπτει με έναν από δύο τρόπους από ένα στοιχείο R του A_{n-2} , επιλέγοντας αν θα συμπεριλάβουμε το $n-1$ στο R ή όχι και ούτω καθεξής. Τέλος, έχουμε δύο επιλογές (τις \emptyset και $\{1\}$) για τα στοιχεία του A_1 . Έτσι υπάρχουν συνολικά 2^n στοιχεία του A_n . Γενικότερα, αν ένα σύνολο A_n κατασκευάζεται σε n στάδια, στα οποία κατασκευάζονται διαδοχικά τα σύνολα A_1, A_2, \dots, A_n , και υπάρχουν θετικοί ακέραιοι m_2, \dots, m_n τέτοιοι ώστε στο στάδιο i , κάθε στοιχείο του A_i προκύπτει από κάποιο (οποιοδήποτε) στοιχείο του A_{i-1} με m_i διαφορετικούς δυνατούς τρόπους, τότε $\#A_n = m_1 m_2 \cdots m_n$, όπου $m_1 = \#A_1$. Ο συλλογισμός αυτός λέγεται *πολλαπλασιαστική αρχή* και εκφράζεται ακριβέστερα στη μεθεπόμενη πρόταση. Η αμέσως επόμενη πρόταση γενικεύει την Πρόταση 1.2.1.

Πρόταση 1.2.3 Έστω μια απεικόνιση πεπερασμένων συνόλων $f : A \rightarrow B$ και $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Αν για κάθε $y \in B$ υπάρχουν ακριβώς m το πλήθος $x \in A$ με $f(x) = y$, τότε $\#A = m \cdot (\#B)$.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε το συμβολισμό $f^{-1}(y) = \{x \in A : f(x) = y\}$ για $y \in B$. Παρατηρούμε ότι το A γράφεται ως η ένωση

$$A = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(y)$$

των ξένων ανά δύο υποσυνόλων του της μορφής $f^{-1}(y)$. Υπάρχουν $\#B$ το πλήθος τέτοια υποσύνολα και, σύμφωνα με την υπόθεση της πρότασης, το καθένα από αυτά έχει m στοιχεία. Το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση 1.2.2. \square

Πρόταση 1.2.4 (Πολλαπλασιαστική Αρχή) Έστω A_1, A_2, \dots, A_n πεπερασμένα σύνολα, $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ με $\#A_1 = m_1$ και απεικονίσεις $f_i : A_i \rightarrow A_{i-1}$ για $2 \leq i \leq n$. Αν για κάθε $2 \leq i \leq n$ και $y \in A_{i-1}$ υπάρχουν ακριβώς m_i το πλήθος στοιχεία x του A_i με $f_i(x) = y$, τότε $\#A_n = m_1 m_2 \cdots m_n$.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 1.2.3 στις απεικονίσεις $f_i : A_i \rightarrow A_{i-1}$ παίρνουμε $\#A_i = m_i (\#A_{i-1})$ για $2 \leq i \leq n$. Επομένως $\#A_n = m_n (\#A_{n-1}) = m_n m_{n-1} (\#A_{n-2}) = \cdots = m_n m_{n-1} \cdots m_2 (\#A_1) = m_1 m_2 \cdots m_n$. \square

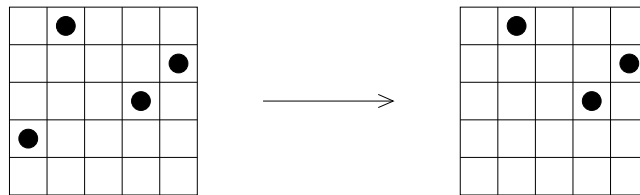
Παράδειγμα 1.2.2 Για θετικούς ακεραίους i , έστω A_i το σύνολο των υποσυνόλων του $[i]$, όπως στο Παράδειγμα 1.2.1. Για $i \geq 2$ έστω η απεικόνιση $f_i : A_i \rightarrow A_{i-1}$ με $f_i(S) = S \setminus \{i\}$ για $S \subseteq [i]$, δηλαδή

$$f_i(S) = \begin{cases} S, & \text{αν } i \notin S \\ S \setminus \{i\}, & \text{αν } i \in S. \end{cases}$$

Οι υποθέσεις της Πρότασης 1.2.4 ικανοποιούνται με $m_i = 2$ για κάθε i και συνεπώς $\#A_n = 2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. \square

Παράδειγμα 1.2.3 Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν n όμοια πιόνια στα τετράγωνα μιας $n \times n$ σκακιέρας, ώστε να μην υπάρχουν δύο ή περισσότερα πιόνια στην ίδια γραμμή ή στήλη (πιόνια με την ιδιότητα αυτή λέγονται μη αλληλεπιτιθέμενα);

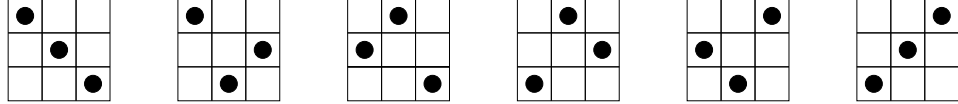
Παρατηρούμε ότι κάθε γραμμή της σκακιέρας πρέπει να περιέχει ακριβώς ένα πιόνι. Έστω $1, 2, \dots, n$ οι γραμμές της σκακιέρας, αριθμημένες από πάνω προς τα κάτω. Για $1 \leq i \leq n$, έστω A_i το σύνολο με στοιχεία τα σύνολα i τετραγώνων της $n \times n$ σκακιέρας (τα τετράγωνα στα οποία τοποθετούνται τα πιόνια), ένα σε καθεμιά από τις γραμμές $1, 2, \dots, i$ και ανά δύο σε διαφορετικές στήλες. Έχουμε $\#A_1 = n$ και ζητάμε να απαριθμήσουμε τα στοιχεία του A_n . Για $2 \leq i \leq n$, έστω $f_i : A_i \rightarrow A_{i-1}$ η απεικόνιση για την οποία για $x \in A_i$, το $f_i(x)$ είναι το σύνολο που προκύπτει από το x διαγράφοντας το τετράγωνο της γραμμής i που ανήκει στο x . Ένα παράδειγμα δίνεται στο Σχήμα 1.1. Η υπόθεση της Πρότασης 1.2.4 ικανοποιείται με $m_i = n - i + 1$, διότι για κάθε $y \in A_{i-1}$ υπάρχουν ακριβώς $n - i + 1$ τετράγωνα της γραμμής i , η στήλη των οποίων δεν περιέχει κανένα από τα $i - 1$ τετράγωνα του y . Προκύπτει ότι $\#A_n = m_1 m_2 \cdots m_n = n!$. Στο Σχήμα 1.2 απεικονίζονται οι δυνατές τοποθετήσεις για $n = 3$.



Σχήμα 1.1: Παράδειγμα για την απεικόνιση f_i με $n = 5$ και $i = 4$.

Με απλούστερα λόγια, ο παραπάνω συλλογισμός εκφράζεται ως εξής: Τοποθετούμε τα πιόνια διαδοχικά στις γραμμές $1, 2, \dots, n$. Για την πρώτη γραμμή έχουμε n επιλογές, όσα τα τετράγωνα της γραμμής αυτής, για να τοποθετήσουμε το πρώτο πιόνι. Με δεδομένη την επιλογή αυτή, για τη δεύτερη γραμμή έχουμε $n - 1$ επιλογές για να τοποθετήσουμε το δεύτερο πιόνι, ώστε το τετράγωνο της δεύτερης γραμμής το οποίο βρίσκεται στην ίδια στήλη με το πρώτο πιόνι να μείνει κενό. Για την τρίτη

γραμμή έχουμε $n - 2$ επιλογές και ούτω καθεξής, ενώ για την τελευταία γραμμή μένει μια μοναδική επιλογή. Συνεπώς υπάρχουν συνολικά $n(n - 1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ τέτοιες τοποθετήσεις. \square



Σχήμα 1.2: Οι έξι τοποθετήσεις μη αλληλεπιτιθέμενων πιονιών για $n = 3$.

Στο εξής, για λόγους απλότητας, όταν εφαρμόζουμε την πολλαπλασιαστική αρχή θα χρησιμοποιούμε συνήθως επιχειρήματα ανάλογα του δεύτερου επιχειρήματος στο Παράδειγμα 1.2.3, αφήνοντας στον αναγνώστη τη μετάφρασή τους στην ακριβέστερη γλώσσα της Πρότασης 1.2.4.

Υπενθυμίζουμε ότι το καρτεσιανό γινόμενο $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ των συνόλων A_1, A_2, \dots, A_n είναι το σύνολο που αποτελείται από τις ακολουθίες (a_1, a_2, \dots, a_n) , με $a_i \in A_i$ για κάθε i .

Πόρισμα 1.2.1 Για το καρτεσιανό γινόμενο πεπερασμένων συνόλων A_1, A_2, \dots, A_n ισχύει

$$\# A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \prod_{i=1}^n \# A_i.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $B_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_i$ και $m_i = \# A_i$ για $i \in [n]$, οπότε ζητάμε να δείξουμε ότι $\# B_n = m_1 m_2 \cdots m_n$. Για $2 \leq i \leq n$ ορίζουμε την απεικόνιση $f_i : B_i \rightarrow B_{i-1}$ θέτοντας

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_i) = (x_1, \dots, x_{i-1})$$

για $(x_1, x_2, \dots, x_i) \in B_i$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $y \in B_{i-1}$ υπάρχουν ακριβώς m_i το πλήθος στοιχεία $x \in B_i$ με $f_i(x) = y$, όσα είναι τα στοιχεία $x_i \in A_i$. Το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση 1.2.4. \square

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Θέτοντας $A_1 = \cdots = A_n = \{0, 1\}$ στο Πόρισμα 1.2.1 παίρνουμε $\#\{0, 1\}^n = 2^n$. \square

1.3 Εφαρμογές

Ας εφαρμόσουμε τις αρχές της Παραγράφου 1.2 σε μερικά ακόμη στοιχειώδη προβλήματα απαρίθμησης.

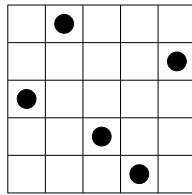
1.3.1 Αναδιατάξεις

Αναδιάταξη ενός συνόλου S με n στοιχεία λέγεται μία ακολουθία $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, στην οποία κάθε στοιχείο του S εμφανίζεται ακριβώς μία φορά. Για παράδειγμα, το σύνολο $[3] = \{1, 2, 3\}$ έχει τις εξής έξι αναδιατάξεις: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ και $(3, 2, 1)$. Μία αναδιάταξη του συνόλου $[5]$ είναι η $(4, 2, 5, 1, 3)$.

Πόσες είναι οι αναδιατάξεις του S για τυχαίο πεπερασμένο σύνολο S ;

Πρόταση 1.3.1 Το πλήθος των αναδιατάξεων ενός συνόλου με n στοιχεία είναι ίσο με $n!$.

Απόδειξη. Έστω σύνολο S με n στοιχεία. Υπάρχουν n επιλογές για το στοιχείο σ_1 μιας αναδιάταξης $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ του S . Με αυτό ως δεδομένο, υπάρχουν $n - 1$ επιλογές για το $\sigma_2 \in S$ ώστε $\sigma_2 \neq \sigma_1$, υπάρχουν $n - 2$ επιλογές για το $\sigma_3 \in S$ ώστε $\sigma_3 \neq \sigma_1, \sigma_2$ και ούτω καθεξής και τελικά υπάρχει μία επιλογή για το $\sigma_n \in S$ ώστε $\sigma_n \neq \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$. Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν συνολικά $n(n - 1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ αναδιατάξεις του S . \square



Σχήμα 1.3: Πέντε μη αλληλεπιτιθέμενα πιόνια.

Παρατήρηση 1.3.1 Από την Πρόταση 1.3.1 και το Παράδειγμα 1.2.3 προκύπτει ότι οι αναδιατάξεις του $[n]$ είναι τόσες όσες οι τοποθετήσεις n μη αλληλεπιτιθέμενων ομοίων πιονιών στα τετράγωνα μιας $n \times n$ σκακιέρας. Μια απευθείας απόδειξη της παρατήρησης αυτής από τη θεμελιώδη αρχή της Πρότασης 1.2.1 είναι η εξής: Έστω A_n και B_n τα σύνολα των αναδιατάξεων του $[n]$ και τοποθετήσεων των n πιονιών αντίστοιχα, όπως παραπάνω. Ας αριθμήσουμε γραμμές και στήλες της σκακιέρας ως $1, 2, \dots, n$ από πάνω προς τα κάτω και από αριστερά προς τα δεξιά. Για $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in A_n$, έστω $\varphi(\sigma)$ η τοποθέτηση στην οποία υπάρχει ένα πιόνι στο τετράγωνο στο οποίο συναντώνται η γραμμή i και στήλη σ_i για κάθε $1 \leq i \leq n$. Για $n = 3$ οι αναδιατάξεις του $[3]$, με τη σειρά που εμφανίζονται στο προηγούμενο παράδειγμα, απεικονίζονται με τη φ στις τοποθετήσεις του Σχήματος 1.2. Για $n = 5$, η αναδιάταξη $(2, 5, 1, 3, 4)$ απεικονίζεται στην τοποθέτηση που φαίνεται στο Σχήμα 1.3. Από τον ορισμό της αναδιάταξης προκύπτει ότι $\varphi(\sigma) \in B_n$ για κάθε $\sigma \in A_n$ και ότι η απεικόνιση $\varphi : A_n \rightarrow B_n$ είναι αμφιμονοσήμαντη. Έπεται ότι $\#A_n = \#B_n$. \square

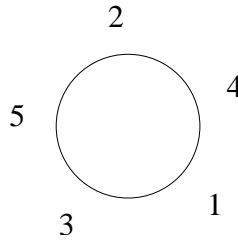
Μια ακολουθία $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ στοιχείων συνόλου S , στην οποία κάθε στοιχείο του S εμφανίζεται το πολύ μία φορά, θα λέγεται k -αναδιάταξη του S . Προφανώς αν $k = \#S$, τότε οι k -αναδιατάξεις του S ταυτίζονται με τις αναδιατάξεις του S . Για παράδειγμα, οι k -αναδιατάξεις του $[3]$ για $k = 2$ είναι οι $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$ και $(3, 2)$. Για $k = 3$, μια k -αναδιατάξη του $[5]$ είναι η $(2, 5, 1)$.

Η επόμενη πρόταση γενικεύει την Πρόταση 1.3.1.

Πρόταση 1.3.2 Έστω σύνολο S με n στοιχεία. Το πλήθος των k -αναδιατάξεων του S είναι ίσο με $n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

Απόδειξη. Σκεπτόμενοι όπως στην απόδειξη της Πρότασης 1.3.1, έχουμε n επιλογές για το στοιχείο σ_1 μιας k -αναδιατάξης $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ του S , $n-1$ επιλογές για το σ_2 ώστε $\sigma_2 \neq \sigma_1$ και ούτω καθεξής και τελικά $n-k+1$ επιλογές για το σ_k ώστε $\sigma_k \neq \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$. Το ζητούμενο προκύπτει από την πολλαπλασιαστική αρχή. \square

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Υπάρχουν $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ διατεταγμένες τριάδες διαφορετικών ανά δύο στοιχείων του $[5]$. \square



Σχήμα 1.4: Μια κυκλική αναδιάταξη του $[5]$.

Παράδειγμα 1.3.1 (Κυκλικές αναδιατάξεις) Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν κυκλικά σε ένα τραπέζι με n όμοιες θέσεις n ιππότες $1, 2, \dots, n$; Θεωρούμε ότι δύο τέτοιοι τρόποι ταυτίζονται αν ο ιππότης i έχει τον ίδιο ιππότη στα δεξιά του στους δύο αυτούς τρόπους για κάθε $1 \leq i \leq n$.

Με άλλα λόγια, ζητάμε να υπολογίσουμε το πλήθος των κυκλικών αναδιατάξεων του $[n]$. Θα δείξουμε ότι το πλήθος αυτό είναι ίσο με $(n-1)!$. Έστω A_n το σύνολο των αναδιατάξεων και C_n το σύνολο των κυκλικών αναδιατάξεων του $[n]$. Για $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \in A_{n-1}$, έστω $\varphi(\sigma)$ η κυκλική αναδιατάξη του $[n]$ στην οποία (i) για κάθε $2 \leq i \leq n-1$, το σ_i βρίσκεται αμέσως μετά, κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού, από το σ_{i-1} και (ii) το n βρίσκεται ανάμεσα στα σ_1 και σ_{n-1} . Για παράδειγμα αν $n = 5$ και $\sigma = (2, 4, 1, 3)$, τότε η $\varphi(\sigma)$ είναι η κυκλική αναδιατάξη του Σχήματος 1.4. Εύκολα δείχνει κανείς ότι η απεικόνιση φ είναι αμφιμονοσήμαντη (ποια είναι η αντίστροφη της φ ;) και συνεπώς $\#C_n = \#A_{n-1} = (n-1)!$. \square

1.3.2 Υποσύνολα και συνδυασμοί

Έστω σύνολο Ω με n στοιχεία. Ένα υποσύνολο του Ω με k στοιχεία λέγεται k -υποσύνολο του Ω . Συμβολίζουμε με $\binom{n}{k}$ το πλήθος των k -υποσυνόλων του Ω , τα οποία αναφέρονται και ως *συνδυασμοί* των στοιχείων του Ω ανά k . Οι ακέραιοι $\binom{n}{k}$ λέγονται *διωνυμικοί συντελεστές*. Για παράδειγμα έχουμε $\binom{4}{2} = 6$, διότι υπάρχουν τα εξής έξι διμελή υποσύνολα του συνόλου $\{a, b, c, d\}$: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$ και $\{c, d\}$.

Πρόταση 1.3.3 *Ισχύει*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

όπου $0! = 1$ κατά σύμβαση.

Απόδειξη. Έστω $A(n, k)$ το σύνολο των k -αναδιατάξεων συνόλου Ω με n στοιχεία. Από την Πρόταση 1.3.2 έχουμε $\#A(n, k) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι υπάρχουν $\binom{n}{k}$ τρόποι να επιλέξουμε το σύνολο $S \subseteq \Omega$ των στοιχείων που εμφανίζονται σε μια k -αναδιατάξη σ του Ω και $k!$ τρόποι να αναδιατάξουμε τα στοιχεία του S ώστε να σχηματιστεί η σ , οπότε $\#A(n, k) = \binom{n}{k} k!$. Από τις δύο αυτές ισότητες προκύπτει ότι $n(n-1)\cdots(n-k+1) = \binom{n}{k} k!$, δηλαδή το ζητούμενο. \square

Η επόμενη πρόταση εξηγεί την ορολογία «διωνυμικοί συντελεστές» που χρησιμοποιήσαμε για τους αριθμούς $\binom{n}{k}$.

Πρόταση 1.3.4 (Διωνυμικό Θεώρημα) *Για μεταβλητές x, y που μετατίθενται (δηλαδή $xy = yx$) ισχύει*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Απόδειξη. Έστω μεταβλητές x_1, x_2, \dots, x_n και y_1, y_2, \dots, y_n που ανά δύο μετατίθενται. Για $S \subseteq [n]$ συμβολίζουμε με x_S (αντίστοιχα, με y_S) το γινόμενο των μεταβλητών x_i (αντίστοιχα, y_i) για $i \in S$, όπου $x_\emptyset = y_\emptyset = 1$ κατά σύμβαση. Με επαγωγή στο n βρίσκουμε ότι

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\cdots(x_n + y_n) = \sum_{S \subseteq [n]} x_S y_{\bar{S}},$$

όπου $\bar{S} = [n] \setminus S$. Θέτουμε $x_1 = \dots = x_n = x$ και $y_1 = \dots = y_n = y$ στην ισότητα αυτή. Το ζητούμενο προκύπτει παρατηρώντας ότι $(x_1 + y_1)\cdots(x_n + y_n) = (x+y)^n$, ότι $x_S y_{\bar{S}} = x^k y^{n-k}$ αν $\#S = k$ και ότι υπάρχουν $\binom{n}{k}$ υποσύνολα S του $[n]$ με $\#S = k$. \square

Πόρισμα 1.3.1 *Ισχύουν τα εξής:*

- (α) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
 (β) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ για $1 \leq k \leq n$.
 (γ) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.
 (δ) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ για $n \geq 1$.

Πρώτη απόδειξη. Από το Διωνυμικό Θεώρημα παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} &= (x+y)^n = (y+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^k x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} x^k y^{n-k}. \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του $x^k y^{n-k}$ στην πρώτη και τελευταία έκφραση της παραπάνω αλυσίδας ισοτήτων προκύπτει το (α). Ομοίως, χρησιμοποιώντας το Διωνυμικό Θεώρημα και την ισότητα $(x+y)^n = (x+y)^{n-1}(x+y)$, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} &= (x+y)^n = (x+y)^{n-1}(x+y) \\ &= (y+x) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k y^{n-k} \end{aligned}$$

και συμπεραίνουμε, όπως προηγουμένως, ότι ισχύει το (β). Τα (γ) και (δ) προκύπτουν από το Διωνυμικό Θεώρημα θέτοντας $x = y = 1$ και $x = -y = 1$, αντίστοιχα. Τα (α) και (β) προκύπτουν επίσης από τον τύπο της Πρότασης 1.3.3. \square

Δεύτερη απόδειξη. Η παρακάτω απόδειξη παρακάμπτει το Διωνυμικό Θεώρημα και βασίζεται στις θεμελιώδεις αρχές απαρίθμησης (Προτάσεις 1.2.1 και 1.2.2).

(α) Η απεικόνιση που στέλνει ένα k -υποσύνολο S του $[n]$ στο συμπλήρωμά του $[n] \setminus S$ στο σύνολο $[n]$ είναι 1-1 αντιστοιχία από το σύνολο των k -υποσυνόλων του $[n]$ σε εκείνο των $(n-k)$ -υποσυνόλων του $[n]$. Έπεται το (α).

(β) Παρατηρούμε ότι το πλήθος των k -υποσυνόλων S του $[n]$ με $n \notin S$ είναι ίσο με $\binom{n-1}{k}$ και ότι το πλήθος των k -υποσυνόλων S του $[n]$ με $n \in S$ είναι ίσο με $\binom{n-1}{k-1}$. Αφού για κάθε k -υποσύνολο S του $[n]$ έχουμε είτε $n \notin S$ είτε $n \in S$, η ζητούμενη σχέση προκύπτει από τα προηγούμενα και την Πρόταση 1.2.2.

(γ) Το άθροισμα στο αριστερό μέλος της προτεινόμενης ισότητας απαριθμεί το σύνολο των υποσυνόλων του $[n]$ με τυχαίο πλήθος στοιχείων. Συνεπώς (Παράδειγμα 1.2.2) ισούται με 2^n .

(δ) Η προτεινόμενη ισότητα γράφεται ως

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots$$

ή, ισοδύναμα, ως $\#A_n = \#B_n$, όπου A_n (αντίστοιχα, B_n) είναι το σύνολο των υποσυνόλων του $[n]$ με άρτιο (αντίστοιχα, περιττό) πλήθος στοιχείων. Συνεπώς αρκεί να βρούμε μια 1-1 αντιστοιχία $\varphi : A_n \rightarrow B_n$. Μια τέτοια είναι η απεικόνιση $\varphi : A_n \rightarrow B_n$ που ορίζεται θέτοντας

$$\varphi(S) = \begin{cases} S \setminus \{n\}, & \text{αν } n \in S \\ S \cup \{n\}, & \text{αν } n \notin S \end{cases}$$

για $S \in A_n$. Η αντίστροφη της φ είναι η απεικόνιση $\psi : B_n \rightarrow A_n$ με

$$\psi(T) = \begin{cases} T \setminus \{n\}, & \text{αν } n \in T \\ T \cup \{n\}, & \text{αν } n \notin T \end{cases}$$

για $T \in B_n$. Για παράδειγμα για $n = 4$, η φ είναι η απεικόνιση

$$\begin{array}{ll} \emptyset \mapsto \{4\} & \{1, 4\} \mapsto \{1\} \\ \{1, 2\} \mapsto \{1, 2, 4\} & \{2, 4\} \mapsto \{2\} \\ \{1, 3\} \mapsto \{1, 3, 4\} & \{3, 4\} \mapsto \{3\} \\ \{2, 3\} \mapsto \{2, 3, 4\} & \{1, 2, 3, 4\} \mapsto \{1, 2, 3\}. \end{array}$$

□

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Το Πρόσχημα 1.3.1 παραθέτει κάποιες ιδιότητες της μορφής $a = b$, τα μέλη a, b των οποίων μπορούν να ερμηνευθούν συνδυαστικά. Οι αποδείξεις που δώσαμε ακολουθούν δύο βασικές μεθοδολογίες για την απόδειξη τέτοιων ισοτήτων. Η πρώτη εκφράζει τα a, b ως τους συντελεστές ενός μονωνύμου στα δύο μέλη μιας αλγεβρικής ισότητας μεταξύ δύο πολυωνύμων και η δεύτερη ως τους πληθάριθμους δύο συνόλων μεταξύ των οποίων δίνεται μια 1-1 αντιστοιχία (ή ως τον πληθάριθμο ενός συνόλου, χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικούς τρόπους για την απαρίθμηση των στοιχείων του). Περαιτέρω παραδείγματα στα οποία εφαρμόζονται αυτές οι μέθοδοι εμφανίζονται στις ασκήσεις του κεφαλαίου. □

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με την εξής γενίκευση της Πρότασης 1.3.3. Έστω S σύνολο με r στοιχεία x_1, x_2, \dots, x_r και έστω T η συλλογή που αποτελείται από n_i αντίτυπα του x_i για κάθε i . Αναδιάταξη της T λέγεται μία ακολουθία $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ μήκους $n = n_1 + \dots + n_r$ στην οποία για κάθε $1 \leq i \leq r$, το στοιχείο x_i εμφανίζεται ακριβώς n_i φορές. Για παράδειγμα, μια αναδιάταξη της συλλογής $\{x, x, x, y, z, z\}$ είναι η (x, y, x, z, z, x) .

Πρόταση 1.3.5 Έστω σύνολο με r στοιχεία x_1, x_2, \dots, x_r . Το πλήθος των αναδιατάξεων της συλλογής που αποτελείται από n_i αντίτυπα του x_i για κάθε i είναι ίσο με

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!},$$

όπου $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$.

Απόδειξη. Έστω $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ μια τέτοια αναδιάταξη και για $1 \leq i \leq r$, έστω S_i το σύνολο των θέσεων της σ στις οποίες εμφανίζεται το x_i , δηλαδή $S_i = \{j : \sigma_j = x_i\}$. Από την υπόθεση έχουμε $\#S_i = n_i$ για κάθε i . Συνεπώς υπάρχουν $\binom{n}{n_1}$ επιλογές για το S_1 , υπάρχουν $\binom{n-n_1}{n_2}$ επιλογές για το S_2 , αφού αυτό είναι n_2 -υποσύνολο του $[n] \setminus S_1$ και ούτω καθεξής, οπότε συνολικά υπάρχουν

$$\binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \dots \binom{n-n_1-\dots-n_{r-1}}{n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

επιλογές για τη σ . □

1.3.3 Συνθέσεις ακεραίων

Έστω n θετικός ακεραίος. *Σύνθεση* (composition), ή *διατεταγμένη διαμέριση*, του n λέγεται μια ακολουθία $\rho = (r_1, r_2, \dots, r_k)$ με στοιχεία θετικούς ακεραίους που έχουν άθροισμα n . Οι ακεραίοι r_i λέγονται *μέρη* της ρ . Η σύνθεση ρ παριστάνεται και ως $r_1 + r_2 + \dots + r_k$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Οι συνθέσεις του $n = 4$ είναι οι

$$\begin{array}{cccc} (4) & (1, 3) & (2, 1, 1) & (1, 1, 2) \\ (3, 1) & (2, 2) & (1, 2, 1) & (1, 1, 1, 1). \end{array} \quad (1.1)$$

Ο ακεραίος $n = 5$ έχει συνολικά 16 συνθέσεις, από τις οποίες τρία μέρη έχουν οι $(3, 1, 1)$, $(1, 3, 1)$, $(1, 1, 3)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 1, 2)$ και $(1, 2, 2)$. Για $n = 1, 2, 3$ το πλήθος των συνθέσεων του n είναι ίσο με 1, 2, 4, αντίστοιχα. □

Πρόταση 1.3.6 Το πλήθος των συνθέσεων του n είναι ίσο με 2^{n-1} . Το πλήθος των συνθέσεων του n με k μέρη είναι ίσο με $\binom{n-1}{k-1}$.

Απόδειξη. Έστω A_n το σύνολο των συνθέσεων του n και έστω B_n το σύνολο των υποσυνόλων του $[n-1]$. Για $\rho = (r_1, r_2, \dots, r_k) \in A_n$ θέτουμε

$$\varphi(\rho) = \{r_1, r_1 + r_2, \dots, r_1 + r_2 + \dots + r_{k-1}\}.$$

Για παράδειγμα, αν $n = 8$ και $\rho = (3, 1, 2, 2)$, τότε $\varphi(\rho) = \{3, 4, 6\}$. Από την υπόθεση ότι οι r_1, r_2, \dots, r_k είναι θετικοί ακέραιοι με άθροισμα n προκύπτει ότι $\varphi(\rho) \in B_n$. Εύκολα επαληθεύει κανείς ότι η απεικόνιση $\varphi : A_n \rightarrow B_n$ είναι αμφιμονοσήμαντη, με αντίστροφη την απεικόνιση $\psi : B_n \rightarrow A_n$ με

$$\psi(S) = (s_1, s_2 - s_1, \dots, n - s_{k-1})$$

για κάθε υποσύνολο $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{k-1}\}$ του $[n-1]$ με $s_1 < s_2 < \dots < s_{k-1}$. Από την Πρόταση 1.2.1 και το Παράδειγμα 1.2.1 συμπεραίνουμε ότι $\#A_n = \#B_n = 2^{n-1}$. Παρατηρούμε επίσης ότι η σύνθεση $\rho \in A_n$ έχει k μέρη αν και μόνο αν το σύνολο $\varphi(\rho)$ έχει $k-1$ στοιχεία. Κατά συνέπεια, η φ περιορίζεται σε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το σύνολο των συνθέσεων του n με k μέρη στο σύνολο των $(k-1)$ -υποσυνόλων του $[n-1]$. Άρα, το πλήθος των συνθέσεων αυτών είναι ίσο με $\binom{n-1}{k-1}$. \square

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Με την αντιστοιχία φ της προηγούμενης απόδειξης για $n = 4$, οι οκτώ συνθέσεις (1.1) του 4 απεικονίζονται στα υποσύνολα

$$\begin{array}{cccc} \emptyset & \{1\} & \{2, 3\} & \{1, 2\} \\ \{3\} & \{2\} & \{1, 3\} & \{1, 2, 3\} \end{array}$$

του $[3]$, αντίστοιχα. \square

1.3.4 Συνδυασμοί με επανάληψη

Ο διωνυμικός συντελεστής $\binom{n}{k}$ μπορεί να ερμηνευθεί ως το πλήθος των διανυσμάτων $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ με $a_1 + a_2 + \dots + a_n = k$. Το πλήθος των διανυσμάτων $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ με $a_1 + a_2 + \dots + a_n = k$ αναφέρεται ως το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη k από n αντικείμενα x_1, x_2, \dots, x_n και συμβολίζεται με $\binom{n}{k}$. Ο ακέραιος $\binom{n}{k}$ μπορεί να ερμηνευθεί συνδυαστικά με ποικίλους τρόπους, για παράδειγμα ως:

- ο το πλήθος των μονωνύμων της μορφής $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ βαθμού k σε n μεταβλητές x_1, x_2, \dots, x_n (όπου ο βαθμός του $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ ορίζεται ως το άθροισμα $a_1 + a_2 + \dots + a_n$),
- ο το πλήθος των τρόπων με τους οποίους k όμοια αντικείμενα μπορούν να μοιραστούν σε n διακεκριμένους αποδέκτες (όπου είναι δυνατόν κάποιοι από τους αποδέκτες να μη λάβουν κανένα από τα αντικείμενα αυτά).

- ο το πλήθος των διανυσμάτων (i_1, i_2, \dots, i_k) με ακέραιες συντεταγμένες για τα οποία ισχύει $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$.

Για παράδειγμα, έχουμε $\binom{3}{2} = 6$ αφού υπάρχουν οι έξι τριάδες $(2, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 1, 1)$ και $(0, 0, 2)$ φυσικών αριθμών με άθροισμα συντεταγμένων ίσο με 2, με αντίστοιχα μονώνυμα τα x_1^2 , x_1x_2 , x_1x_3 , x_2^2 , x_2x_3 και x_3^2 και αντίστοιχα διανύσματα (i_1, i_2) τα $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$ και $(3, 3)$.

Πρόταση 1.3.7 Για μη αρνητικούς ακέραιους n, k ισχύει

$$\binom{n}{k} = \binom{n+k-1}{k}. \quad (1.2)$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n \geq 1$. Συμβολίζουμε με $A(n, k)$ το σύνολο των διανυσμάτων $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ με $a_1 + a_2 + \dots + a_n = k$. Παρατηρούμε ότι αν $x = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A(n, k)$ και $b_i = a_i + 1$ για κάθε i , τότε τα b_i είναι θετικοί ακέραιοι με άθροισμα $b_1 + b_2 + \dots + b_n = n + k$. Επομένως, το διάνυσμα $\varphi(x) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ είναι σύνθεση του $n + k$ με n μέρη. Παρατηρούμε ακόμη ότι για τυχαία σύνθεση $y = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ του $n + k$ υπάρχει μοναδικό $x \in A(n, k)$ με $\varphi(x) = y$, συγκεκριμένα το διάνυσμα $x = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ με $a_i = b_i - 1$ για κάθε $1 \leq i \leq n$. Συνεπώς, έχουμε ορίσει μια 1-1 αντιστοιχία φ από το $A(n, k)$ στο σύνολο των συνθέσεων του $n + k$ με n μέρη. Το ζητούμενο έπεται από τις Προτάσεις 1.2.1 και 1.3.6. \square

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Με την αντιστοιχία της προηγούμενης απόδειξης για $n = 3$ και $k = 2$, οι τριάδες $(2, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 1, 1)$ και $(0, 0, 2)$ απεικονίζονται στις συνθέσεις $(3, 1, 1)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 1, 2)$, $(1, 3, 1)$, $(1, 2, 2)$ και $(1, 1, 3)$ του 5, αντίστοιχα. \square

1.4 Η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού

Για πεπερασμένα σύνολα A, B έχουμε

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B) \quad (1.3)$$

και συνεπώς

$$\#(S - A \cup B) = \#S - \#A - \#B + \#(A \cap B). \quad (1.4)$$

Υπάρχουν ανάλογοι τύποι για τρία ή περισσότερα πεπερασμένα σύνολα; Η παρακάτω αρχή, η οποία αποτελεί ακρογωνιαίο λίθο της απαριθμητικής συνδυαστικής, δίνει απάντηση σε αυτό το ερώτημα και γενικεύει τις παραπάνω ισότητες, καθώς και την Πρόταση 1.2.2.

Θεώρημα 1.4.1 (Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού) Για υποσύνολα A_1, A_2, \dots, A_n πεπερασμένου συνόλου S ισχύει

$$\begin{aligned} \# \left(S - \bigcup_{i=1}^n A_i \right) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \\ &= \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{\#I} \# \bigcap_{i \in I} A_i, \end{aligned}$$

όπου $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} = S$ για $k = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Για $n = 3$, ο προηγούμενος τύπος γράφεται

$$\begin{aligned} \#(S - A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \#S - \#A_1 - \#A_2 - \#A_3 + \#(A_1 \cap A_2) + \\ &\quad \#(A_1 \cap A_3) + \#(A_2 \cap A_3) - \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

Πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος 1.4.1. Για $1 \leq i \leq n$ και $x \in S$ θέτουμε

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A_i \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Παρατηρώντας ότι

$$\prod_{i=1}^n (1 - \chi_i(x)) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in S - \bigcup_{i=1}^n A_i \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (1.5)$$

βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \# \left(S - \bigcup_{i=1}^n A_i \right) &= \sum_{x \in S} \prod_{i=1}^n (1 - \chi_i(x)) = \sum_{x \in S} \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{\#I} \prod_{i \in I} \chi_i(x) \\ &= \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{\#I} \sum_{x \in S} \prod_{i \in I} \chi_i(x). \end{aligned}$$

Παρατηρώντας επίσης ότι

$$\prod_{i \in I} \chi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \bigcap_{i \in I} A_i \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

για $I \subseteq [n]$, προκύπτει το ζητούμενο. \square

Δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 1.4.1. Θέτουμε

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \bigcap_{i \in I} A_i \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

για $I \subseteq [n]$ και $x \in S$ και παρατηρούμε ότι

$$\# \bigcap_{i \in I} A_i = \sum_{x \in S} \chi_I(x).$$

Επομένως, συμβολίζοντας με B το δεξιό μέλος της ζητούμενης σχέσης, έχουμε

$$B = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{\#I} \sum_{x \in S} \chi_I(x) = \sum_{x \in S} c(x), \quad (1.6)$$

όπου

$$c(x) = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{\#I} \chi_I(x).$$

Έστω ότι το $x \in S$ ανήκει σε m από τα σύνολα A_1, A_2, \dots, A_n , όπου $0 \leq m \leq n$. Παρατηρούμε ότι το x ανήκει σε $\binom{m}{2}$ από τα σύνολα $A_i \cap A_j$ με $i < j$, σε $\binom{m}{3}$ από τα σύνολα $A_i \cap A_j \cap A_r$ με $i < j < r$ και ούτω καθεξής. Με άλλα λόγια, έχουμε $\chi_I(x) = 1$ για $\binom{m}{k}$ το πλήθος k -υποσύνολα I του $[n]$ και $\chi_I(x) = 0$ για τα υπόλοιπα. Συνεπώς

$$c(x) = \binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \dots + (-1)^m \binom{m}{m}.$$

Από τη σχέση αυτή και την Πρόταση 1.3.1 (δ) παίρνουμε $c(x) = 0$ αν $m \geq 1$, δηλαδή αν $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$, και $c(x) = 1$ αν $m = 0$, δηλαδή αν $x \in S - \bigcup_{i=1}^n A_i$. Το ζητούμενο προκύπτει από την (1.6). \square

Παρατήρηση 1.4.1 Ο τύπος του Θεωρήματος 1.4.1 γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\# \bigcup_{i=1}^n A_i = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}). \quad (1.7)$$

\square

Παρακάτω δίνουμε δύο εφαρμογές του Θεωρήματος 1.4.1.

1.4.1 Επί απεικονίσεις

Υπενθυμίζουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.4.1 Έστω απεικόνιση συνόλων $f : A \rightarrow B$.

- (α) Η f λέγεται 1-1 αν για κάθε στοιχείο y του B υπάρχει το πολύ ένα στοιχείο x του A , τέτοιο ώστε $f(x) = y$.

(β) Η f λέγεται επί αν για κάθε $y \in B$ υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο x του A , τέτοιο ώστε $f(x) = y$.

Επομένως, μία απεικόνιση $\varphi : A \rightarrow B$ είναι αμφιμονοσήμαντη αν και μόνο αν η φ είναι ταυτόχρονα 1-1 και επί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Αν $A = \{a, b, c\}$, όπου a, b, c είναι διαφορετικά ανά δύο στοιχεία του A και $B = \{1, 2, 3, 4\}$, τότε η απεικόνιση $f : A \rightarrow B$ με $f(a) = 3$, $f(b) = 1$, $f(c) = 4$ είναι 1-1 αλλά δεν είναι επί, διότι δεν υπάρχει $x \in A$ με $f(x) = 2$. \square

Πρόταση 1.4.1 Έστω θετικοί ακέραιοι m και n .

(α) Το πλήθος των 1-1 απεικονίσεων $f : [m] \rightarrow [n]$ είναι ίσο με $n(n-1)\cdots(n-m+1)$, αν $m \leq n$ (και ίσο με μηδέν διαφορετικά).

(β) Το πλήθος των επί απεικονίσεων $f : [m] \rightarrow [n]$ είναι ίσο με

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m.$$

Απόδειξη. Το (α) προκύπτει από την Πρόταση 1.3.2, αφού η απεικόνιση $f : [m] \rightarrow [n]$ είναι 1-1 αν και μόνο αν η ακολουθία $(f(1), f(2), \dots, f(m))$ είναι m -αναδιάταξη του συνόλου $[n]$.

Για το (β), έστω S το σύνολο όλων των απεικονίσεων $f : [m] \rightarrow [n]$ και για $i \in [n]$, έστω A_i το σύνολο των απεικονίσεων $f \in S$ για τις οποίες δεν υπάρχει $x \in [m]$ με $f(x) = i$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο των επί απεικονίσεων $f : [m] \rightarrow [n]$ ταυτίζεται με το $S - \bigcup_{i=1}^m A_i$. Από την πολλαπλασιαστική αρχή προκύπτει ότι $\#S = n^m$, διότι για να ορίσουμε μια απεικόνιση $f : [m] \rightarrow [n]$, υπάρχουν n επιλογές (συγκεκριμένα οι $1, 2, \dots, n$) για την τιμή $f(j)$ της f για κάθε $1 \leq j \leq m$. Ομοίως $\#A_i = (n-1)^m$ για $1 \leq i \leq n$. Γενικότερα για $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$ ισχύει

$$A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} = \{f : [m] \rightarrow [n] \setminus \{i_1, \dots, i_k\}\}$$

και συνεπώς $\#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = (n-k)^m$, διότι έχουμε $n-k$ επιλογές για κάθε τιμή $f(j)$ της f για να ορίσουμε μια απεικόνιση $f : [m] \rightarrow [n] \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$. Από το Θεώρημα 1.4.1 προκύπτει ότι

$$\# \left(S - \bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m,$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με τον προτεινόμενο τύπο. \square

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Για $m = 5$ και $n = 3$ υπάρχουν $3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 \cdot 1^5 - 0 = 150$ επί απεικονίσεις $f : [5] \rightarrow [3]$. \square

Παρατήρηση 1.4.2 Ο συλλογισμός στην απόδειξη της Πρότασης 1.4.1 έχει ισχύ ανεξαρτήτως του αν $m < n$ ή $m \geq n$. Το πλήθος των επί απεικονίσεων $f : [m] \rightarrow [n]$ είναι ίσο με 0 αν $m < n$ (βλέπε Πρόταση 2.1.1 (β)) και ίσο με $n!$ αν $m = n$ (εξηγήστε γιατί). Συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m = \begin{cases} 0, & \text{αν } m < n \\ n!, & \text{αν } m = n. \end{cases} \quad (1.8)$$

□

1.4.2 Αναδιατάξεις χωρίς σταθερά σημεία

Έστω αναδιάταξη $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ του $[n]$ και $1 \leq i \leq n$. Το i λέγεται *σταθερό σημείο* της σ αν $\sigma_i = i$. Για παράδειγμα, η αναδιάταξη $(4, 2, 1, 3, 5)$ του $[5]$ έχει δύο σταθερά σημεία, τα 2 και 5, ενώ οι $(2, 3, 1)$ και $(3, 1, 2)$ είναι οι μόνες αναδιατάξεις του $[3]$ χωρίς σταθερά σημεία. Έστω D_n το πλήθος των αναδιατάξεων του $[n]$ χωρίς σταθερά σημεία, οπότε $D_1 = 0$, $D_2 = 1$, $D_3 = 2$. Ισοδύναμα, όπως προκύπτει από την 1-1 αντιστοιχία που περιγράψαμε στην Παρατήρηση 1.3.1, ο ακέραιος D_n είναι ίσος με το πλήθος των τοποθετήσεων n μη αλληλεπιτιθέμενων πιονιών στα τετράγωνα μιας $n \times n$ σκακιέρας, τέτοιες ώστε κανένα από τα πιόνια να μη βρίσκεται στην κύρια διαγώνιο της σκακιέρας.

Πρόταση 1.4.2 Για το πλήθος των αναδιατάξεων του $[n]$ χωρίς σταθερά σημεία ισχύει

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right).$$

Απόδειξη. Έστω S το σύνολο των αναδιατάξεων του $[n]$ και για $1 \leq i \leq n$, έστω A_i το σύνολο των αναδιατάξεων $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in S$ με $\sigma_i = i$. Τότε D_n είναι το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $S - \bigcup_{i=1}^n A_i$. Παρατηρούμε ότι για $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, η τομή $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$ είναι το σύνολο των αναδιατάξεων του $[n]$ για τις οποίες τα i_1, \dots, i_k είναι σταθερά σημεία. Άρα το πλήθος των στοιχείων του συνόλου αυτού είναι ίσο με το πλήθος των αναδιατάξεων του $[n] \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ και επομένως $\#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = (n - k)!$. Από το Θεώρημα 1.4.1 προκύπτει ότι

$$D_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n - k)! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!} = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!},$$

όπως το θέλαμε. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Υπάρχουν $D_5 = 44$ αναδιατάξεις του συνόλου $[5]$ χωρίς σταθερά σημεία. □

Το επόμενο πόρισμα μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: Επιλέγοντας μια αναδιάταξη σ του $[n]$ τυχαία και ομοιόμορφα, η πιθανότητα η σ να μην έχει σταθερά σημεία συγκλίνει στο e^{-1} , όταν το n τείνει στο άπειρο.

Πόρισμα 1.4.1 *Ισχύει*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{n!} = e^{-1},$$

όπου e είναι η βάση των Νεπερίων λογαρίθμων.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 1.4.2 υπολογίζουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}.$$

□

1.5 Ασκήσεις

- Πόσα υποσύνολα του συνόλου $\{1, 2, \dots, 10\}$ περιέχουν τουλάχιστον έναν άρτιο αριθμό;
 - Σε ένα πάρτυ υπάρχουν τέσσερις άνδρες και έξι γυναίκες. Οι άνδρες χορεύουν ταυτόχρονα, ο καθένας με μία από τις γυναίκες. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;
 - Με πόσους τρόπους μπορούμε να αναδιατάξουμε τα γράμματα της λέξης ΔΩΔΕΚΑΔΑ;
- Έστω $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Αποδείξτε την ταυτότητα $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ ως εξής:
 - Χρησιμοποιώντας επαγωγή στο n .
 - Απαριθμώντας τα μη κενά υποσύνολα του συνόλου $[n]$ με δύο διαφορετικούς τρόπους.
- Πόσες διαγωνίους έχει ένα κυρτό πολύγωνο με n κορυφές;
- Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν k όμοια πιόνια στα τετράγωνα μιας $m \times n$ σκακιέρας, ώστε να μην υπάρχουν δύο ή περισσότερα πιόνια στην ίδια γραμμή ή στήλη;
- Έστω $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Για πόσες αναδιατάξεις $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2n})$ του συνόλου $[2n]$ ισχύει $\sigma_i \geq 2i$ για κάθε $1 \leq i \leq n$;

6. (α) Υπολογίστε το πλήθος των τετραγώνων στο επίπεδο, οι κορυφές των οποίων ανήκουν στο σύνολο $[n] \times [n]$ και κάθε ακμή των οποίων είναι παράλληλη σε έναν από τους άξονες (δηλαδή τις ευθείες $x = 0$ και $y = 0$).
- (β) Δείξτε ότι το πλήθος των τετραγώνων στο επίπεδο, οι κορυφές των οποίων ανήκουν στο σύνολο $[n] \times [n]$, είναι ίσο με $n^2(n^2 - 1)/12$. Για $n = 3$ υπάρχει ένα τέτοιο τετράγωνο με πλευρά μήκους 2, τέσσερα με πλευρά μήκους 1 και ένα με πλευρά μήκους $\sqrt{2}$.
7. Έστω $n \geq 2$. Για ποιους ακεραίους $0 \leq k \leq n - 1$ ισχύει $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{k+1}$; Πότε ισχύει η ισότητα;
8. (α) Δείξτε ότι για $1 \leq k \leq n$ ισχύει $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
- (β) Χρησιμοποιώντας το (α), δείξτε ότι ισχύει $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$ για κάθε ακέραιο $n \geq 1$.
- (γ) Αποδείξτε την ταυτότητα του ερωτήματος (β) χρησιμοποιώντας το Διωνυμικό Θεώρημα.
- (δ) Αποδείξτε την ταυτότητα του ερωτήματος (β) υπολογίζοντας με δύο διαφορετικούς τρόπους το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορεί να επιλεγεί μία επιτροπή E από ένα σύνολο n φοιτητών και να οριστεί ένα μέλος της E ως πρόεδρος.
9. Δείξτε ότι $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$ ως εξής:
- (α) Χρησιμοποιώντας το Διωνυμικό Θεώρημα.
- (β) Απαριθμώντας τα στοιχεία ενός συνόλου με δύο διαφορετικούς τρόπους.
10. Δείξτε ότι $\binom{n}{k} = \sum_{m=k}^n \binom{m-1}{k-1}$ ως εξής:
- (α) Χρησιμοποιώντας επαγωγή στο n .
- (β) Απαριθμώντας τα στοιχεία ενός συνόλου με δύο διαφορετικούς τρόπους.
11. Δείξτε ότι $\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}$ ως εξής:
- (α) Χρησιμοποιώντας επαγωγή στο m .
- (β) Χρησιμοποιώντας το Διωνυμικό Θεώρημα.
12. Δείξτε ότι $\binom{2n}{k} = \sum_{i=\lfloor (k+1)/2 \rfloor}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k-i} 2^{2i-k}$ ως εξής:
- (α) Χρησιμοποιώντας το Διωνυμικό Θεώρημα.
- (β) Απαριθμώντας τα στοιχεία ενός συνόλου με δύο διαφορετικούς τρόπους.
13. Έστω θετικοί ακέραιοι n, k με $n \geq 2k - 1$. Πόσα k -υποσύνολα του $[n]$ δεν περιέχουν δύο διαδοχικούς ακεραίους;

14. Έστω θετικοί ακέραιοι n, k .

- (α) Πόσα διατεταγμένα ζεύγη (A, B) υποσυνόλων του $[n]$ υπάρχουν, τέτοια ώστε $A \cap B = \emptyset$;
- (β) Πόσα διατεταγμένα ζεύγη (A, B) υποσυνόλων του $[n]$ υπάρχουν, τέτοια ώστε $A \cup B = [n]$;
- (γ) Πόσες ακολουθίες (A_1, A_2, \dots, A_k) μήκους k υποσυνόλων του $[n]$ υπάρχουν, τέτοιες ώστε $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k = \emptyset$;
- (δ) Πόσες ακολουθίες (A_1, A_2, \dots, A_k) μήκους k υποσυνόλων του $[n]$ υπάρχουν, τέτοιες ώστε $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = [n]$;

15. Έστω θετικοί ακέραιοι m, n .

- (α) Πόσα μονοπάτια υπάρχουν στο \mathbb{R}^2 με αφετηρία το σημείο $(0, 0)$ και τέρμα το (m, n) αν κάθε μονοπάτι έχει $m + n$ βήματα, καθένα ίσο με $(1, 0)$ ή $(0, 1)$; Για $m = n = 2$ τα έξι δυνατά μονοπάτια απεικονίζονται στο Σχήμα 1.5.



Σχήμα 1.5: Τα έξι μονοπάτια με $m = n = 2$.

- (β) Πόσες ακολουθίες ακεραίων $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ υπάρχουν με $m \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0$ και $0 \leq r \leq n$ (όπου $\lambda = \emptyset$ αν $r = 0$);

16. Έστω ακέραιοι $1 \leq k \leq n$. Με πόσους τρόπους μπορούν να διαταχθούν n στρατιώτες $1, 2, \dots, n$ σε k στήλες τυχαίου (μη μηδενικού) μήκους (όλες οι στήλες αρχίζουν από την ίδια οριζόντιο); Π.χ. για $n = 3$ και $k = 2$ υπάρχουν συνολικά δώδεκα διατάξεις, οι

1 3 2 3 1 2 3 2 2 1 3 1 1 3 2 3
2 1 3 1 3 2 2 1

1 2 3 2 2 1 3 1
3 1 3 2

ενώ για $n = 10$ και $k = 4$, μια διάταξη είναι η

4	9	6	2
8	1	10	
	7	3	
	5		

17. Έστω a_n το πλήθος των συνθέσεων του n με μέρη ίσα με 1 ή 2. Για παράδειγμα $a_4 = 5$, διότι οι συνθέσεις του 4 με μέρη 1 ή 2 είναι οι $(2, 2)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$, $(1, 1, 2)$ και $(1, 1, 1, 1)$. Δείξτε ότι:

(α) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ για $n \geq 3$.

(β) $a_n = \sum_{0 \leq i \leq n/2} \binom{n-i}{i}$.

(γ) το a_n είναι ίσο με το πλήθος των υποσυνόλων του $[n-1]$ που δεν περιέχουν δύο διαδοχικούς ακεραίους.

Σημείωση: Η ακολουθία (a_n) λέγεται *ακολουθία Fibonacci* και συμβολίζεται με $F_n = a_{n-1}$, $F_1 = F_2 = 1$.

18. Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{i=0}^k \frac{n-2i+1}{n-i+1} \binom{n}{i}$ για $0 \leq k \leq n$.

19. Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2$ ως εξής:

(α) Χρησιμοποιώντας το Διωνυμικό Θεώρημα.

(β) Χρησιμοποιώντας μόνο τις βασικές αρχές απαρίθμησης.

20. (α) Πόσοι ακέραιοι από τους $1, 2, 3, \dots, 3000$ δε διαιρούνται με κανέναν από τους 2, 3 και 5;
 (β) Πόσα από τα 5-υποσύνολα του συνόλου $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ δεν περιέχουν κανένα από τα σύνολα $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$ και $\{5, 6\}$;
 (γ) Πόσες αναδιατάξεις $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6)$ του συνόλου $\{1, 2, \dots, 6\}$ είναι τέτοιες ώστε $\sigma_1 \notin \{1, 2\}$, $\sigma_2 \notin \{3, 4\}$ και $\sigma_3 \notin \{5, 6\}$; Γενικεύστε το ερώτημα για αναδιατάξεις του συνόλου $[2n]$.

21. Για $0 \leq k \leq n$, έστω $f(n, k)$ το πλήθος των αναδιατάξεων του $[n]$ οι οποίες έχουν ακριβώς k σταθερά σημεία. Δείξτε ότι

(α) $f(n, k) = \binom{n}{k} D_{n-k}$,

(β) $\sum_{k=0}^n f(n, k) = n!$ για κάθε $n \geq 1$,

(γ) $\sum_{k=0}^n k f(n, k) = n!$ για κάθε $n \geq 1$,

(δ) $\sum_{k=0}^n k(k-1) f(n, k) = n!$ για κάθε $n \geq 2$.

22. Έστω D_n το πλήθος των αναδιατάξεων του $[n]$ χωρίς σταθερά σημεία. Δείξτε ότι

(α) $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ για κάθε $n \geq 1$,

(β) $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ για κάθε $n \geq 2$,

(γ) $\binom{n}{0} D_n + \binom{n}{1} D_{n-1} + \binom{n}{2} D_{n-2} + \dots + \binom{n}{n} D_0 = n!$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

όπου $D_0 = 1$.

23. Έστω $X_n = \{1, -1, 2, -2, \dots, n, -n\}$ και έστω Ω_n το σύνολο των αμφιμονοσήμαντων απεικονίσεων $\sigma : X_n \rightarrow X_n$ που έχουν την ιδιότητα $\sigma(-i) = -\sigma(i)$ για $1 \leq i \leq n$. Συμβολίζουμε με $g(n)$ το πλήθος των στοιχείων του Ω_n και με $f(n)$ το πλήθος των στοιχείων σ του Ω_n για τα οποία ισχύει $\sigma(i) \neq i$ για $1 \leq i \leq n$.

(α) Δείξτε ότι $g(n) = 2^n n!$ για κάθε $n \geq 1$.

(β) Δείξτε ότι

$$f(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k} (n-k)! \quad (1.9)$$

για κάθε $n \geq 1$.

(γ) Συνάγετε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = e^{-1/2}$.

24. Έστω ακέραιοι $0 \leq k \leq n$. Απαριθμώντας τα στοιχεία ενός συνόλου με δύο διαφορετικούς τρόπους, δείξτε ότι

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{2n-2i}{k} = \begin{cases} 0, & \text{αν } k < n, \\ 2^{2n-k} \binom{n}{k-n}, & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (1.10)$$

25. (α) Δίνονται n ευθείες στο επίπεδο οι οποίες ανά δύο δεν είναι παράλληλες και ανά τρεις δε διέρχονται από το ίδιο σημείο. Δείξτε ότι οι ευθείες αυτές χωρίζουν το επίπεδο σε $1 + n + \binom{n}{2}$ περιοχές.
- (β) Δίνονται n επίπεδα στο χώρο τα οποία ανά δύο δεν είναι παράλληλα, ανά τρία τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο και ανά τέσσερα δε διέρχονται από το ίδιο σημείο. Δείξτε ότι τα επίπεδα αυτά χωρίζουν το χώρο σε $1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ περιοχές.

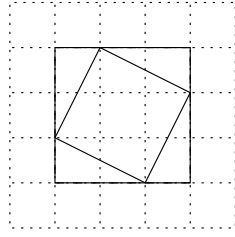
Υποδείξεις - Λύσεις

- (α) Συνολικά υπάρχουν 2^{10} υποσύνολα του $\{1, 2, \dots, 10\}$. Από αυτά, τα υποσύνολα που δεν περιέχουν κανένα άρτιο αριθμό, δηλαδή τα υποσύνολα του $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, είναι σε πλήθος 2^5 . Συνεπώς, από την προσθετική αρχή, υπάρχουν $2^{10} - 2^5 = 1024 - 32 = 992$ υποσύνολα του $\{1, 2, \dots, 10\}$ που περιέχουν τουλάχιστον έναν άρτιο αριθμό.

(β) Έστω $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ το σύνολο των ανδρών. Υπάρχουν έξι επιλογές γυναικών για τον A_1 και κατόπιν πέντε επιλογές για τον A_2 , τέσσερις επιλογές για τον A_3 και τρεις επιλογές για τον A_4 . Συνεπώς η διαδικασία μπορεί να γίνει συνολικά με $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ τρόπους.

(γ) Έχουμε να αναδιατάξουμε τρία Δ , δύο A , ένα E , ένα K και ένα Ω . Σύμφωνα με την Πρόταση 1.3.5, αυτό μπορεί να γίνει συνολικά με $8! / 3! 2! 1! 1! 1! = 3360$ τρόπους.
- Το (α) αφήνεται στον αναγνώστη. Για το (β) παρατηρούμε, χρησιμοποιώντας το Παράδειγμα 1.2.1, ότι υπάρχουν ακριβώς $2^n - 1$ μη κενά υποσύνολα του $[n]$. Επίσης, για $1 \leq k \leq n$, ακριβώς 2^{k-1} από αυτά (όσα τα υποσύνολα του $[k-1]$) έχουν μέγιστο στοιχείο το k . Από την προσθετική αρχή έπεται ότι το πλήθος των μη κενών υποσυνόλων του $[n]$ είναι επίσης ίσο με $\sum_{k=1}^n 2^{k-1}$.
- Έστω m το πλήθος των διαγωνίων κυρτού πολυγώνου Π με n κορυφές και έστω S το σύνολο των ζευγών (κ, δ) , όπου κ είναι κορυφή του Π , δ είναι διαγώνιος του Π και η κ είναι άκρο της δ . Έχουμε $\#S = n(n-3)$, διότι από κάθε κορυφή του Π διέρχονται $n-3$ διαγώνιοι και $\#S = 2m$, διότι κάθε διαγώνιος έχει δύο άκρα. Άρα, $m = n(n-3)/2$.
- Μια τέτοια διάταξη προκύπτει επιλέγοντας πρώτα k από τις m γραμμές της σκακιέρας με $\binom{m}{k}$ τρόπους, επιλέγοντας έπειτα k από τις n στήλες με $\binom{n}{k}$ τρόπους και τοποθετώντας τέλος τα k πιόνια στα τετράγωνα της $k \times k$ υποσκακιέρας που σχηματίστηκε από τις γραμμές και στήλες που επιλέξαμε, ανά δύο όχι στην ίδια γραμμή ή στήλη, με $k!$ τρόπους. Συνεπώς υπάρχουν συνολικά $k! \binom{m}{k} \binom{n}{k}$ τέτοιες διατάξεις.
- Επιλέγουμε διαδοχικά τα στοιχεία $\sigma_n, \sigma_{n-1}, \dots, \sigma_1, \sigma_{n+1}, \dots, \sigma_{2n}$ της αναδιατάξης. Υπάρχει η μοναδική επιλογή $\sigma_n = 2n$ για το σ_n , υπάρχουν δύο επιλογές για το σ_{n-1} ώστε $\sigma_{n-1} \in \{2n-2, 2n-1, 2n\} \setminus \{\sigma_{2n}\}$, υπάρχουν τρεις επιλογές για το σ_{n-2} ώστε $\sigma_{n-2} \in \{2n-4, 2n-3, 2n-2, 2n-1, 2n\} \setminus \{\sigma_{n-1}, \sigma_n\}$ και ούτω καθεξής. Με δεδομένες τις επιλογές των $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ βρίσκουμε διαδοχικά ότι υπάρχουν n επιλογές για το σ_{n+1} ώστε $\sigma_{n+1} \in [2n] \setminus \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, υπάρχουν $n-1$ επιλογές για το σ_{n+2} και ούτω καθεξής. Από την πολλαπλασιαστική αρχή προκύπτει ότι υπάρχουν $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = (n!)^2$ αναδιατάξεις του $[2n]$ με τις επιθυμητές ιδιότητες.
- (α) Κάθε τέτοιο τετράγωνο x καθορίζεται πλήρως από το μήκος k των πλευρών του και τη νοτιοδυτική του κορυφή, η οποία είναι τυχαίο στοιχείο του $[n-k] \times [n-k]$. Συνεπώς υπάρχουν $(n-k)^2$ τέτοια τετράγωνα με πλευρά μήκους k και $1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = n(n-1)(2n-1)/6$ τετράγωνα συνολικά.

(β) Έστω A_n το σύνολο των τετραγώνων με κορυφές στο $[n] \times [n] \subset \mathbb{Z}^2$ και B_n το σύνολο των τετραγώνων του A_n με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες. Για



Σχήμα 1.6: Ένα πλάγιο τετράγωνο $x \in A_6$ και το $f(x) \in B_6$.

$x \in A_n$ έστω $f(x)$ το μικρότερο τετράγωνο του B_n που περιέχει το x . Ένα παράδειγμα με $n = 6$ απεικονίζεται στο Σχήμα 1.6. Για $1 \leq k \leq n-1$, όπως δείξαμε στο ερώτημα (α), υπάρχουν $(n-k)^2$ τετράγωνα $y \in B_n$ με πλευρά μήκους k . Παρατηρώντας ότι για κάθε τετράγωνο $y \in B_n$ με πλευρά μήκους k υπάρχουν ακριβώς k τετράγωνα $x \in A_n$ με $f(x) = y$, προκύπτει ότι

$$\#A_n = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 \cdot k = \sum_{k=1}^{n-1} k^2(n-k) = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

7. Έχουμε

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(k+1)!(n-k-1)!}{n!} = \frac{k+1}{n-k}$$

και συνεπώς $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{k+1}$ αν και μόνο αν $k+1 \leq n-k$, δηλαδή $k \leq (n-1)/2$.
Συνεπώς

$$\binom{n}{0} \leq \binom{n}{1} \leq \dots \leq \binom{n}{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}. \quad (1.11)$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $k = (n-1)/2$ (οπότε ο n πρέπει να είναι περιττός).

8. (α)

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

(β) Από το (α) έχουμε

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = n 2^{n-1}.$$

(γ) Από το Διωνυμικό Θεώρημα με $y = 1$ παίρνουμε $(x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$. Παραγωγίζοντας ως προς x και θέτοντας $x = 1$ στο αποτέλεσμα, προκύπτει η ζητούμενη ταυτότητα.

(δ) Έστω m το πλήθος των επιτροπών που μπορούν να δημιουργηθούν από n φοιτητές, με ένα μέλος στη θέση του προέδρου. Μπορούμε να επιλέξουμε την επιτροπή E με

$\binom{n}{k}$ τρόπους, αν αυτή έχει k μέλη ($1 \leq k \leq n$) και να επιλέξουμε ένα μέλος της E ως πρόεδρο με k τρόπους. Επομένως $m = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$. Επίσης, μπορούμε να επιλέξουμε πρώτα τον πρόεδρο με n τρόπους και έπειτα να επιλέξουμε τα υπόλοιπα μέλη της επιτροπής με 2^{n-1} τρόπους (όσα τα υποσύνολα ενός συνόλου με $n-1$ στοιχεία). Επομένως $m = n2^{n-1}$.

9. (α) Έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n+m}{k} x^k &= (x+1)^{n+m} = (x+1)^n (x+1)^m \\ &= \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \right) \left(\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x^j \right). \end{aligned}$$

Η προτεινόμενη ισότητα προκύπτει εξισώνοντας τους συντελεστές του x^k στο πρώτο και το τελευταίο μέλος της προηγούμενης αλυσίδας ισοτήτων.

(β) Έστω S και T σύνολα ξένα μεταξύ τους με n και m στοιχεία, αντίστοιχα. Το πλήθος των k -υποσυνόλων του $S \cup T$ είναι ίσο με $\binom{n+m}{k}$. Ένα τέτοιο υποσύνολο είναι ίσο με την ένωση ενός i -υποσυνόλου του S , το οποίο μπορεί να επιλεγεί με $\binom{n}{i}$ τρόπους, και ενός $(k-i)$ -υποσυνόλου του T , το οποίο μπορεί να επιλεγεί με $\binom{m}{k-i}$ τρόπους, για κάποιο $0 \leq i \leq k$. Συνεπώς το πλήθος των k -υποσυνόλων του $S \cup T$ είναι επίσης ίσο με το προτεινόμενο άθροισμα.

10. (α) Χρησιμοποιούμε τη σχέση $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ και επαγωγή στο n , με το k σταθερό.

(β) Γνωρίζουμε ότι $\binom{n}{k}$ είναι το πλήθος των k -υποσυνόλων S του $[n]$. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν m είναι το μέγιστο στοιχείο του S , τότε $k \leq m \leq n$ και ότι υπάρχουν $\binom{m-1}{k-1}$ k -υποσύνολα του $[n]$ με μέγιστο στοιχείο το m .

11. (α) Προκύπτει από τη σχέση $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$ και επαγωγή στο m , με το n σταθερό.

(β) Παρατηρούμε ότι ο ακέραιος $(-1)^k \binom{n}{k}$ είναι ίσος με το συντελεστή του x^m στο πολυώνυμο $(1-x)^n x^{m-k}$. Επομένως, το αριστερό μέλος της προτεινόμενης ισότητας είναι ίσο με το συντελεστή του x^m στο άθροισμα $\sum_{k=0}^m (1-x)^n x^{m-k}$. Όμως

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m (1-x)^n x^{m-k} &= (1-x)^n \frac{1-x^{m+1}}{1-x} = (1-x)^{n-1} (1-x^{m+1}) \\ &= (1-x)^{n-1} - x^{m+1} p(x) \end{aligned}$$

για κάποιο πολυώνυμο $p(x)$. Συνεπώς ο συντελεστής του x^m στο παραπάνω άθροισμα είναι ίσος με $(-1)^m \binom{n-1}{m}$, όπως το θέλαμε. Μια ακόμη λύση, που χρησιμοποιεί μόνο τις βασικές αρχές απαρίθμησης, μπορεί να δοθεί γενικεύοντας τη δεύτερη απόδειξη του μέρους (δ) του Πορίσματος 1.3.1 (για τις λεπτομέρειες, βλ. π.χ. την Παράγραφο 1.3.2 του [2]).

12. (α) Υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} (1+x)^{2n} &= (1+2x+x^2)^n = (1+x(x+2))^n \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (x+2)^i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} 2^{i-j} x^j \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{n}{i} \binom{i}{j} 2^{i-j} x^{i+j}. \end{aligned}$$

Η ζητούμενη ταυτότητα προκύπτει εξισώνοντας τους συντελεστές του x^k στα δύο ακραία μέλη της προηγούμενης ακολουθίας ισοτήτων.

(β) Θεωρούμε το σύνολο $\{1, -1, 2, -2, \dots, n, -n\}$. Το πλήθος των k -υποσυνόλων του συνόλου αυτού είναι ίσο με $\binom{2n}{k}$. Τα υποσύνολα αυτά μπορούν να απαριθμηθούν και ως εξής. Επιλέγουμε πρώτα το σύνολο T των ακεραίων $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ με $\{j, -j\} \cap S \neq \emptyset$. Υπάρχουν $\binom{n}{i}$ τέτοιες επιλογές, όπου i είναι το πλήθος των στοιχείων του T . Παρατηρούμε τώρα ότι αφού το S έχει k στοιχεία, υπάρχουν $k-i$ στοιχεία $j \in T$ με $\{j, -j\} \subseteq S$. Άρα υπάρχουν $\binom{k-i}{i}$ επιλογές για τα στοιχεία αυτά και 2^{2i-k} επιλογές για τα υπόλοιπα $2i-k$ στοιχεία του S . Επομένως, το πλήθος των k -υποσυνόλων που ζητάμε να απαριθμήσουμε είναι ίσο με το δεξιό μέλος της προτεινόμενης ισότητας.

13. Υπάρχουν $\binom{n-k+1}{k}$ τέτοια υποσύνολα. Πράγματι, αν το $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq [n]$, έστω με $a_1 < a_2 < \dots < a_k$, δεν περιέχει δύο διαδοχικούς ακεραίους, τότε

$$1 \leq a_1 < a_2 - 1 < a_3 - 2 < \dots < a_k - k + 1 \leq n - k + 1$$

και συνεπώς το σύνολο $T = \{a_1, a_2 - 1, \dots, a_k - k + 1\}$ είναι k -υποσύνολο του $[n - k + 1]$. Για παράδειγμα αν $n = 20$, $k = 6$ και $S = \{2, 5, 10, 12, 17, 19\}$, τότε $T = \{2, 4, 8, 9, 13, 14\}$. Κάθε k -υποσύνολο του $[n - k + 1]$ προκύπτει ακριβώς μία φορά με αυτόν τον τρόπο: το $T = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ με $1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_k \leq n - k + 1$ προκύπτει από το $S = \{b_1, b_2 + 1, \dots, b_k + k - 1\}$. Συμπεραίνουμε ότι το πλήθος των k -υποσυνόλων του $[n]$ που δεν περιέχουν δύο διαδοχικούς ακεραίους είναι ίσο με το πλήθος των k -υποσυνόλων του $[n - k + 1]$, δηλαδή με $\binom{n-k+1}{k}$.

14. (α) Υπάρχουν ακριβώς 3^n τέτοια ζεύγη (A, B) . Πράγματι, για $A, B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ έχουμε $A \cap B = \emptyset$ αν και μόνο αν για κάθε $1 \leq i \leq n$ ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} i \in A \text{ και } i \notin B, \\ i \notin A \text{ και } i \in B, \\ i \notin A \text{ και } i \notin B. \end{aligned}$$

Τα σύνολα A και B καθορίζονται πλήρως επιλέγοντας ένα από τα παραπάνω τρία ενδεχόμενα για κάθε i . Π.χ. αν $n = 4$ και $1 \notin A$, $1 \in B$, $2 \notin A$, $2 \notin B$, $3 \in A$, $3 \notin B$, $4 \notin A$ και $4 \in B$, τότε $A = \{3\}$ και $B = \{1, 4\}$. Έχουμε τρεις επιλογές για κάθε $1 \leq i \leq n$ και επομένως υπάρχουν 3^n επιλογές για το ζεύγος (A, B) ώστε $A \cap B = \emptyset$.

(γ) Σκεπτόμενοι όπως στο (α), βρίσκουμε ότι για κάθε $1 \leq i \leq n$ υπάρχουν $2^k - 1$ τρόποι να επιλέξουμε σε ποια από το υποσύνολο A_j ανήκει το i (αποκλείοντας την

περίπτωση το i να ανήκει σε καθένα από τα A_1, A_2, \dots, A_k). Συνεπώς υπάρχουν $(2^k - 1)^n$ τέτοιες ακολουθίες υποσυνόλων του $[n]$.

(δ) Το ζητούμενο πλήθος είναι επίσης ίσο με $(2^k - 1)^n$ αφού, σκεπτόμενοι όπως στο (γ), πρέπει να αποκλείσουμε την περίπτωση το i να μην ανήκει σε κανένα από τα A_1, A_2, \dots, A_k , για $1 \leq i \leq n$. Το ερώτημα (β) είναι η ειδική περίπτωση $k = 2$.

15. (α) Παριστάνοντας με A ή B ένα βήμα με κατεύθυνση ανατολικά ή βόρεια, δηλαδή $(1, 0)$ ή $(0, 1)$, αντίστοιχα, ένα τέτοιο μονοπάτι μετασχηματίζεται σε μια ακολουθία μήκους $m + n$ με m στοιχεία ίσα με A και n στοιχεία ίσα με B . Αντίστροφα, κάθε τέτοια ακολουθία προέρχεται από ένα ακριβώς μονοπάτι. Για παράδειγμα, για $m = n = 2$ τα μονοπάτια του Σχήματος 1.5, με τη σειρά που εμφανίζονται εκεί, αντιστοιχούν στις ακολουθίες (A, A, B, B) , (A, B, A, B) , (A, B, B, A) , (B, A, A, B) , (B, A, B, A) και (B, B, A, A) . Υπάρχουν $\binom{m+n}{m}$ τέτοιες ακολουθίες, όσες οι τρόποι να επιλέξουμε m από τις θέσεις $1, 2, \dots, m+n$ στις οποίες βρίσκονται τα A . Άρα, υπάρχουν επίσης $\binom{m+n}{m}$ μονοπάτια με τις δοσμένες ιδιότητες.

(β) Υπάρχουν επίσης $\binom{m+n}{m}$ τέτοιες ακολουθίες. Για να δούμε γιατί, αρκεί να περιγράψουμε μια 1-1 αντιστοιχία με το σύνολο των μονοπατιών στο (α). Πράγματι, καταγράφοντας το πλήθος των μοναδιαίων τετραγώνων στις γραμμές $1, 2, \dots, n$ (μετρώντας από το βορρά προς το νότο) του τμήματος του $m \times n$ ορθογωνίου που βρίσκεται πάνω από ένα συγκεκριμένο μονοπάτι, παίρνουμε μια ακολουθία $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ με τις δοσμένες ιδιότητες. Για παράδειγμα για $m = n = 2$, τα μονοπάτια του Σχήματος 1.5, με τη σειρά που εμφανίζονται εκεί, αντιστοιχούν στις ακολουθίες $(2, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 1)$, (2) , (1) και \emptyset . Αφήνεται στον αναγνώστη να επαληθεύσει ότι η απεικόνιση που περιγράψαμε είναι πράγματι 1-1 αντιστοιχία.

16. Η απάντηση είναι $n! \binom{n-1}{k-1}$. Μια τέτοια διάταξη προκύπτει από μια αναδιάταξη του $[n]$, έστω $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, αν αυτή «κοπεί» σε $k-1$ σημεία μεταξύ διαδοχικών σ_i για να δημιουργηθούν οι k στήλες. Για παράδειγμα για $n = 10$ και $k = 4$, η διάταξη

$$\begin{array}{cccc} 4 & 9 & 6 & 2 \\ 8 & 1 & & 10 \\ & 7 & & 3 \\ & 5 & & \end{array}$$

προκύπτει από την αναδιάταξη $(4, 8, 9, 1, 7, 5, 6, 2, 10, 3)$ κάνοντας τρεις τομές ως εξής:

$$4 \ 8 \ | \ 9 \ 1 \ 7 \ 5 \ | \ 6 \ | \ 2 \ 10 \ 3.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι υπάρχουν $n!$ αναδιατάξεις σ του $\{1, 2, \dots, n\}$ και $\binom{n-1}{k-1}$ τρόποι να γίνουν οι $k-1$ τομές στις $n-1$ θέσεις μεταξύ διαδοχικών στοιχείων της σ .

17. (α) Αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι υπάρχουν a_{n-1} τέτοιες συνθέσεις (r_1, r_2, \dots, r_k) του n με $r_k = 1$ και a_{n-2} με $r_k = 2$.

(β) Έστω σύνθεση $\rho = (r_1, r_2, \dots, r_k)$ του n , κάθε μέρος της οποίας είναι ίσο με 1 ή 2, και έστω $\varphi(\rho) = \{j : r_j = 2\}$. Για παράδειγμα αν $n = 7$ και $\rho = (2, 1, 1, 2, 1)$, τότε $\varphi(\rho) = \{1, 4\}$. Από τη σχέση $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$ συμπεραίνουμε ότι $\#\varphi(\rho) = n - k$ και συνεπώς ότι το $\varphi(\rho)$ είναι $(n-k)$ -υποσύνολο του $[k]$. Παρατηρούμε επίσης ότι για

κάθε $(n-k)$ -υποσύνολο S του $[k]$ υπάρχει μοναδική διαμέριση ρ του n με k μέρη, το καθένα ίσο με 1 ή 2, τέτοια ώστε $\varphi(\rho) = S$. Έπεται ότι $a_n = \sum_{k \geq n/2} \binom{n}{k}$, δηλαδή ο ζητούμενος τύπος.

(γ) Έστω B_n το σύνολο των υποσυνόλων του $[n-1]$ που δεν περιέχουν διαδοχικούς ακεραίους. Από την Άσκηση 13 γνωρίζουμε ότι $\binom{n-i}{i}$ από τα i -υποσύνολα του $[n-1]$ ανήκουν στο B_n , οπότε $\#B_n = \sum_{i \leq n/2} \binom{n-i}{i} = a_n$. Μπορείτε να βρείτε μια 1-1 αντιστοιχία του B_n με το σύνολο των συνθέσεων του n με μέρη 1 ή 2;

18. Δείξτε ότι το προτεινόμενο άθροισμα είναι ίσο με $\binom{n}{k}$ για $0 \leq k \leq n$ με επαγωγή στο k , ή παρατηρώντας ότι

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \frac{n-2i+1}{n-i+1} \binom{n}{i} &= \sum_{i=0}^k \left(1 - \frac{i}{n-i+1}\right) \binom{n}{i} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} - \sum_{i=0}^k \frac{i}{n-i+1} \binom{n}{i} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} - \sum_{i=1}^k \binom{n}{i-1} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

19. (α) Έστω a_n το άθροισμα το οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε. Παρατηρούμε ότι

$$(x+1)^n(x-1)^n = \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i\right) \left(\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} x^j\right)$$

και συνεπώς ο συντελεστής του x^n στο πολυώνυμο $(x+1)^n(x-1)^n$ είναι ίσος με

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2 = (-1)^n a_n.$$

Προφανώς όμως έχουμε $(x+1)^n(x-1)^n = (x^2-1)^n$ και ο συντελεστής του x^n στο $(x^2-1)^n$ είναι ίσος με 0, αν ο n είναι περιττός και με $(-1)^{n/2} \binom{n}{n/2}$, αν ο n είναι άρτιος. Προκύπτει ότι

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός} \\ (-1)^{n/2} \binom{n}{n/2}, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος.} \end{cases}$$

(β) Έστω n άνδρες και n γυναίκες, από τους οποίους θέλουμε να επιλέξουμε μια επιτροπή n ατόμων. Ονομάζουμε μια επιτροπή *άρτια* ή *περιττή* αν περιέχει άρτιο ή περιττό πλήθος γυναικών, αντίστοιχα. Το πλήθος των άρτιων επιτροπών είναι ίσο με

$$\binom{n}{0} \binom{n}{n} + \binom{n}{2} \binom{n}{n-2} + \dots$$

ενώ των περιττών είναι ίσο με

$$\binom{n}{1} \binom{n}{n-1} + \binom{n}{3} \binom{n}{n-3} + \dots$$

Επομένως θέλουμε να δείξουμε ότι το πλήθος των άρτιων επιτροπών μείον το πλήθος των περιττών επιτροπών είναι ίσο με 0, αν ο n είναι περιττός και με $(-1)^{n/2} \binom{n}{n/2}$, αν ο n είναι άρτιος. Αυτό θα το πετύχουμε ζευγαρώνοντας άρτιες επιτροπές με περιττές επιτροπές, έτσι ώστε να μην υπάρχει επιτροπή χωρίς τάρι αν ο n είναι περιττός και να υπάρχουν ακριβώς $\binom{n}{n/2}$ επιτροπές χωρίς τάρι αν ο n είναι άρτιος, όλες άρτιες ή περιττές ανάλογα με το αν ο $n/2$ είναι άρτιος ή περιττός. Θεωρούμε ότι άνδρες και γυναίκες είναι παντρεμένοι σε ζευγάρια, τα οποία απαριθμούμε ως $1, 2, \dots, n$. Αν μια επιτροπή αποτελείται μόνο από ζευγάρια, το οποίο μπορεί να γίνει με $\binom{n}{n/2}$ τρόπους αν ο n είναι άρτιος και είναι αδύνατο αν ο n είναι περιττός, τότε την επιτροπή αυτή δεν τη ζευγαρώνουμε με καμία άλλη. Διαφορετικά, ζευγαρώνουμε την επιτροπή με αυτή που προκύπτει αντικαθιστώντας το άτομο στην επιτροπή με το μικρότερο αριθμό ζεύγους i για το οποίο ο σύζυγος, ή η σύζυγος, δεν ανήκει στην επιτροπή με τη σύζυγο, ή το σύζυγο, του ίδιου ατόμου. Προφανώς με αυτόν τον τρόπο άρτιες επιτροπές ζευγαρώνονται με περιττές επιτροπές και αντίστροφα. Αν ο n είναι περιττός, τότε δεν υπάρχει επιτροπή χωρίς τάρι ενώ αν ο n είναι άρτιος, τότε υπάρχουν ακριβώς $\binom{n}{n/2}$ επιτροπές χωρίς τάρι, όλες άρτιες αν ο $n/2$ είναι άρτιος και περιττές αν ο $n/2$ είναι περιττός.

20. (α) Έστω $S = \{1, 2, \dots, 3000\}$ και έστω A_1, A_2 και A_3 τα υποσύνολα του S που αποτελούνται από τα ακέραια πολλαπλάσια των 2, 3 και 5, αντίστοιχα. Τότε τα $A_1 \cap A_2, A_1 \cap A_3, A_2 \cap A_3$ και $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ αποτελούνται από τα ακέραια πολλαπλάσια των 6, 10, 15 και 30 στο S , αντίστοιχα, και συνεπώς $\#(A_1 \cap A_2) = 500, \#(A_1 \cap A_3) = 300, \#(A_2 \cap A_3) = 200$ και $\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 100$. Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, το πλήθος των ακεραίων που ζητάμε είναι το

$$\#(S - A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3000 - 1500 - 1000 - 600 + 500 + 300 + 200 - 100 = 800.$$

(β) Έστω S το σύνολο των 5-υποσυνόλων του συνόλου $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ και A_1, A_2, A_3 τα υποσύνολα του S που αποτελούνται από τα στοιχεία του S που περιέχουν τα σύνολα $\{1, 2\}, \{3, 4\}$ και $\{5, 6\}$, αντίστοιχα. Έχουμε $\#S = \binom{10}{5} = 252$ και $\#A_1 = \#A_2 = \#A_3 = \binom{8}{3} = 56$. Επίσης $\#(A_1 \cap A_2) = \#(A_1 \cap A_3) = \#(A_2 \cap A_3) = 6$ και $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$. Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, το πλήθος των υποσυνόλων που ζητάμε είναι το

$$\#(S - A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 252 - 3 \cdot 56 + 3 \cdot 6 - 0 = 102.$$

(γ) Έστω S το σύνολο των αναδιατάξεων του συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και A_1, A_2, A_3 τα υποσύνολα του S που αποτελούνται από τις αναδιατάξεις $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6)$ με $\sigma_1 \in \{1, 2\}, \sigma_2 \in \{3, 4\}$ και $\sigma_3 \in \{5, 6\}$, αντίστοιχα. Έχουμε $\#S = 6!$ και $\#A_1 = \#A_2 = \#A_3 = 2 \cdot 5!$. Επίσης $\#(A_1 \cap A_2) = 2 \cdot 2 \cdot 4!$, διότι για μια αναδιάταξη $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6)$ στο $A_1 \cap A_2$ έχουμε δύο επιλογές για το $\sigma_1 \in \{1, 2\}$, δύο επιλογές

για το $\sigma_2 \in \{3, 4\}$ και 4! τρόπους να επιλέξουμε τα υπόλοιπα στοιχεία $\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$. Ομοίως βρίσκουμε $\#(A_1 \cap A_3) = \#(A_2 \cap A_3) = 2 \cdot 2 \cdot 5!$ και $\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3!$. Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, το πλήθος των αναδιατάξεων που ζητάμε είναι το

$$\#(S - A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 6! - 3 \cdot 2 \cdot 5! + 3 \cdot 4 \cdot 4! - 8 \cdot 3! = 240.$$

Με το ίδιο σκεπτικό βρίσκουμε ότι το πλήθος των αναδιατάξεων $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2n})$ του συνόλου $[2n]$, τέτοιων ώστε $\sigma_i \notin \{2i - 1, 2i\}$ για $1 \leq i \leq n$, είναι ίσο με

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 2^k (2n - k)! = n! \sum_{k=0}^n (-2)^k \frac{n!}{k!} \binom{2n - k}{n}.$$

21. (α) Για να ορίσουμε μια αναδιάταξη $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ του $[n]$ με ακριβώς k σταθερά σημεία, υπάρχουν $\binom{n}{k}$ τρόποι να επιλέξουμε τα σταθερά σημεία i_1, \dots, i_k της σ και D_{n-k} τρόποι να αναδιατάξουμε τα υπόλοιπα $n - k$ στοιχεία του συνόλου $[n]$, έτσι ώστε να ισχύει $\sigma_j \neq j$ για $j \in [n] \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$. Η ζητούμενη σχέση έπεται από την πολλαπλασιαστική αρχή.

(β) Παρατηρούμε ότι κάθε αναδιάταξη του $[n]$ έχει k σταθερά σημεία για ένα μοναδικό ακέραιο $0 \leq k \leq n$. Επομένως, σύμφωνα με την προσθετική αρχή, το δοσμένο άθροισμα είναι ίσο με το συνολικό πλήθος των αναδιατάξεων του $[n]$, δηλαδή με $n!$.

(γ) Συμβολίζουμε με S το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (σ, i) , όπου σ είναι αναδιάταξη του $[n]$ και i είναι σταθερό σημείο της σ . Έχουμε $\#S = \sum_{k=0}^n kf(n, k)$ διότι υπάρχουν $f(n, k)$ αναδιατάξεις του $[n]$ με k σταθερά σημεία και για οποιαδήποτε τέτοια αναδιάταξη σ , υπάρχουν ακριβώς k το πλήθος ακέραιοι i με $(\sigma, i) \in S$. Παρατηρούμε επίσης ότι για κάθε $1 \leq i \leq n$ υπάρχουν ακριβώς $(n - 1)!$ αναδιατάξεις σ του $[n]$ με $(\sigma, i) \in S$ (όσες και αναδιατάξεις του συνόλου $[n] \setminus \{i\}$). Έπεται ότι $\#S = n \cdot (n - 1)! = n!$ και συνεπώς η ζητούμενη ισότητα.

(δ) Μια απόδειξη παρόμοια με εκείνη στο ερώτημα (γ) μπορεί να δοθεί αντικαθιστώντας το S με το σύνολο των διατεταγμένων τριάδων (σ, i, j) , όπου σ είναι αναδιάταξη του $[n]$ και i, j είναι διακεκριμένα σταθερά σημεία της σ . Οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη.

22. Το (α) προκύπτει άμεσα από τον τύπο της Πρότασης 1.4.2 για το D_n και το (γ) από το συνδυασμό των (α) και (β) της Άσκησης 21. Μια συνδυαστική απόδειξη του (β) είναι η εξής. Έστω A_n το σύνολο των αναδιατάξεων του $[n]$ χωρίς σταθερά σημεία και για $1 \leq i < n$, έστω $A_{n,i}$ το σύνολο των αναδιατάξεων $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in A_n$ με $\sigma_n = i$. Παρατηρούμε ότι τα σύνολα $A_{n,i}$ είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους και η ένωσή τους είναι το A_n . Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι $\#A_{n,i} = D_{n-1} + D_{n-2}$ για κάθε i . Προφανώς υπάρχουν D_{n-2} αναδιατάξεις $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in A_{n,i}$ με $\sigma_i = n$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $B_{n,i}$ των αναδιατάξεων $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in A_{n,i}$ με $\sigma_i \neq n$ έχει D_{n-1} στοιχεία. Έχουμε $\#B_{n,i} = \#B_{n,n-1}$ για κάθε $1 \leq i \leq n - 1$ (ανταλλάσσουμε τους ρόλους των i και $n - 1$) και συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $i = n - 1$. Για $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in B_{n,n-1}$, δηλαδή $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in A_n$ με $\sigma_n = n - 1$ και $\sigma_{n-1} \neq n$, έστω $\varphi(\sigma)$ η αναδιάταξη του $[n - 1]$ που προκύπτει από τη $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1})$ αντικαθιστώντας τον όρο που είναι

ίσος με n με το $n - 1$. Η απεικόνιση $\varphi : B_{n,n-1} \rightarrow A_{n-1}$ είναι αμφιμονοσήμαντη (εξηγήστε γιατί) και συνεπώς $\#B_{n,n-1} = D_{n-1}$, όπως το θέλαμε.

23. (α) Παρατηρούμε ότι για κάθε $\sigma \in \Omega_n$ υπάρχει μοναδική αναδιάταξη $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ του συνόλου $[n]$ και επιλογή προσήμων $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ για $1 \leq i \leq n$, ώστε να ισχύει $\sigma(i) = \varepsilon_i \tau_i$ (οπότε και $\sigma(-i) = -\varepsilon_i \tau_i$) για $1 \leq i \leq n$. Αφού υπάρχουν $n!$ επιλογές για την τ και 2^n επιλογές για τα πρόσημα, συμπεραίνουμε ότι $g(n) = \#\Omega_n = 2^n n!$ για κάθε $n \geq 1$.

(β) Σύμφωνα με το (α), για τυχαίους δείκτες $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, το πλήθος των $\sigma \in \Omega_n$ με $\sigma(i_j) = i_j$ για $1 \leq j \leq k$ είναι ίσο με $2^{n-k}(n-k)!$. Επομένως, ο τύπος (1.9) για το $f(n)$ προκύπτει από την αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού όπως στην απόδειξη της Πρότασης 1.4.2.

(γ) Από τα (β) και (γ) συνάγουμε ότι

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k} (n-k)! = \sum_{k=0}^n \frac{(-1/2)^k}{k!}$$

και συνεπώς ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1/2)^k}{k!} = e^{-1/2}.$$

24. Έστω $A(n, k)$ το σύνολο των k -υποσυνόλων του $[2n]$ τα οποία έχουν τουλάχιστον ένα κοινό στοιχείο με καθένα από τα σύνολα $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2n-1, 2n\}$. Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού προκύπτει (πώς;) ότι το πλήθος των στοιχείων του $A(n, k)$ είναι ίσο με το αριστερό μέλος της (1.10). Προφανώς το σύνολο $A(n, k)$ είναι κενό αν $k < n$, ενώ διαφορετικά για κάθε $S \in A(n, k)$ υπάρχουν ακριβώς $k - n$ δείκτες $j \in [n]$ για τους οποίους το S περιέχει και τα δύο στοιχεία του $\{2j-1, 2j\}$. Υπάρχουν $\binom{n}{k-n}$ τρόποι να επιλέξει κανείς αυτούς τους δείκτες και 2^{2n-k} τρόποι να επιλέξει τα υπόλοιπα $2n-k$ στοιχεία του S , ένα από καθένα από τα $2n-k$ σύνολα της μορφής $\{2j-1, 2j\}$ που δεν περιέχονται στο S . Συνεπώς το πλήθος των στοιχείων του $A(n, k)$ είναι ίσο και με το δεξιό μέλος της (1.10).

25. (α) Προσθέτουμε τις ευθείες στο επίπεδο διαδοχικά, με τυχαία σειρά, και θεωρούμε το πλήθος των περιοχών του επιπέδου που δημιουργούνται σε κάθε στάδιο. Στο αρχικό στάδιο έχουμε μία περιοχή και καμιά ευθεία. Προσθέτοντας την i -οστή ευθεία δημιουργούνται i επιπλέον περιοχές, όσες και τα τμήματα στα οποία χωρίζεται η ευθεία αυτή από τις $i-1$ προηγούμενες. Στο τελευταίο στάδιο, επομένως, έχουν δημιουργηθεί $1 + \sum_{i=1}^n i = 1 + n + \binom{n}{2}$ περιοχές.

(β) Σκεπτόμαστε όπως στο (α) και προσθέτουμε τα επίπεδα στο χώρο διαδοχικά, με τυχαία σειρά. Προσθέτοντας το i -οστό επίπεδο δημιουργούνται, σύμφωνα με το (α), $1 + (i-1) + \binom{i-1}{2}$ επιπλέον (τριδιάστατες) περιοχές, όσες και οι (δισδιάστατες) περιοχές στις οποίες χωρίζεται το επίπεδο αυτό από τις τομές του με τα $i-1$ προηγούμενα. Στο τελευταίο στάδιο, επομένως, έχουν δημιουργηθεί

$$1 + \sum_{i=1}^n \left\{ 1 + (i-1) + \binom{i-1}{2} \right\} = 1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$$

περιοχές, όπου για την άθροιση χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα της Άσκησης 10 για $k = 2$ και $k = 3$.

Κεφάλαιο 2

Απεικονίσεις, διαμερίσεις συνόλων και μερικές διατάξεις

Πόσα το πολύ υποσύνολα ενός συνόλου με n στοιχεία μπορούμε να επιλέξουμε, ώστε οποιαδήποτε δύο από τα υποσύνολα αυτά να έχουν ένα τουλάχιστον κοινό στοιχείο; Ποιό είναι το μέγιστο δυνατό μήκος μιας ακολουθίας πραγματικών αριθμών, αν αυτή δεν περιέχει μονότονη υποακολουθία μήκους n ; Ερωτήματα αυτού του είδους μπορούν να απαντηθούν με κατάλληλη εφαρμογή απλών αλλά εξαιρετικά χρήσιμων αρχών, όπως η αρχή του περιστερώννα, και με τη μελέτη θεμελιωδών εννοιών και δομών των διακριτών μαθηματικών, όπως οι διαμερίσεις συνόλων (σχέσεις ισοδυναμίας) και οι μερικές διατάξεις. Το παρόν κεφάλαιο αποτελεί μια σύντομη εισαγωγή σε αυτά τα θέματα.

2.1 Η αρχή του περιστερώννα

Υπενθυμίζουμε ότι για απεικόνιση συνόλων $f : A \rightarrow B$ και $y \in B$, συμβολίζουμε με

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \text{ και με} \\ f^{-1}(y) = \{x \in A : f(x) = y\}$$

την εικόνα του A και την αντίστροφη εικόνα του $\{y\}$, μέσω της f , αντίστοιχα. Όπως διαπιστώσαμε μετά τον Ορισμό 1.4.1, η απεικόνιση f είναι αμφιμονοσήμαντη εάν και μόνο αν η f είναι ταυτόχρονα 1-1 και επί του B . Κατά συνέπεια, η επόμενη πρόταση είναι ισχυρότερη της Πρότασης 1.2.1.

Πρόταση 2.1.1 Έστω $f : A \rightarrow B$ απεικόνιση πεπερασμένων συνόλων.

(α) Αν η f είναι 1-1, τότε $\#A \leq \#B$.

(β) Αν η f είναι επί, τότε $\#A \geq \#B$.

Απόδειξη. (α) Έχουμε $\#A = \#f(A)$ από την Πρόταση 1.2.1, διότι η $f : A \rightarrow f(A)$ είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση. Έχουμε επίσης $\#f(A) \leq \#B$, διότι το $f(A)$ είναι υποσύνολο του B . Από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει το ζητούμενο.

(β) Αφού η f είναι επί, μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση $g : B \rightarrow A$ επιλέγοντας, για κάθε $y \in B$, ως $g(y)$ ένα οποιοδήποτε από τα στοιχεία $x \in A$ για τα οποία ισχύει $f(x) = y$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in A$ υπάρχει το πολύ ένα $y \in B$ με $g(y) = x$ (αφού αν υπάρχει τέτοιο $y \in B$, τότε είναι υποχρεωτικά το $y = f(x)$). Συνεπώς η απεικόνιση g είναι 1-1 και το ζητούμενο έπεται από το (α). \square

Το μέρος (α) της Πρότασης 2.1.1 εκφράζεται ισοδύναμα ως εξής. Αν $f : A \rightarrow B$ είναι απεικόνιση πεπερασμένων συνόλων και το A έχει περισσότερα στοιχεία από το B , τότε υπάρχουν διαφορετικά στοιχεία x_1, x_2 του A τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Σε πιο ελεύθερη ερμηνεία, αν $m + 1$ ή περισσότερα περιστέρια (τα στοιχεία του A) τοποθετηθούν σε m περιστέρωνες (τα στοιχεία του B), τότε δύο τουλάχιστον περιστέρια θα τοποθετηθούν στον ίδιο περιστέρωνα. Η χρησιμότητα της πρότασης αυτής, γνωστής ως «αρχή του περιστέρωνα», φαίνεται στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.1.1 Πόσα το πολύ υποσύνολα του συνόλου $[n]$ μπορούμε να επιλέξουμε, ώστε οποιαδήποτε δύο από τα υποσύνολα αυτά να έχουν ένα τουλάχιστον κοινό στοιχείο;

Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο μέγιστο πλήθος υποσυνόλων είναι ίσο με 2^{n-1} . Πράγματι, τα υποσύνολα του $[n]$ που περιέχουν ένα συγκεκριμένο στοιχείο του $[n]$, π.χ. το 1, είναι 2^{n-1} σε πλήθος και ασφαλώς οποιαδήποτε δύο από αυτά έχουν κοινό στοιχείο. Έστω ότι μας δίνονται τουλάχιστον $2^{n-1} + 1$ υποσύνολα του $[n]$ (τα στοιχεία του A). Θα δείξουμε ότι υπάρχουν δύο από αυτά, τα οποία είναι ξένα μεταξύ τους. Χωρίζουμε το σύνολο των υποσυνόλων του $[n]$ σε 2^{n-1} (μη διατεταγμένα) ζεύγη $\{S, \bar{S}\}$ (τα στοιχεία του B), όπου $\bar{S} = [n] \setminus S$ είναι το συμπλήρωμα του S στο $[n]$. Για παράδειγμα, για $n = 2$ έχουμε τα ζεύγη $\{\emptyset, \{1, 2\}\}$ και $\{\{1\}, \{2\}\}$. Καθένα από τα σύνολα που μας δόθηκαν ανήκει σε ένα και μόνο ζεύγος. Εφόσον μας δόθηκαν τουλάχιστον $2^{n-1} + 1$ υποσύνολα του $[n]$, από την αρχή του περιστέρωνα συμπεραίνουμε ότι δύο από αυτά ανήκουν στο ίδιο ζεύγος. Συνεπώς πρόκειται για ένα υποσύνολο S και το συμπλήρωμά του \bar{S} και προφανώς $S \cap \bar{S} = \emptyset$. \square

Παράδειγμα 2.1.2 Θα αποδείξουμε ότι σε μια συνάντηση m τυχαίων ατόμων, υπάρχουν δύο άτομα τα οποία έχουν το ίδιο πλήθος γνωστών (υποθέτουμε ότι αν ο a γνωρίζει τον b , τότε και ο b γνωρίζει τον a).

Έστω A το σύνολο των m ατόμων και έστω $f(x)$ το πλήθος των γνωστών του $x \in A$. Προφανώς ισχύει $0 \leq f(x) \leq m - 1$ για κάθε $x \in A$. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν ταυτόχρονα $a, b \in A$ με $f(a) = 0$ και $f(b) = m - 1$. Πράγματι, στην

περίπτωση αυτή ο a δε θα είχε κανένα γνωστό ενώ ο b θα γνώριζε όλους τους άλλους. Άρα ο b θα γνώριζε και τον a και επομένως ο a θα γνώριζε τον b , σε αντίθεση με την υπόθεση. Συνεπώς ορίζεται η απεικόνιση $f : A \rightarrow B$ με $B = \{0, 1, \dots, m-2\}$ ή $B = \{1, 2, \dots, m-1\}$. Σε κάθε περίπτωση ισχύει $\#B = m-1$ και $\#A = m$. Επομένως, σύμφωνα με την αρχή του περιστερώνα, υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$, δηλαδή υπάρχουν δύο στοιχεία του A με το ίδιο πλήθος γνωστών. \square

Παράδειγμα 2.1.3 Θα αποδείξουμε ότι μεταξύ $m+1$ τυχαίων ακεραίων υπάρχουν δύο, η διαφορά των οποίων διαιρείται με το m . Έστω A σύνολο με στοιχεία $m+1$ ακεραίους. Για $x \in A$, συμβολίζουμε με $f(x)$ το υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης του x με το m (Πρόταση 5.0.2). Έχουμε $0 \leq f(x) \leq m-1$ για κάθε $x \in A$ και συνεπώς ορίζεται η απεικόνιση $f : A \rightarrow \{0, 1, \dots, m-1\}$. Αφού $\#A = m+1$, από την αρχή του περιστερώνα έπεται ότι υπάρχουν διαφορετικά στοιχεία x_1, x_2 του A με $f(x_1) = f(x_2)$. Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε $x_1 = q_1m + r$ και $x_2 = q_2m + r$, όπου $r = f(x_1) = f(x_2) \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ και $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$. Επομένως η διαφορά $x_1 - x_2 = (q_1 - q_2)m$ διαιρείται με το m . \square

Μια χρήσιμη γενίκευση της αρχής του περιστερώνα είναι η εξής πρόταση:

Πρόταση 2.1.2 Αν $f : A \rightarrow B$ είναι απεικόνιση πεπερασμένων συνόλων με $\#B = m$ και $\#A \geq mn + 1$, τότε υπάρχουν $n+1$ διακεκριμένα στοιχεία x_1, x_2, \dots, x_{n+1} του A τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_{n+1})$.

Απόδειξη. Έστω ότι δεν υπάρχουν τέτοια στοιχεία του A . Τότε $\#f^{-1}(y) \leq n$ για κάθε $y \in B$. Παρατηρώντας (όπως στην απόδειξη της Πρότασης 1.2.3) ότι το A είναι η ξένη ένωση των υποσυνόλων του της μορφής $f^{-1}(y)$ για $y \in B$, από την Πρόταση 1.2.2 παίρνουμε

$$\#A = \# \bigcup_{y \in B} f^{-1}(y) = \sum_{y \in B} \#f^{-1}(y) \leq mn,$$

σε αντίφαση με την υπόθεση. \square

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Εφαρμόζοντας την προηγούμενη πρόταση για $m = 3$ και $n = 2$ προκύπτει ότι αν $f : A \rightarrow \{1, 2, 3\}$ είναι τυχαία απεικόνιση και $\#A = 7$, τότε υπάρχουν διακεκριμένα στοιχεία x_1, x_2, x_3 του A με $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$. \square

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Σκεπτόμενοι όπως στο Παράδειγμα 2.1.3 και εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.1.2 για $n = 2$, βρίσκουμε ότι μεταξύ $2m+1$ τυχαίων ακεραίων μπορούμε πάντοτε να επιλέξουμε τρεις, έστω x_1, x_2, x_3 , ώστε οι διαφορές $x_1 - x_2$, $x_1 - x_3$ και $x_2 - x_3$ να διαιρούνται με το m . \square

2.2 Διαμερίσεις και σχέσεις ισοδυναμίας

Όπως έγινε σαφές στην Παράγραφο 2.1, η αρχή του περιστέρωνα μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: Αν ένα σύνολο με $m + 1$ στοιχεία διαμερισθεί σε m ή λιγότερα μέρη, τότε κάποιο από τα μέρη αυτά περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία. Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε λεπτομερέστερα την έννοια της διαμέρισης ενός συνόλου S και κάποιους από τους ισοδύναμους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να περιγράψουμε την έννοια αυτή.

Ορισμός 2.2.1 Διαμέριση του συνόλου S λέγεται ένα σύνολο $\pi = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ μη κενών υποσυνόλων του S , τα οποία ανά δύο είναι ξένα μεταξύ τους και έχουν ένωση ίση με S . Τα υποσύνολα B_i λέγονται μέρη της π .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Έστω σύνολο $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ με έξι στοιχεία. Μια διαμέριση του S είναι η $\{\{a, d\}, \{b, e\}, \{c, f\}\}$. Μια άλλη είναι η $\{\{a, e\}, \{b\}, \{c, d, f\}\}$. \square

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Έστω Ω το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $[n]$. Τα 2^{n-1} σύνολα της μορφής $\{S, \bar{S}\}$ που θεωρήσαμε στο Παράδειγμα 2.1.1, όπου $S \subseteq [n]$ και $\bar{S} = [n] \setminus S$ είναι το συμπλήρωμα του S στο $[n]$, αποτελούν τα μέρη μιας διαμέρισης π του Ω . Για $n = 2$ έχουμε $\pi = \{\{\emptyset, \{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{2\}\}\}$. \square

Η έννοια της διαμέρισης ενός συνόλου S μπορεί να περιγραφεί διαφορετικά με την έννοια της σχέσης ισοδυναμίας στο S . Μια γενικότερη έννοια είναι η εξής: Διμελής σχέση στο S λέγεται ένα υποσύνολο R του καρτεσιανού γινομένου $S \times S$. Για $a, b \in S$ με $(a, b) \in R$, γράφουμε $a R b$ και λέμε ότι το a σχετίζεται με το b ως προς τη διμελή σχέση R . Η έννοια της διμελούς σχέσης στο S γενικεύει την έννοια της απεικόνισης $f : S \rightarrow S$. Έτσι, ενώ με μια απεικόνιση $f : S \rightarrow S$ κάθε στοιχείο a του S σχετίζεται με ακριβώς ένα στοιχείο του S , το $b = f(a)$, με μια διμελή σχέση $R \subseteq S \times S$ ένα στοιχείο του S μπορεί να σχετίζεται με περισσότερα από ένα ή και με κανένα στοιχείο του S .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Αν $S = \{a, b, c, d\}$ και $R = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, d), (d, a)\}$, τότε το a σχετίζεται με δύο στοιχεία του S , τα b και c , ενώ το c δε σχετίζεται με κανένα στοιχείο του S . \square

Ορισμός 2.2.2 Μια διμελής σχέση \sim στο σύνολο S λέγεται σχέση ισοδυναμίας αν για όλα τα $a, b, c \in S$ ισχύουν τα εξής:

- (i) $a \sim a$ (ανακλαστική ιδιότητα),
- (ii) αν $a \sim b$, τότε $b \sim a$ (συμμετρική ιδιότητα),
- (iii) αν $a \sim b$ και $b \sim c$, τότε $a \sim c$ (μεταβατική ιδιότητα).

Λέμε ότι το a είναι ισοδύναμο με το b (ως προς τη σχέση \sim), αν $a \sim b$.

Δοσμένης μιας διαμέρισης π του συνόλου S , θεωρούμε τη διμελή σχέση στο S , την οποία συμβολίζουμε με \sim_π , που ορίζεται ως εξής: για $a, b \in S$ θέτουμε $a \sim_\pi b$ αν τα a και b ανήκουν στο ίδιο μέρος της π .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Αν $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ και $\pi = \{\{a, e\}, \{b\}, \{c, d, f\}\}$, τότε ισχύουν $a \sim_\pi e$, $e \sim_\pi a$, $b \sim_\pi b$, $c \sim_\pi d$, $d \sim_\pi f$ κ.ο.κ. \square

Είναι φανερό ότι για κάθε διαμέριση π του S , η \sim_π είναι σχέση ισοδυναμίας στο S . Αντίστροφα, κάθε σχέση ισοδυναμίας \sim στο S ορίζει μια διαμέριση π του S για την οποία οι \sim_π και \sim ταυτίζονται. Πιο συγκεκριμένα, κλάση ισοδυναμίας του $a \in S$ λέγεται το υποσύνολο

$$C_a = \{x \in S : x \sim a\}$$

του S που αποτελείται από όλα τα ισοδύναμα με το a στοιχεία του S . Αφού $a \sim a$, έχουμε $a \in C_a$ για κάθε $a \in S$. Κατά συνέπεια οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι μη κενές και η ένωσή τους είναι το σύνολο S . Επίσης, οι κλάσεις C_a και C_b είναι ξένες μεταξύ τους εκτός αν $C_a = C_b$. Πράγματι, αν $C_a \cap C_b \neq \emptyset$, τότε υπάρχει $c \in C_a \cap C_b$, οπότε $c \sim a$ και $c \sim b$. Από τις σχέσεις αυτές, εξαιτίας της συμμετρικής και της μεταβατικής ιδιότητας, παίρνουμε $a \sim b$. Έστω τώρα τυχαίο $x \in C_a$. Από τις $x \sim a$ και $a \sim b$ προκύπτει ότι $x \sim b$, δηλαδή $x \in C_b$. Δείξαμε ότι $C_a \subseteq C_b$ και ανάλογα αποδεικνύουμε ότι $C_b \subseteq C_a$, άρα $C_a = C_b$. Συμπεραίνουμε ότι τα διακεκριμένα από τα σύνολα C_a για $a \in S$ αποτελούν διαμέριση π του S , τα μέρη της οποίας είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας της \sim . Από την κατασκευή της π έχουμε ότι για $a, b \in S$, τα a και b ανήκουν στο ίδιο μέρος της π αν και μόνο αν $C_a = C_b$, δηλαδή αν και μόνο αν $a \sim b$. Επομένως, η σχέση \sim_π ταυτίζεται με την \sim .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Αν $S = \{a, b, c, d\}$ και \sim είναι η διμελής σχέση

$$\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$$

στο S , τότε η \sim είναι σχέση ισοδυναμίας με δύο κλάσεις ισοδυναμίας $C_a = C_b = \{a, b\}$ και $C_c = C_d = \{c, d\}$. Η αντίστοιχη διαμέριση είναι η $\pi = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$. \square

Ένας ακόμη τρόπος με τον οποίο μπορούν να προκύψουν φυσιολογικά οι έννοιες της διαμέρισης και της σχέσης ισοδυναμίας πάνω σε ένα σύνολο είναι ο εξής.

Παράδειγμα 2.2.1 Έστω απεικόνιση συνόλων $f : S \rightarrow T$. Θεωρούμε τις αντίστροφες εικόνες της f της μορφής $f^{-1}(y)$, για $y \in f(S)$. Παρατηρούμε ότι τα σύνολα αυτά είναι μη κενά υποσύνολα του S . Επιπλέον, κάθε στοιχείο x του S ανήκει σε ένα ακριβώς από τα σύνολα αυτά, συγκεκριμένα στο $f^{-1}(y)$ με $y = f(x)$. Συμπεραίνουμε ότι τα σύνολα της μορφής $f^{-1}(y)$ με $y \in f(S)$ είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους μη κενά υποσύνολα του S και ότι η ένωσή τους είναι ίση με S . Επομένως αποτελούν τα μέρη μιας διαμέρισης π_f του S . Η σχέση ισοδυναμίας που αντιστοιχεί στη διαμέριση π_f είναι η σχέση \sim_f που ορίζεται θέτοντας $a \sim_f b$ αν $f(a) = f(b)$, για $a, b \in S$.

Αντιστρόφως, κάθε διαμέριση π του S προκύπτει από μια επί απεικόνιση $f : S \rightarrow T$ με τον τρόπο αυτό. Πράγματι, αρκεί να θέσει κανείς $T = \pi$ και να ορίσει ως $f(x)$ το μοναδικό μέρος της π που περιέχει το $x \in S$. Η απεικόνιση $f : S \rightarrow \pi$ είναι επί, αφού τα μέρη της π είναι μη κενά υποσύνολα του S , και αναφέρεται ως η *κανονική απεικόνιση* που ορίζεται από τη διαμέριση π . Από τον ορισμό της f έχουμε $f(a) = f(b)$ αν και μόνο αν τα στοιχεία a και b του S ανήκουν στο ίδιο μέρος της π . Συνεπώς η διαμέριση π_f του S ταυτίζεται με την π . \square

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Αν $S = \{a, b, c, d, e\}$, $T = \{1, 2, 3\}$ και $f : S \rightarrow T$ είναι η απεικόνιση με $f(a) = f(d) = 1$, $f(b) = 2$ και $f(c) = f(e) = 3$, τότε $\pi_f = \{\{a, d\}, \{b\}, \{c, e\}\}$. \square

Παράδειγμα 2.2.2 Έστω $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Για $a, b \in \mathbb{Z}$ γράφουμε $a \equiv b \pmod{m}$ και λέμε ότι το a είναι *ισότιμο του b modulo m* , αν το m διαιρεί το $a - b$, δηλαδή αν $a - b = qm$ για κάποιο $q \in \mathbb{Z}$. Για παράδειγμα, ισχύει $23 \equiv 2 \pmod{7}$ και $2m + 1 \equiv 1 \pmod{m}$ για κάθε m . Η ισοτιμία modulo m είναι σχέση ισοδυναμίας στο \mathbb{Z} . Ας ελέγξουμε ενδεικτικά τη μεταβατική ιδιότητα. Έστω ότι $a \equiv b \pmod{m}$ και $b \equiv c \pmod{m}$. Τότε υπάρχουν ακέραιοι p και q με $a - b = pm$ και $b - c = qm$. Προσθέτοντας παίρνουμε $a - c = pm + qm = (p + q)m$ με $p + q \in \mathbb{Z}$ και συνεπώς $a \equiv c \pmod{m}$.

Ποιες είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας; Από την Πρόταση 5.0.2 προκύπτει ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ υπάρχει μοναδικό $r \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$ με $n \equiv r \pmod{m}$ και συνεπώς το n ανήκει στην κλάση ισοδυναμίας του r για ακριβώς ένα ακέραιο $r \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$. Συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν ακριβώς m κλάσεις ισοδυναμίας των ακεραίων \pmod{m} , συγκεκριμένα οι κλάσεις C_0, C_1, \dots, C_{m-1} των $0, 1, \dots, m - 1$, αντίστοιχα, όπου $C_r = \{r + qm : q \in \mathbb{Z}\}$ για $r \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$. Οι κλάσεις αυτές λέγονται *κλάσεις ισοτιμίας \pmod{m}* . \square

2.3 Μερικές διατάξεις

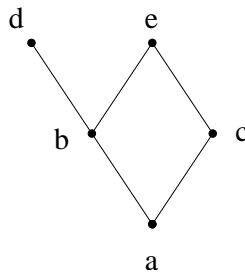
Η δεύτερη κατηγορία διμελών σχέσεων που θα εξετάσουμε είναι οι μερικές διατάξεις. Οι σχέσεις αυτές παρέχουν τρόπους με τους οποίους μπορεί κανείς να «συγκρίνει» τα στοιχεία ενός συνόλου.

Ορισμός 2.3.1 Μια διμελής σχέση, έστω \preceq , στο σύνολο P λέγεται *μερική διάταξη (partial order)* αν για όλα τα $a, b, c \in P$ ισχύουν τα εξής:

- (i) $a \preceq a$,
- (ii) αν $a \preceq b$ και $b \preceq a$, τότε $a = b$,
- (iii) αν $a \preceq b$ και $b \preceq c$, τότε $a \preceq c$.

Η ιδιότητα (ii) λέγεται *αντισυμμετρία*.

Το ζεύγος (P, \preceq) λέγεται *μερικώς διατεταγμένο σύνολο* και συμβολίζεται απλά με P , όταν η μερική διάταξη \preceq είναι ευνόητη. Τα στοιχεία a, b του P λέγονται *συγκρίσιμα* αν $a \preceq b$ ή $b \preceq a$. Γράφουμε $a \prec b$ (και $b \succ a$) αν $a \preceq b$ και $a \neq b$. Αν $a \prec b$ και δεν υπάρχει $x \in P$ με $a \prec x \prec b$, τότε λέμε ότι το b *καλύπτει* το a και ότι το ζεύγος (a, b) (και η σχέση $a \prec b$) είναι *σχέση κάλυψης* στο P . Αν το P είναι πεπερασμένο, τότε το (P, \preceq) απεικονίζεται με το *διάγραμμα Hasse*, το οποίο περιέχει τα στοιχεία του P ως κορυφές και μια ακμή που να συνδέει τα a και b για κάθε σχέση κάλυψης $a \prec b$ στο P , με το b να εμφανίζεται ψηλότερα από το a .



Σχήμα 2.1: Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο με πέντε στοιχεία.

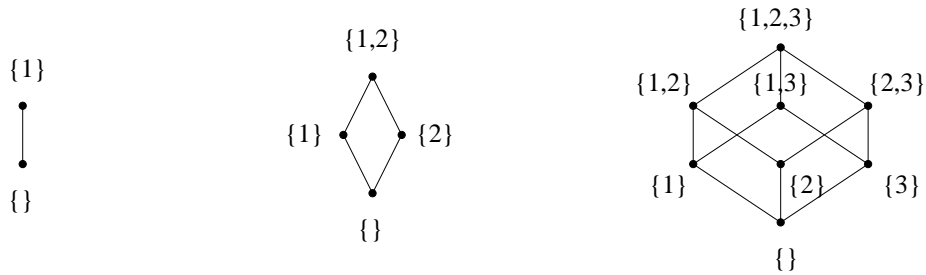
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Στο Σχήμα 2.1 απεικονίζεται το διάγραμμα Hasse μιας μερικής διάταξης στο σύνολο $P = \{a, b, c, d, e\}$. Υπάρχουν οι σχέσεις κάλυψης $a \prec b$, $a \prec c$, $b \prec d$, $b \prec e$ και $c \prec e$ στο P . Από τη μεταβατική ιδιότητα προκύπτει ότι ισχύει επίσης $a \prec d$ και $a \prec e$. Τα $\{b, c\}$, $\{c, d\}$ και $\{d, e\}$ είναι ζεύγη μη συγκρίσιμων στοιχείων του P . \square

Έστω (P, \preceq) μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $a \in P$. Το a λέγεται *ελαχιστικό* αν δεν υπάρχει $x \in P$ με $x \prec a$, *μεγιστικό* αν δεν υπάρχει $x \in P$ με $a \prec x$, *ελάχιστο* αν $a \preceq x$ για κάθε $x \in P$ και *μέγιστο* αν $x \preceq a$ για κάθε $x \in P$. Παρατηρούμε ότι το P μπορεί να έχει το πολύ ένα ελάχιστο στοιχείο και το πολύ ένα μέγιστο στοιχείο. Πράγματι, αν τα a, b ήταν και τα δύο ελάχιστα (ή και τα δύο μέγιστα) στοιχεία, τότε θα είχαμε $a \preceq b$ και $b \preceq a$, άρα θα είχαμε και $a = b$ λόγω της αντισυμμετρίας. Παρατηρούμε ακόμη ότι κάθε ελάχιστο (αντίστοιχα, μέγιστο) στοιχείο (αν υπάρχει) είναι ελαχιστικό (αντίστοιχα, μεγιστικό) και ότι το αντίστροφο δεν είναι γενικά αληθές. Στην περίπτωση του Σχήματος 2.1, το a είναι το ελάχιστο (και συνεπώς το μοναδικό ελαχιστικό) στοιχείο του P και τα d και e είναι μεγιστικά στοιχεία, ενώ δεν υπάρχει μέγιστο στοιχείο στο P .

Ας εξετάσουμε τώρα και άλλα παραδείγματα μερικών διατάξεων.

Παράδειγμα 2.3.1 Η φυσική διάταξη $\leq_{\mathbb{Z}}$ των ακεραίων είναι μερική διάταξη στο \mathbb{Z} , καθώς και σε οποιοδήποτε υποσύνολο του \mathbb{Z} (θεωρούμε τις ιδιότητες του Ορισμού 2.3.1 στην περίπτωση αυτή γνωστές). Στη διάταξη αυτή οποιαδήποτε δύο στοιχεία του \mathbb{Z} είναι συγκρίσιμα. Μια μερική διάταξη με αυτή την ιδιότητα λέγεται *ολική διάταξη*, ή *γραμμική διάταξη*, ή *αλυσίδα*. Για παράδειγμα, υπάρχουν δύο αλυσίδες στο σύνολο $\{1, 2\}$, η $1 < 2$ και η $2 < 1$. Γενικότερα (Άσκηση 15 (γ)), κάθε ολική διάταξη σε ένα σύνολο P με n στοιχεία είναι της μορφής $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n$ για κάποια αναδιάταξη $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ του P . Κατά συνέπεια υπάρχουν $n!$ ολικές διατάξεις σε ένα σύνολο με n στοιχεία. \square

Παράδειγμα 2.3.2 Έστω σύνολο P και η διμελής σχέση \preceq η οποία ορίζεται θέτοντας $a \preceq b \Leftrightarrow a = b$, για $a, b \in P$. Η σχέση αυτή είναι προφανώς μερική διάταξη στο P , λέγεται *αντιαλυσίδα* και αποτελεί τη μοναδική μερική διάταξη στο P στην οποία δεν υπάρχουν διακεκριμένα συγκρίσιμα (μεταξύ τους) στοιχεία του P . Κάθε στοιχείο μιας αντιαλυσίδας είναι ταυτόχρονα ελαχιστικό και μεγιστικό. \square



Σχήμα 2.2: Οι μερικές διατάξεις B_1, B_2 και B_3 .

Παράδειγμα 2.3.3 Έστω η διμελής σχέση $|$ στο σύνολο $\mathbb{Z}_{>0}$ των θετικών ακεραίων η οποία ορίζεται θέτοντας $a | b$ αν ο b διαιρείται με το a , δηλαδή αν υπάρχει $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ με $b = aq$. Η σχέση αυτή είναι μερική διάταξη στο $\mathbb{Z}_{>0}$. Πράγματι, η ανακλαστική ιδιότητα είναι φανερή. Για την αντισυμμετρία, παρατηρούμε ότι αν $a | b$ και $b | a$, τότε $a \leq_{\mathbb{Z}} b$ και $b \leq_{\mathbb{Z}} a$ και συνεπώς $a = b$. Για τη μεταβατικότητα, παρατηρούμε ότι αν $a | b$ και $b | c$, τότε υπάρχουν $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$ με $b = ap$ και $c = bq$, οπότε $c = apq = at$ με $t = pq \in \mathbb{Z}_{>0}$ και συνεπώς $a | c$. Ο ακέραιος 1 είναι το ελάχιστο στοιχείο αυτής της διάταξης ενώ δεν υπάρχουν μεγιστικά (ή μέγιστα) στοιχεία. Οι ακέραιοι που καλύπτουν το ελάχιστο στοιχείο 1 είναι αυτοί που δεν έχουν διαιρέτη άλλο από το 1 ή τον εαυτό τους, δηλαδή οι *πρώτοι αριθμοί*. Γενικότερα, ο b καλύπτει τον a σε αυτή τη μερική διάταξη αν και μόνο αν $b = ap$ για κάποιο πρώτο αριθμό p . \square

Παράδειγμα 2.3.4 Έστω B_n το σύνολο των υποσυνόλων του $[n]$, εφοδιασμένο με τη διμελή σχέση \preceq του εγκλεισμού, δηλαδή με $S \preceq T$ αν $S \subseteq T$, για $S, T \subseteq [n]$. Οι τρεις ιδιότητες του Ορισμού 2.3.1 είναι φανερές όπου, για παράδειγμα, η αντισυμμετρία ισοδυναμεί με το γεγονός ότι αν $S \subseteq T$ και $T \subseteq S$ για $S, T \subseteq [n]$, τότε $S = T$. Συνεπώς η \preceq είναι μερική διάταξη στο B_n . Με αυτή τη μερική διάταξη, το σύνολο B_n λέγεται *άλγεβρα Boole* τάξης n . Το διάγραμμα Hasse της B_n απεικονίζεται στο Σχήμα 2.2 για $n = 1, 2, 3$. Παρατηρούμε ότι στην άλγεβρα Boole B_n , το T καλύπτει το S αν και μόνο αν $S \subseteq T$ και $\#T = \#S + 1$ (Άσκηση 17 (α)). Το κενό σύνολο είναι το ελάχιστο στοιχείο της B_n και το σύνολο $[n]$ είναι το μέγιστο στοιχείο. \square

2.4 Αλυσίδες και αντιαλυσίδες

Στην παράγραφο αυτή P είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, τη μερική διάταξη του οποίου συμβολίζουμε με \preceq .

Ορισμός 2.4.1 *Αλυσίδα στο P είναι ένα υποσύνολο του P με στοιχεία ανά δύο συγκρίσιμα. Αντιαλυσίδα στο P είναι ένα υποσύνολο του P με στοιχεία ανά δύο μη συγκρίσιμα.*

Υπενθυμίζουμε (Άσκηση 15 (γ)) ότι κάθε πεπερασμένη αλυσίδα του P είναι της μορφής $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ με $x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_k$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. (α) Το κενό σύνολο και κάθε υποσύνολο του P με ένα στοιχείο είναι αλυσίδες και αντιαλυσίδες στο P ταυτόχρονα.

(β) Στη μερική διάταξη του Σχήματος 2.1 τα σύνολα $\{a, e\}$, $\{a, b, d\}$ και $\{a, c, e\}$ είναι αλυσίδες, ενώ τα $\{b, c\}$, $\{c, d\}$ και $\{d, e\}$ είναι αντιαλυσίδες.

(γ) Στη μερική διάταξη της διαιρετότητας στο σύνολο $\mathbb{Z}_{>0}$ (Παράδειγμα 2.3.3), το σύνολο $\{1, 2, 4, \dots, 2^n\}$ είναι αλυσίδα και το $\{n+1, n+2, \dots, 2n\}$ είναι αντιαλυσίδα (εξηγήστε γιατί) για κάθε θετικό ακέραιο n .

(δ) Στη μερική διάταξη B_n του Παραδείγματος 2.3.4, μια αλυσίδα με k στοιχεία είναι ένα σύνολο της μορφής $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ με $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_k \subseteq [n]$. Μια αντιαλυσίδα αποτελείται από υποσύνολα A_1, A_2, \dots, A_k του $[n]$ κανένα από τα οποία δεν περιέχεται σε κάποιο άλλο, δηλαδή τέτοια ώστε $A_i \subseteq A_j$ μόνο αν $i = j$. \square

Η δομή του συνόλου των αλυσίδων σε ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο P καθορίζει σε σημαντικό βαθμό τη δομή του P και συνδέεται με μη προφανείς τρόπους με τη δομή του συνόλου των αντιαλυσίδων στο P . Θα εξετάσουμε δύο ποσότητες που μπορούμε να ορίσουμε για το P , οι οποίες εξαρτώνται από τα σύνολα αυτά. Ονομάζουμε *ύψος* του P το μέγιστο πλήθος στοιχείων μιας αλυσίδας στο P και *πλάτος* του P το μέγιστο πλήθος στοιχείων μιας αντιαλυσίδας στο P και συμβολίζουμε με $\text{height}(P)$ και $\text{width}(P)$, αντίστοιχα, το ύψος και πλάτος του P . Για τη μερική διάταξη του Σχήματος 2.1 έχουμε $\text{height}(P) = 3$ και $\text{width}(P) = 2$.

Λήμμα 2.4.1 Έστω μερικώς διατεταγμένο σύνολο P .

- (α) Αν C είναι αλυσίδα στο P και υπάρχει διαμέριση του P σε m αντιαλυσίδες, τότε $\#C \leq m$.
- (β) Αν A είναι αντιαλυσίδα στο P και υπάρχει διαμέριση του P σε m αλυσίδες, τότε $\#A \leq m$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε το (α). Έστω διαμέριση του P σε αντιαλυσίδες A_1, \dots, A_m . Κάθε στοιχείο της αλυσίδας C ανήκει σε ένα από τα σύνολα A_i της διαμέρισης. Αν είχαμε $\#C \geq m + 1$, τότε (αρχή του περιστερώνα) τουλάχιστον δύο στοιχεία της C θα ανήκαν στην ίδια αντιαλυσίδα και συνεπώς δε θα ήταν συγκρίσιμα, σε αντίθεση με την υπόθεση ότι το C είναι αλυσίδα. Έπεται ότι $\#C \leq m$. Το (β) αποδεικνύεται παρόμοια. \square

Από το Λήμμα 2.4.1 προκύπτουν άνω φράγματα για το ύψος και πλάτος του P ως εξής:

Πόρισμα 2.4.1 Για το ύψος και πλάτος τυχαίου πεπερασμένου μερικώς διατεταγμένου συνόλου P ισχύει $\text{height}(P) \leq a(P)$ και $\text{width}(P) \leq c(P)$, όπου $a(P)$ και $c(P)$ είναι το ελάχιστο πλήθος αντιαλυσίδων και το ελάχιστο πλήθος αλυσίδων, αντίστοιχα, στις οποίες μπορεί να διαμεριστεί το P .

Απόδειξη. Προκύπτει αμέσως από το Λήμμα 2.4.1. \square

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Η μερική διάταξη P του Σχήματος 2.1 έχει διαμέριση σε τρεις αντιαλυσίδες, τις $\{a\}$, $\{b, c\}$ και $\{d, e\}$, καθώς και διαμέριση σε δύο αλυσίδες, τις $\{a, b, d\}$ και $\{c, e\}$. Προκύπτει ότι $a(P) \leq 3$ και $c(P) \leq 2$. Αφού $\text{height}(P) \geq 3$ και $\text{width}(P) \geq 2$, από το Πόρισμα 2.4.1 συμπεραίνουμε ότι $\text{height}(P) = a(P) = 3$ και $\text{width}(P) = c(P) = 2$. \square

Είναι οι ακέραιοι $\text{height}(P)$ και $a(P)$ πάντοτε ίσοι; Είναι οι ακέραιοι $\text{width}(P)$ και $c(P)$ πάντοτε ίσοι; Το επόμενο θεώρημα δίνει καταφατική απάντηση στο πρώτο ερώτημα.

Θεώρημα 2.4.1 Για το ύψος τυχαίου πεπερασμένου μερικώς διατεταγμένου συνόλου P ισχύει $\text{height}(P) = a(P)$. Δηλαδή, το μέγιστο πλήθος ανά δύο συγκρίσιμων στοιχείων του P είναι ίσο με το ελάχιστο πλήθος αντιαλυσίδων στις οποίες μπορεί να διαμεριστεί το P .

Απόδειξη. Έστω $\text{height}(P) = m$. Από το Πόρισμα 2.4.1 έχουμε $a(P) \geq m$ και συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι το P μπορεί να διαμεριστεί σε m το πολύ αντιαλυσίδες. Για τυχαίο $x \in P$ συμβολίζουμε με $h(x)$ το μέγιστο πλήθος στοιχείων r μιας αλυσίδας $x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_r$ του P με μέγιστο στοιχείο $x_r = x$. Ισχυριζόμαστε ότι (i)

$1 \leq h(x) \leq m$ για κάθε $x \in P$ και (ii) $x \prec y \Rightarrow h(x) < h(y)$ για όλα τα $x, y \in P$. Πράγματι, το (i) είναι φανερό ενώ για το (ii) παρατηρούμε ότι αν ισχύει $x \prec y$ στο P και $x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_r = x$ είναι αλυσίδα του P με $r = h(x)$ στοιχεία, τότε υπάρχει η αλυσίδα $x_1 \prec \dots \prec x_r \prec x_{r+1} = y$ του P με $r + 1$ στοιχεία και συνεπώς $h(y) \geq r + 1 > h(x)$.

Για $1 \leq i \leq m$, θέτουμε $B_i = \{x \in P : h(x) = i\}$. Εξαιτίας της (i), τα μη κενά από τα σύνολα B_i αποτελούν τα μέρη μιας διαμέρισης του P . Εξαιτίας της (ii), το B_i είναι αντιαλυσίδα του P για κάθε i (και η ανισότητα $a(P) \geq m$ δείχνει ότι υποχρεωτικά, όλα τα σύνολα B_i για $1 \leq i \leq m$ είναι μη κενά). Συνεπώς η $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ είναι η ζητούμενη διαμέριση του P . \square

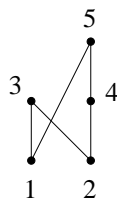
Πόρισμα 2.4.2 Αν P είναι μερική διάταξη με τουλάχιστον $mn + 1$ στοιχεία, τότε το P έχει αλυσίδα με τουλάχιστον $m + 1$ στοιχεία, ή αντιαλυσίδα με τουλάχιστον $n + 1$ στοιχεία.

Απόδειξη. Έστω ότι δεν υπάρχει αλυσίδα του P με τουλάχιστον $m + 1$ στοιχεία. Τότε $\text{height}(P) \leq m$. Από το Θεώρημα 2.4.1 προκύπτει ότι $a(P) \leq m$, δηλαδή το P μπορεί να διαμεριστεί σε m το πολύ αντιαλυσίδες A_i . Από την υπόθεση $\#P \geq mn + 1$ προκύπτει ότι $\#A_i \geq n + 1$ για τουλάχιστον μία από τις αντιαλυσίδες A_i . \square

Για τη απόδειξη του επόμενου σημαντικού θεωρήματος, η οποία είναι λίγο εκτενέστερη από εκείνη του Θεωρήματος 2.4.1, παραπέμπουμε στην Παράγραφο 2.3 του [1], ή στην Παράγραφο 3.2 του [3].

Θεώρημα 2.4.2 (Dilworth, 1950) Για τυχαίο πεπερασμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P ισχύει $\text{width}(P) = c(P)$, δηλαδή το μέγιστο πλήθος ανά δύο μη συγκρίσιμων στοιχείων του P είναι ίσο με το ελάχιστο πλήθος αλυσίδων στις οποίες μπορεί να διαμεριστεί το P .

Ακολούθως δίνουμε ενδεικτικά μια από τις πολλές εφαρμογές των προηγούμενων αποτελεσμάτων.



Σχήμα 2.3: Μια μερική διάταξη στο [5].

Παράδειγμα 2.4.1 Θα δείξουμε ότι κάθε ακολουθία $\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_{mn+1})$ πραγματικών αριθμών μήκους $mn+1$ έχει αύξουσα υποακολουθία μήκους $m+1$ ή γνησίως φθίνουσα υποακολουθία μήκους $n+1$, δηλαδή ότι υπάρχουν δείκτες $1 \leq i_1 < \dots < i_{m+1} \leq mn+1$ με $a_{i_1} \leq \dots \leq a_{i_{m+1}}$ ή δείκτες $1 \leq j_1 < \dots < j_{n+1} \leq mn+1$ με $a_{j_1} > \dots > a_{j_{n+1}}$. Για παράδειγμα, αν $m = n = 2$ και $\sigma = (1, 0, 2, 0, 1)$, δηλαδή $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 2, a_4 = 0, a_5 = 1$, τότε υπάρχει η αύξουσα υποακολουθία $a_2 \leq a_4 \leq a_5$ της σ μήκους 3.

Θεωρούμε το ζεύγος (P, \preceq) , όπου $P = [mn+1]$ και $i \preceq j$ αν και μόνο αν $i \leq j$ και $a_i \leq a_j$. Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι η σχέση \preceq είναι μερική διάταξη στο σύνολο P . Το διάγραμμα Hasse αυτής της μερικής διάταξης δίνεται στο Σχήμα 2.3 για την περίπτωση $\sigma = (1, 0, 2, 0, 1)$. Από το Πρόσχημα 2.4.2 γνωρίζουμε ότι το P έχει αλυσίδα $i_1 < i_2 < \dots < i_{m+1}$, ή αντιαλυσίδα $\{j_1, j_2, \dots, j_{n+1}\}$ με $j_1 < j_2 < \dots < j_{n+1}$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $i_1 < i_2 < \dots < i_{m+1}$ και $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \dots \leq a_{i_{m+1}}$ και στη δεύτερη $a_{j_1} > a_{j_2} > \dots > a_{j_{n+1}}$. Στο παράδειγμα $\sigma = (1, 0, 2, 0, 1)$, η αλυσίδα $2 < 4 < 5$ ορίζει την αύξουσα υποακολουθία $a_2 \leq a_4 \leq a_5$ της σ . \square

Παράδειγμα 2.4.2 Έστω θετικός ακέραιος n . Ποιο είναι το μέγιστο δυνατό μήκος μιας ακολουθίας πραγματικών αριθμών, η οποία δεν έχει μονότονη (αύξουσα ή φθίνουσα) υποακολουθία μήκους μεγαλύτερου του n ; Από το Παράδειγμα 2.4.1 προκύπτει αμέσως ότι το μήκος μιας τέτοιας ακολουθίας δεν υπερβαίνει το n^2 . Ένα παράδειγμα ακολουθίας πραγματικών αριθμών μήκους n^2 χωρίς μονότονη υποακολουθία μήκους μεγαλύτερου του n είναι η

$$(n, n-1, \dots, 1, 2n, 2n-1, \dots, n+1, \dots, n^2, n^2-1, \dots, n^2-n+1).$$

Κατά συνέπεια το ζητούμενο μέγιστο είναι ίσο με n^2 . \square

2.5 Το Θεώρημα του Sperner

Υπενθυμίζουμε ότι αντιαλυσίδα στη μερική διάταξη B_n είναι ένα σύνολο με στοιχεία υποσύνολα του $[n]$, κανένα από τα οποία δεν περιέχεται σε κάποιο άλλο. Το πλάτος $\text{width}(B_n)$ της B_n είναι ίσο με το μέγιστο πλήθος υποσυνόλων του $[n]$ με αυτή την ιδιότητα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Για $n = 3$ υπάρχουν οι εξής αντιαλυσίδες της B_3 με τρία στοιχεία: $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ και $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$. Επίσης, υπάρχει διαμέριση της B_3 σε τρεις αλυσίδες, π.χ. στις $\emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$, $\{2\} \subset \{2, 3\}$ και $\{3\} \subset \{1, 3\}$. Από τα προηγούμενα και το Πρόσχημα 2.4.1 προκύπτει ότι $\text{width}(B_3) = 3$. \square

Ποιο είναι το πλάτος της B_n για τυχαίο φυσικό αριθμό n ; Απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.5.1 (Sperner, 1928) Για $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\text{width}(B_n) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, δηλαδή το μέγιστο πλήθος υποσυνόλων του $[n]$ που μπορούν να επιλεγούν, ώστε κανένα από τα σύνολα αυτά να μην περιέχεται σε κάποιο άλλο, είναι ίσο με $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Η απόδειξη που θα δώσουμε βασίζεται στην ακόλουθη πρόταση. Η ανισότητα που εμφανίζεται στην πρόταση αυτή είναι γνωστή ως *ανισότητα LYM* (για περισσότερες λεπτομέρειες, δείτε π.χ. την Παράγραφο 1.2 του [3]). Η απόδειξη της πρότασης που θα δώσουμε οφείλεται στον D. Lubell [8].

Πρόταση 2.5.1 Έστω \mathcal{A} μια αντιαλυσίδα στη μερική διάταξη B_n . Γράφοντας p_k για το πλήθος των στοιχείων S της \mathcal{A} με $\#S = k$, έχουμε

$$\sum_{k=0}^n \frac{p_k}{\binom{n}{k}} \leq 1. \quad (2.1)$$

Απόδειξη. Θα λέμε ότι ένα υποσύνολο S του $[n]$ είναι *πρόθεμα* μιας αναδιάταξης $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ του $[n]$ αν $S = \emptyset$, ή $S = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$ για κάποιο δείκτη k με $1 \leq k \leq n$. Έστω m το πλήθος των ζευγών (S, σ) , όπου $S \in \mathcal{A}$, η σ είναι αναδιάταξη του $[n]$ και το S είναι πρόθεμα της σ . Παρατηρούμε ότι για δοσμένο $S \subseteq [n]$ με $\#S = k$, υπάρχουν ακριβώς $k!(n-k)!$ αναδιατάξεις του $[n]$ για τις οποίες το S είναι πρόθεμα. Επομένως ισχύει $m = \sum_{k=0}^n p_k k!(n-k)!$. Παρατηρούμε επίσης ότι οποιαδήποτε δύο προθέματα μιας αναδιάταξης του $[n]$ είναι συγκρίσιμα στη μερική διάταξη B_n . Συνεπώς κάθε αναδιάταξη του $[n]$ έχει το πολύ ένα πρόθεμα το οποίο ανήκει στην αντιαλυσίδα \mathcal{A} και επομένως ισχύει $m \leq n!$. Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{k=0}^n p_k k!(n-k)! \leq n!,$$

σχέση η οποία είναι ισοδύναμη με τη (2.1). \square

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.1. Οποιαδήποτε δύο υποσύνολα του $[n]$ με το ίδιο πλήθος στοιχείων είναι μη συγκρίσιμα στη μερική διάταξη B_n . Κατά συνέπεια, το σύνολο $\mathcal{A}_i = \{S \subseteq [n] : \#S = i\}$ είναι αντιαλυσίδα στη B_n για κάθε $0 \leq i \leq n$. Αφού η αντιαλυσίδα \mathcal{A}_i έχει $\binom{n}{i}$ στοιχεία για $i = \lfloor n/2 \rfloor$, συμπεραίνουμε ότι $\text{width}(B_n) \geq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Για την αντίστροφη ανισότητα, θεωρούμε τυχαία αντιαλυσίδα \mathcal{A} της B_n και θέτουμε $p_k = \#\{S \in \mathcal{A} : \#S = k\}$ για $0 \leq k \leq n$, όπως στην Πρόταση 2.5.1. Από τις σχέσεις (1.11) (Άσκηση 7 του Κεφαλαίου 1) και το Πόρισμα 1.3.1 (α) έχουμε $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ για $0 \leq k \leq n$. Επομένως, από τη (2.1) προκύπτει ότι

$$\sum_{k=0}^n \frac{p_k}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \leq 1,$$

δηλαδή ότι

$$\#\mathcal{A} = \sum_{k=0}^n p_k \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Αφού αυτό ισχύει για τυχαία αντιαλυσίδα \mathcal{A} της B_n , έπεται ότι $\text{width}(B_n) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ και συνεπώς το ζητούμενο. \square

Μια διαφορετική απόδειξη του θεωρήματος του Sperner που βασίζεται στο Πρόρισμα 2.4.1 είναι δυνατό να δοθεί κατασκευάζοντας μια διαμέριση της B_n σε $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ αλυσίδες (δείτε π.χ. την Παράγραφο 2.4 του [1], ή την Παράγραφο 3.1 του [3]). Για άλλες ενδιαφέρουσες αποδείξεις και γενικεύσεις παραπέμπουμε στο άρθρο [11].

2.6 Ασκήσεις

1. (α) Βρείτε 4 σημεία σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά μήκους ένα, ώστε οποιαδήποτε δύο από τα σημεία αυτά να απέχουν μεταξύ τους απόσταση μεγαλύτερη από $1/2$.
 (β) Δίνονται 5 σημεία σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά μήκους ένα. Δείξτε ότι μεταξύ των σημείων αυτών υπάρχουν δύο, η απόσταση των οποίων δεν υπερβαίνει το $1/2$.
 (γ) Βρείτε 6 σημεία σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά μήκους ένα, ώστε οποιαδήποτε δύο από τα σημεία αυτά να απέχουν μεταξύ τους απόσταση μεγαλύτερη ή ίση του $1/2$.
 (δ) Δίνονται 7 σημεία σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά μήκους ένα. Δείξτε ότι μεταξύ των σημείων αυτών υπάρχουν δύο, η απόσταση των οποίων είναι μικρότερη από $1/2$.
2. Δύο τετράγωνα μιας 5×5 σκακιέρας λέγονται γειτονικά αν έχουν κοινή ακμή. Τοποθετούμε 25 πιόνια στα τετράγωνα της 5×5 σκακιέρας ώστε κάθε τετράγωνο να περιέχει ακριβώς ένα πιόνι. Είναι δυνατό να μετακινήσουμε τα πιόνια, το καθένα σε γειτονικό τετράγωνο από αυτό που έχει τοποθετηθεί αρχικά, ώστε μετά τη μετακίνηση κάθε τετράγωνο να περιέχει ακριβώς ένα πιόνι;
3. Δίνονται έντεκα άπειρες ακολουθίες με στοιχεία δεκαδικά ψηφία. Δείξτε ότι υπάρχουν δύο από αυτές, έστω οι (a_1, a_2, \dots) και (b_1, b_2, \dots) , για τις οποίες ισχύει $a_k = b_k$ για άπειρου πλήθους δείκτες k .
4. (α) Δείξτε ότι ανάμεσα σε n τυχαίους ακεραίους μπορούμε να επιλέξουμε κάποιους, από έναν έως n , το άθροισμα των οποίων διαιρείται με το n .

- (β) Δώστε παράδειγμα συνόλου με στοιχεία $n - 1$ διακεκριμένους ακεραίους το οποίο δεν έχει μη κενό υποσύνολο, το άθροισμα των στοιχείων του οποίου διαιρείται με το n .
5. (α) Δίνονται 5 σημεία με ακέραιες συντεταγμένες στο επίπεδο. Δείξτε ότι υπάρχουν δύο από αυτά με την εξής ιδιότητα: το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος που έχει άκρα αυτά τα σημεία έχει επίσης ακέραιες συντεταγμένες.
- (β) Αποδείξτε την ίδια πρόταση για $2^n + 1$ σημεία με ακέραιες συντεταγμένες στο χώρο \mathbb{R}^n .
- (γ) Βρείτε 2^n σημεία με ακέραιες συντεταγμένες στο χώρο \mathbb{R}^n ώστε κανένα από τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων με άκρα αυτά τα σημεία να μην έχει και τις n συντεταγμένες του ακέραιες.
6. Θα λέμε ότι δύο αναδιατάξεις $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ και $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ του συνόλου $[n]$ τέμνονται αν ισχύει $\sigma_i = \tau_i$ για έναν τουλάχιστο δείκτη $1 \leq i \leq n$. Πόσες το πολύ αναδιατάξεις του $[n]$ μπορούμε να επιλέξουμε, ώστε οποιεσδήποτε δύο από αυτές να τέμνονται;
7. Έστω θετικός ακέραιος n . Για $0 \leq k \leq n$ συμβολίζουμε με $A(n, k)$ το σύνολο των ακολουθιών $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ οι οποίες έχουν την ιδιότητα $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n = -n + 2k$.
- (α) Δείξτε ότι το πλήθος των στοιχείων του $A(n, k)$ είναι ίσο με $\binom{n}{k}$.
- (β) Έστω ότι $0 \leq k < n/2$. Βρείτε μια 1-1 απεικόνιση $A(n, k) \rightarrow A(n, k+1)$.
- (γ) Συνάγετε ότι ισχύει $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{k+1}$ για $0 \leq k < n/2$.
8. Έστω B_n το σύνολο των αναδιατάξεων $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ του $[n]$ για τις οποίες ισχύει $|\sigma_i - \sigma_{i+1}| = 1$ για τουλάχιστον ένα δείκτη i με $1 \leq i \leq n-1$ και έστω A_n το σύνολο των αναδιατάξεων του $[n]$ που δεν ανήκουν στο B_n (όπου $n \geq 2$).
- (α) Βρείτε μια 1-1 απεικόνιση $A_n \rightarrow B_n$.
- (β) Συμπεράνετε ότι το B_n έχει περισσότερα από $\frac{1}{2} n!$ στοιχεία.
9. Δίνονται 19 σημεία σε ένα τετράγωνο πλευράς μήκους ένα. Δείξτε ότι μεταξύ των σημείων αυτών μπορούν να επιλεγούν τρία, ώστε το εμβαδό του τριγώνου με κορυφές τα σημεία αυτά να μην υπερβαίνει το $1/18$.
10. (α) Τοποθετήστε 32 πιόνια στα τετράγωνα μιας 8×8 σκακιέρας (το πολύ ένα πιόνι σε κάθε τετράγωνο), ώστε ανάμεσα σε οποιαδήποτε 5 από αυτά να υπάρχουν δύο που βρίσκονται στην ίδια γραμμή ή στήλη.

- (β) Δείξτε ότι αν τοποθετήσουμε 33 πιόνια τυχαία στα τετράγωνα μιας 8×8 σκακιέρας (το πολύ ένα πιόνι σε κάθε τετράγωνο), τότε μπορούμε να επιλέξουμε 5 από αυτά, τα οποία ανά δύο βρίσκονται σε διαφορετικές γραμμές και διαφορετικές στήλες.
11. Δίνεται μια $n \times n$ σκακιέρα με ένα πιόνι τοποθετημένο σε κάθε τετράγωνο. Κάθε πιόνι μετακινείται σε ένα από τα τετράγωνα τα οποία έχουν ακριβώς μία κοινή κορυφή με το τετράγωνο στο οποίο το πιόνι είχε τοποθετηθεί αρχικά. Ποιο είναι το ελάχιστο δυνατό πλήθος τετραγώνων που μένουν κενά μετά από μια τέτοια μετακίνηση;
12. Έστω $S(n, k)$ το πλήθος των διαμερίσεων του συνόλου $[n]$ με k μέρη (οι αριθμοί $S(n, k)$ λέγονται *αριθμοί Stirling του δεύτερου είδους*). Για παράδειγμα $S(3, 2) = 3$, διότι υπάρχουν οι τρεις διαμερίσεις $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$ και $\{\{2, 3\}, \{1\}\}$ του $[3]$ με δύο μέρη.
- (α) Δείξτε ότι $S(n, k) = kS(n-1, k) + S(n-1, k-1)$.
- (β) Δείξτε ότι $S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$.
- (γ) Δείξτε ότι

$$x^n = \sum_{k=1}^n S(n, k) x(x-1) \cdots (x-k+1)$$

για $x \in \mathbb{R}$. Για παράδειγμα έχουμε $S(3, 1) = 1$, $S(3, 2) = 3$ και $S(3, 3) = 1$ και συνεπώς $x^3 = x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2)$.

13. Έστω $B(n)$ το πλήθος των διαμερίσεων του συνόλου $[n]$ (οι αριθμοί $B(n)$ λέγονται *αριθμοί του Bell*). Για παράδειγμα $B(3) = 5$, διότι υπάρχουν οι πέντε διαμερίσεις $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$, $\{\{2, 3\}, \{1\}\}$ και $\{\{1, 2, 3\}\}$ του $[3]$.
- (α) Δείξτε ότι $B(n) = \sum_{k=1}^n S(n, k)$, όπου $S(n, k)$ είναι οι αριθμοί Stirling της Άσκησης 12.
- (β) Δείξτε ότι $B(n+1) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B(i)$ για $n \geq 0$, όπου $B(0) = 1$.
- (γ) Δείξτε ότι

$$B(n) = \frac{1}{e} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n}{i!}$$

για $n \geq 0$, όπου e είναι η βάση των Νεπερίων λογαρίθμων.

14. Έστω B_n το σύνολο των υποσυνόλων του $[n]$. Για $S, T \in B_n$ θέτουμε $S \equiv T$ αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f: S \rightarrow T$.

- (α) Δείξτε ότι $\eta \equiv$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο B_n .
- (β) Περιγράψτε τις κλάσεις ισοδυναμίας της \equiv .
15. (α) Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένο μη κενό μερικώς διατεταγμένο σύνολο έχει τουλάχιστον ένα ελαχιστικό στοιχείο και τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο.
- (β) Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένο μη κενό μερικώς διατεταγμένο σύνολο έχει ελαχιστικό στοιχείο a και μεγιστικό στοιχείο b , τέτοια ώστε $a \preceq b$.
- (γ) Δείξτε ότι κάθε ολική διάταξη σε σύνολο P με n στοιχεία είναι της μορφής $\sigma_1 \prec \sigma_2 \prec \dots \prec \sigma_n$ για κάποια αναδιάταξη $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ του P .
16. Στο σύνολο $P_n = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \leq a, b \leq n\}$ θέτουμε $(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2)$ αν $a_1 \leq a_2$ και $b_1 \leq b_2$ στη φυσική διάταξη των ακεραίων.
- (α) Δείξτε ότι η σχέση \preceq είναι μερική διάταξη στο P_n .
- (β) Σχεδιάστε το διάγραμμα Hasse αυτής της μερικής διάταξης για $n = 4$.
- (γ) Υπολογίστε το ύψος της P_n .
- (δ) Υπολογίστε το πλάτος της P_n .
17. Έστω η μερική διάταξη B_n των υποσυνόλων του $[n]$.
- (α) Δείξτε ότι στη B_n το T καλύπτει το S αν και μόνο αν $S \subseteq T$ και $\#T = \#S + 1$
- (β) Δείξτε ότι $\text{height}(B_n) = n + 1$.
- (γ) Πόσες αλυσίδες της B_n έχουν $n + 1$ στοιχεία;
18. Έστω P_n το σύνολο των υποσυνόλων του $\{1, -1, 2, -2, \dots, n, -n\}$ τα οποία περιέχουν το πολύ ένα στοιχείο του $\{i, -i\}$ για κάθε $1 \leq i \leq n$. Θεωρούμε τη μερική διάταξη στο P_n που ορίζεται θέτοντας $S \leq T$ αν $S \subseteq T$, για $S, T \in P_n$.
- (α) Πόσα στοιχεία έχει το P_n ; Για $0 \leq k \leq n$, πόσα στοιχεία του P_n έχουν πληθύνισμο ίσο με k ;
- (β) Σχεδιάστε το διάγραμμα Hasse της διάταξης P_n για $n = 2$.
- (γ) Υπολογίστε το ύψος της P_n για κάθε θετικό ακέραιο n .
- (δ) Δείξτε ότι για το πλάτος της P_n ισχύει $\text{width}(P_n) \geq (3^n - 1)/n$ για κάθε θετικό ακέραιο n .
- (ε) Ισχύει η ισότητα στο (δ) για $n = 4$;
19. Έστω Q_n το σύνολο $[n]$, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση της διαιρετότητας.
- (α) Σχεδιάστε το διάγραμμα Hasse αυτής της μερικής διάταξης για $n = 6$ και $n = 9$.

(β) Υπολογίστε το ύψος της Q_n .

(γ) Υπολογίστε το πλάτος της Q_n .

20. Σε ένα πάρτυ κάθε κορίτσι έχει χορέψει με τουλάχιστον ένα αγόρι, αλλά δεν υπάρχει αγόρι που να έχει χορέψει με όλα τα κορίτσια. Δείξτε ότι υπάρχουν δύο ζευγάρια ab και $a'b'$ που έχουν χορέψει, τέτοια ώστε ο a να μην έχει χορέψει με τη b' και ο a' να μην έχει χορέψει με τη b .
21. Έστω θετικοί ακέραιοι $a_1 < a_2 < \dots < a_{m+1}$. Δείξτε ότι μπορούμε να επιλέξουμε είτε $m + 1$ από αυτούς ώστε κανείς από τους ακεραίους που επιλέξαμε να μη διαιρεί κάποιον άλλο, είτε $n + 1$ από αυτούς $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_{n+1}}$, ο καθένας από τους οποίους να διαιρεί τον επόμενο.
22. Έστω $1 \leq k \leq n$. Πόσα το πολύ k -υποσύνολα του $[n]$ μπορούμε να επιλέξουμε, ώστε οποιαδήποτε δύο από τα υποσύνολα αυτά να έχουν ένα τουλάχιστον κοινό στοιχείο;

Υποδείξεις - Λύσεις

- (α) Την ιδιότητα αυτή έχουν, για παράδειγμα, οι τρεις κορυφές και το βαρύκεντρο του δοσμένου τριγώνου.

(β) Τα μέσα των πλευρών χωρίζουν το ισόπλευρο τρίγωνο σε 4 ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρές μήκους $1/2$. Καθένα από τα 5 δοσμένα σημεία ανήκει σε κάποιο από τα 4 αυτά τρίγωνα. Από την αρχή του περιστερώνα, δύο σημεία ανήκουν υποχρεωτικά στο ίδιο τρίγωνο και συνεπώς απέχουν μεταξύ τους απόσταση που δεν υπερβαίνει το $1/2$.

(γ) Την ιδιότητα αυτή έχουν, για παράδειγμα, οι τρεις κορυφές και τα μέσα των τριών ακμών του δοσμένου τριγώνου.

(δ) Αφήνεται στον αναγνώστη να διαμερίσει το δοσμένο τρίγωνο σε τρία ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρά μήκους μικρότερου από $1/2$ και τρεις ακόμη περιοχές, η καθεμιά διαμέτρου επίσης μικρότερης από $1/2$. Το ζητούμενο έπεται από την αρχή του περιστερώνα, όπως στο (β).
- Όχι. Χρωματίζουμε τα τετράγωνα της σκακιέρας άσπρα και μαύρα, έτσι ώστε δύο οποιαδήποτε γειτονικά τετράγωνα να έχουν διαφορετικό χρώμα. Από τα 25 τετράγωνα τα 13 έχουν το ένα από τα δύο χρώματα, έστω το A , και τα υπόλοιπα 12 το άλλο χρώμα, έστω το B . Αφού τα 13 πιόνια που είναι τοποθετημένα σε τετράγωνα χρώματος A μετακινούνται στα 12 τετράγωνα χρώματος B , σύμφωνα με την αρχή του περιστερώνα δύο τουλάχιστον από τα πιόνια αυτά θα καταλήξουν αναγκαστικά στο ίδιο τετράγωνο.
- Ας συμβολίσουμε με C_1, C_2, \dots, C_{11} τις δοσμένες ακολουθίες. Αφού υπάρχουν μόνο δέκα δεκαδικά ψηφία, από την αρχή του περιστερώνα προκύπτει ότι για κάθε δείκτη k , δύο τουλάχιστον από τις ακολουθίες έχουν ίσες k -συντεταγμένες. Θέτουμε $S_k = \{i_k, j_k\}$, όπου C_{i_k} και C_{j_k} είναι δύο τέτοιες ακολουθίες με $i_k < j_k$ και σχηματίζουμε την ακολουθία (S_1, S_2, \dots) . Αφού υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους υποσύνολα του $\{1, 2, \dots, 11\}$ με δύο στοιχεία, κάποιο σύνολο $\{i, j\}$ επαναλαμβάνεται άπειρες φορές στους όρους της ακολουθίας αυτής. Από αυτό προκύπτει ότι οι ακολουθίες C_i και C_j έχουν την επιθυμητή ιδιότητα.
- (α) Έστω a_1, a_2, \dots, a_n οι ακέραιοι και έστω $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$ για $1 \leq i \leq n$. Αν κάποιος από τους ακεραίους s_1, \dots, s_n διαιρείται με το n , τότε το ζητούμενο προφανώς ισχύει. Αν όχι, τότε τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης των s_1, \dots, s_n με το n είναι τα $1, 2, \dots, n-1$. Σύμφωνα με την αρχή του περιστερώνα, δύο από τους ακεραίους s_1, \dots, s_n , έστω οι s_i και s_j με $i < j$, αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο διαιρούμενοι με το n και επομένως το n διαιρεί τη διαφορά $s_j - s_i = a_{i+1} + \dots + a_j$.

(β) Ένα τέτοιο σύνολο είναι το $\{n+1, 2n+1, \dots, n^2-n+1\}$.
- Θεωρούμε την απεικόνιση $f: \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ με $f(x) = 0$, αν ο x είναι άρτιος και $f(x) = 1$, αν ο x είναι περιττός. Έστω A το σύνολο των πέντε σημείων του \mathbb{Z}^2 που δίνεται στο (α) και έστω η απεικόνιση $g: A \rightarrow \{0, 1\}^2$ με $g(x_1, x_2) = (f(x_1), f(x_2))$. Αφού το $\{0, 1\}^2$ έχει τέσσερα στοιχεία, σύμφωνα με την αρχή του περιστερώνα υπάρχουν δύο σημεία (x_1, x_2) και (y_1, y_2) του A τέτοια ώστε $g(x_1, x_2) = g(y_1, y_2)$, δηλαδή με $f(x_1) = f(y_1)$ και $f(x_2) = f(y_2)$. Αυτό σημαίνει ότι οι x_1, y_1 είναι και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο

περιττοί και ομοίως για τους x_2, y_2 , οπότε το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα (x_1, x_2) και (y_1, y_2) έχει ακέραιες συντεταγμένες $(x_1 + y_1)/2$ και $(x_2 + y_2)/2$. Για το (β) εργαζόμαστε όπως στην ειδική περίπτωση $n = 2$, χρησιμοποιώντας την απεικόνιση $h : A \rightarrow \{0, 1\}^n$ με $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$. Για το (γ) παρατηρούμε ότι τα 2^n στοιχεία του $\{0, 1\}^n$ έχουν την επιθυμητή ιδιότητα.

6. Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο μέγιστο είναι ίσο με $(n-1)!$. Παρατηρούμε πρώτα ότι οι αναδιατάξεις $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ του $[n]$ με $\sigma_n = n$ τέμνονται ανά δύο και είναι $(n-1)!$ σε πλήθος. Έστω S ένα τυχαίο σύνολο αναδιατάξεων του $[n]$, οποιεσδήποτε δύο από τις οποίες τέμνονται. Θα δείξουμε ότι το S έχει το πολύ $(n-1)!$ στοιχεία. Για αναδιατάξεις $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ και τ του $[n]$ γράφουμε $\sigma \sim \tau$, αν $\tau = (\sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{i-1})$ για κάποιο δείκτη $1 \leq i \leq n$. Για παράδειγμα, αν $n = 4$ και $\sigma = (3, 1, 4, 2)$, τότε οι αναδιατάξεις τ του συνόλου $[4]$ με $\sigma \sim \tau$ είναι οι $(3, 1, 4, 2)$, $(1, 4, 2, 3)$, $(4, 2, 3, 1)$ και $(2, 3, 1, 4)$. Εύκολα μπορεί να δείξει κανείς ότι $\eta \sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των $n!$ αναδιατάξεων του $[n]$ και ότι κάθε κλάση ισοδυναμίας έχει ακριβώς n στοιχεία. Από αυτά προκύπτει ότι το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας της \sim είναι ίσο με $(n-1)!$. Παρατηρούμε τέλος ότι δύο αναδιατάξεις σ και τ του $[n]$ με $\sigma \sim \tau$ τέμνονται μόνο αν $\sigma = \tau$. Κατά συνέπεια, το σύνολο S περιέχει το πολύ ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας της \sim και επομένως ισχύει $\#S \leq (n-1)!$, όπως το θέλαμε.

7. (α) Δείξτε ότι μια ακολουθία $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ έχει άθροισμα στοιχείων ίσο με $-n + 2k$ αν και μόνο αν ακριβώς k από τις συντεταγμένες της ακολουθίας αυτής είναι ίσες με 1 (και οι υπόλοιπες με -1).

(β) Μια τέτοια απεικόνιση είναι η εξής. Έστω $\sigma = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in A(n, k)$, οπότε $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = -n + 2k < 0$. Είναι φανερό ότι θα πρέπει να υπάρχει ένας τουλάχιστον δείκτης $1 \leq i \leq n$ για τον οποίο ισχύει $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_i = -1$. Θεωρούμε το μικρότερο τέτοιο δείκτη i και θέτουμε $f(\sigma) = (-\varepsilon_1, \dots, -\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_n)$. Για παράδειγμα, αν $n = 8$, $k = 3$ και $\sigma = (1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, -1)$, τότε $i = 5$ και $f(\sigma) = (-1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, -1)$. Παρατηρούμε ότι $f(\sigma) \in A(n, k+1)$, οπότε έχουμε ορίσει μια απεικόνιση $f : A(n, k) \rightarrow A(n, k+1)$. Για να δείξουμε ότι η f είναι 1-1 παρατηρούμε ότι αν $f(\sigma) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in A(n, k+1)$, τότε ο δείκτης i που ορίσαμε προηγουμένως είναι ο μικρότερος δείκτης $1 \leq i \leq n$ για τον οποίο ισχύει $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_i = 1$. Επομένως αν $f(\tau) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = f(\sigma)$ για κάποιο $\tau \in A(n, k)$, τότε $\tau = (-\varepsilon_1, \dots, -\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_n) = \sigma$. Το (γ) έπεται από τα (α), (β) και την Πρόταση 2.1.1 (α).

8. (α) Μια τέτοια απεικόνιση κατασκευάζεται ως εξής. Έστω $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in A_n$ και έστω i ο μικρότερος δείκτης με $|\sigma_1 - \sigma_i| = 1$. Από την υπόθεση $\sigma \in A_n$ παρατηρούμε ότι $3 \leq i \leq n$ και ορίζουμε $f(\sigma) = (\sigma_{i-1}, \dots, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$. Για παράδειγμα, αν $n = 10$ και $\sigma = (7, 1, 4, 9, 3, 8, 5, 10, 6, 2) \in A_{10}$, τότε $i = 6$ και $f(\sigma) = (3, 9, 4, 1, 7, 8, 5, 10, 6, 2)$. Προφανώς $f(\sigma) \in B_n$ και ο i είναι ο μοναδικός δείκτης $j \geq 2$ με την ιδιότητα ότι οι $j-1$ και j συντεταγμένες της $f(\sigma)$ διαφέρουν κατά απόλυτη τιμή κατά ένα. Έπεται ότι η απεικόνιση $f : A_n \rightarrow B_n$ είναι 1-1 διότι αν $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = f(\sigma)$ για κάποιο $\sigma \in A_n$, τότε υπάρχει μοναδικός δείκτης $j \geq 2$ με την ιδιότητα $|\tau_{j-1} - \tau_j| = 1$ και $\sigma = (\tau_{j-1}, \dots, \tau_2, \tau_1, \tau_j, \dots, \tau_n)$.

(β) Από την Πρόταση 2.1.1 έχουμε $\#A_n \leq \#B_n$. Παρατηρούμε ότι η 1-1 απεικόνιση $f : A_n \rightarrow B_n$ που κατασκευάσαμε στο (α) δεν είναι επί διότι, για παράδειγμα, οι αναδιατάξεις $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ του B_n με $|\tau_1 - \tau_2| = 1$ δεν ανήκουν στην εικόνα της f . Συνεπώς $\#A_n < \#B_n$ και (ισοδύναμα) $\#B_n > \frac{1}{2} n!$.

9. Χωρίζουμε το τετράγωνο σε 9 τετράγωνα εμβαδού $1/9$ με τον προφανή τρόπο. Από την Πρόταση 2.1.2 για $m = 2$ και $n = 9$ προκύπτει ότι τρία τουλάχιστον από τα σημεία ανήκουν στο ίδιο τετράγωνο. Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι το εμβαδό του τριγώνου με κορυφές τα σημεία αυτά δεν υπερβαίνει το $1/18$.
10. (α) Τοποθετούμε τα 32 πιόνια στα τετράγωνα των τεσσάρων πρώτων γραμμών της σκακιέρας. Σύμφωνα με την αρχή του περιστερώνα, μεταξύ 5 τυχαίων από τα πιόνια που τοποθετήσαμε υπάρχουν δύο που βρίσκονται σε τετράγωνα της ίδιας γραμμής.

1	8	7	6	5	4	3	2
2	1	8	7	6	5	4	3
3	2	1	8	7	6	5	4
4	3	2	1	8	7	6	5
5	4	3	2	1	8	7	6
6	5	4	3	2	1	8	7
7	6	5	4	3	2	1	8
8	7	6	5	4	3	2	1

Σχήμα 2.4: Ένα 8×8 λατινικό τετράγωνο.

(β) Χρωματίζουμε τα τετράγωνα της σκακιέρας με 8 χρώματα $1, 2, \dots, 8$ όπως στο Σχήμα 2.4. Από την Πρόταση 2.1.2 για $m = 4$ και $n = 8$ έπεται ότι από τα 33 πιόνια, τουλάχιστον 5 βρίσκονται σε τετράγωνα του ίδιου χρώματος. Όπως φαίνεται στο σχήμα, τέτοια τετράγωνα βρίσκονται ανά δύο σε διαφορετικές γραμμές και διαφορετικές στήλες (ο χρωματισμός του Σχήματος 2.4 είναι παράδειγμα ενός 8×8 λατινικού τετραγώνου).

11. Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι αν ο n είναι άρτιος, τότε υπάρχει τέτοια μετακίνηση μετά την οποία κανένα τετράγωνο δε μένει κενό. Έστω ότι ο n είναι περιττός. Χρωματίζουμε τα τετράγωνα της πρώτης στήλης της σκακιέρας άσπρα, τα τετράγωνα της δεύτερης στήλης μαύρα, τα τετράγωνα της τρίτης στήλης άσπρα και ούτω καθεξής και παρατηρούμε ότι κάθε πιόνι μετακινείται από άσπρο τετράγωνο σε μαύρο ή αντίστροφα. Αφού υπάρχουν ακριβώς n άσπρα τετράγωνα περισσότερα από μαύρα, τουλάχιστον n άσπρα τετράγωνα θα μείνουν κενά μετά τη μετακίνηση. Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι υπάρχει μετακίνηση μετά την οποία το πλήθος των κενών τετραγώνων της σκακιέρας είναι ακριβώς ίσο με n .
12. (α) Από τις $S(n, k)$ διαμερίσεις του συνόλου $[n]$ με k μέρη, οι $S(n-1, k-1)$ περιέχουν το μέρος $\{n\}$. Οι υπόλοιπες προκύπτουν από καθεμία από τις $S(n-1, k)$ διαμερίσεις

του συνόλου $[n - 1]$ με k μέρη, προσθέτοντας το n σε ένα από τα μέρη αυτά με k δυνατούς τρόπους. Το ζητούμενο προκύπτει από το συλλογισμό αυτόν και τις Προτάσεις 1.2.2 και 1.2.3.

(β) Γνωρίζουμε από την Πρόταση 1.4.1 ότι ο αχέραιος $a(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$ είναι ίσος με το πλήθος των επί απεικονίσεων $f : [n] \rightarrow [k]$. Ισχυριζόμαστε ότι οι απεικονίσεις αυτές βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχία με τα ζεύγη (π, σ) , όπου π είναι διαμέριση του συνόλου $[n]$ με k μέρη και $\sigma = (B_1, B_2, \dots, B_k)$ είναι αναδιάταξη των μερών του π . Πράγματι, από ένα τέτοιο ζεύγος (π, σ) ορίζεται η επί απεικόνιση f θέτοντας $f^{-1}(i) = B_i$, δηλαδή $f(x) = i$ αν $x \in B_i$, για $1 \leq i \leq k$. Για παράδειγμα αν $n = 5$, $k = 3$, $\pi = \{\{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3\}\}$ και $\sigma = (\{2, 5\}, \{3\}, \{1, 4\})$, τότε $f(2) = f(5) = 1$, $f(3) = 2$ και $f(1) = f(4) = 3$. Υπάρχουν $S(n, k)$ διαμερίσεις του $[n]$ με k μέρη και $k!$ τρόποι να αναδιατάξουμε τα μέρη μιας τέτοιας διαμέρισης. Κατά συνέπεια $a(n, k) = k! S(n, k)$, όπως το θέλαμε.

(γ) Η προτεινόμενη σχέση είναι μια ισότητα μεταξύ δύο πολυωνύμων στο x με πραγματικούς συντελεστές και συνεπώς αρκεί να την αποδείξουμε για άπειρες τιμές της μεταβλητής x . Θα την αποδείξουμε για $x = m$, όπου m είναι τυχαίος θετικός αχέραιος. Παρατηρούμε ότι ο αχέραιος m^n είναι ίσος με το πλήθος των απεικονίσεων $f : [n] \rightarrow [m]$, αφού για κάθε $1 \leq i \leq n$ έχουμε m επιλογές για το $f(i) \in [m]$. Παρατηρούμε επίσης ότι η f καθορίζεται από την εικόνα της $B \subseteq [m]$ και την επί απεικόνιση $g : [n] \rightarrow B$ με $g(i) = f(i)$ για $1 \leq i \leq n$. Υπάρχουν $\binom{m}{k}$ υποσύνολα B του $[m]$ με k στοιχεία και για κάθε τέτοιο υποσύνολο, υπάρχουν $k! S(n, k)$ επί απεικονίσεις $g : [n] \rightarrow B$ από το ερώτημα (α). Κατά συνέπεια, υπάρχουν συνολικά

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} k! S(n, k) &= \sum_{k=1}^m S(n, k) m(m-1) \cdots (m-k+1) \\ &= \sum_{k=1}^n S(n, k) m(m-1) \cdots (m-k+1) \end{aligned}$$

απεικονίσεις $f : [n] \rightarrow [m]$. Έπεται ότι $m^n = \sum_{k=1}^n S(n, k) m(m-1) \cdots (m-k+1)$.

13. (α) Προκύπτει αμέσως από την προσθετική αρχή.

(β) Έστω π διαμέριση του συνόλου $[n + 1]$. Αν $S \subseteq [n + 1]$ είναι το μέρος της π που περιέχει το $n + 1$ και $\#S = i + 1$, τότε $0 \leq i \leq n$. Υπάρχουν $\binom{n}{i}$ τρόποι να επιλεγούν τα i στοιχεία του S εκτός του $n + 1$ από τα $1, 2, \dots, n$ και $B(n - i)$ τρόποι να διαμεριστεί το $[n + 1] \setminus S$ ώστε να σχηματιστούν τα υπόλοιπα μέρη της διαμέρισης π . Συνεπώς υπάρχουν $\binom{n}{i} B(n - i)$ διαμερίσεις του $[n + 1]$ για τις οποίες το μέρος που περιέχει το $n + 1$ έχει $i + 1$ στοιχεία. Κατά συνέπεια, υπάρχουν συνολικά $B(n + 1) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B(n - i) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B(i)$ διαμερίσεις του $[n + 1]$.

(γ) Θέτοντας $S(n, k) = 0$ για $k > n$, έχουμε

$$B(n) = \sum_{k=1}^n S(n, k) = \sum_{k=1}^{\infty} S(n, k)$$

από το ερώτημα (α). Από τον τύπο της Άσκησης 12 (β) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} B(n) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n}{i!} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{(-1)^{k-i}}{(k-i)!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} = \frac{1}{e} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n}{i!}. \end{aligned}$$

14. (α) Η ανακλαστική ιδιότητα ισχύει διότι η ταυτοτική απεικόνιση $S \rightarrow S$ είναι αμφιμονοσήμαντη για κάθε $S \subseteq [n]$. Η συμμετρική και μεταβατική ιδιότητα ισχύουν διότι αν $f : S \rightarrow T$ και $g : T \rightarrow R$ είναι αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις, τότε η αντίστροφη απεικόνιση $f^{-1} : T \rightarrow S$ καθώς και η σύνθεση $g \circ f : S \rightarrow R$ είναι επίσης αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις.

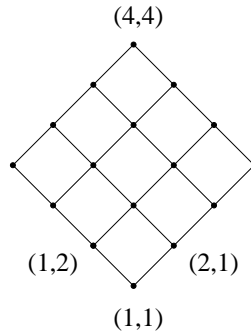
(β) Αν το $S \subseteq [n]$ έχει k στοιχεία, τότε υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : S \rightarrow [k]$. Συνεπώς $S \equiv [k]$ και το S ανήκει στην κλάση ισοδυναμίας C_k του $[k]$. Αντίστροφα αν $S \equiv [k]$, τότε $\#S = k$. Έπεται ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας της \equiv είναι οι C_0, C_1, \dots, C_n , όπου $C_k = \{S \subseteq [n] : \#S = k\}$.

15. (α) Έστω ότι υπάρχει πεπερασμένο μη κενό μερικώς διατεταγμένο σύνολο (P, \preceq) το οποίο δεν έχει μεγιστικό στοιχείο. Τότε για κάθε $x \in P$ υπάρχει $y \in P$ με $x \prec y$. Επομένως, ξεκινώντας από τυχαίο στοιχείο x_1 του P μπορούμε να βρούμε μια άπειρη ακολουθία $x_1 \prec x_2 \prec x_3 \prec \dots$ στοιχείων του P . Εφόσον το P είναι πεπερασμένο, οι όροι της ακολουθίας αυτής δεν είναι όλοι ανά δύο διαφορετικοί. Άρα υπάρχουν δείκτες $i < j$ με $x_i = x_j$. Από τη μεταβατικότητα και τις $x_i \prec x_{i+1} \prec \dots \prec x_j = x_i$ προκύπτει ότι $x_i \prec x_{i+1}$ και $x_{i+1} \preceq x_i$, σχέσεις που αντιβαίνουν στην αντισυμμετρία. Από την αντίφαση αυτή προκύπτει το ζητούμενο. Εργαζόμαστε ομοίως για την ύπαρξη ελαχιστικού στοιχείου.

(β) Έστω (P, \preceq) το δοσμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο και b τυχαίο μεγιστικό στοιχείο του P , η ύπαρξη του οποίου βεβαιώνεται από το (α). Έστω $Q = \{x \in P : x \preceq b\}$ με τη μερική διάταξη που επάγεται από το P , δηλαδή με $x \preceq y$ στο Q αν $x \preceq y$ στο P . Το Q είναι μη κενό αφού $b \in Q$. Από το (α) το Q έχει τουλάχιστον ένα ελαχιστικό στοιχείο a , το οποίο είναι και ελαχιστικό στοιχείο του P (εξηγήστε γιατί). Αφού $a \in Q$, ισχύει $a \preceq b$ στο P .

(γ) Έστω (P, \preceq) τυχαίο ολικά διατεταγμένο σύνολο με n στοιχεία. Σύμφωνα με το (α) το P έχει τουλάχιστον ένα ελαχιστικό στοιχείο, έστω το σ_1 . Αν x είναι οποιοδήποτε άλλο στοιχείο του P , τότε τα σ_1 και x είναι μεταξύ τους συγκρίσιμα, ενώ δεν ισχύει $x \prec \sigma_1$. Συνεπώς πρέπει να ισχύει $\sigma_1 \prec x$ και το σ_1 είναι το ελάχιστο στοιχείο του P . Χρησιμοποιώντας επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του P , μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει αναδιάταξη $(\sigma_2, \dots, \sigma_n)$ του συνόλου $P \setminus \{\sigma_1\}$ τέτοια ώστε $\sigma_2 \prec \dots \prec \sigma_n$. Όμως έχουμε $\sigma_1 \prec \sigma_2$ στο P και συνεπώς η $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ είναι αναδιάταξη του P με $\sigma_1 \prec \sigma_2 \prec \dots \prec \sigma_n$.

16. (α) Ελέγχουμε τη μεταβατική ιδιότητα. Αν $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in P_n$ και ισχύει $(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2)$ και $(a_2, b_2) \preceq (a_3, b_3)$, τότε $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$ και $a_2 \leq a_3$, $b_2 \leq b_3$



Σχήμα 2.5: Το διάγραμμα Hasse μιας μερικής διάταξης.

στο \mathbb{Z} . Άρα ισχύει και $a_1 \leq a_3$, $b_1 \leq b_3$ στο \mathbb{Z} και συνεπώς $(a_1, b_1) \preceq (a_3, b_3)$. Η ανακλαστική ιδιότητα και η αντισυμμετρία ελέγχονται όμοια.

(β) Βλέπε Σχήμα 2.5.

(γ) Θα δείξουμε ότι $\text{height}(P_n) = 2n - 1$. Παρατηρούμε ότι αν έχουμε $(a, b) \prec (c, d)$ στο P_n , τότε $a + b < c + d$. Επομένως για τυχαία αλυσίδα $(a_1, b_1) \prec (a_2, b_2) \prec \dots \prec (a_k, b_k)$ στο P_n με k στοιχεία ισχύει $2 \leq a_1 + b_1 < a_2 + b_2 < \dots < a_k + b_k \leq 2n$, με $a_i + b_i \in \mathbb{Z}$ για κάθε i και συνεπώς $k \leq 2n - 1$. Επίσης, υπάρχει αλυσίδα στο P_n με ακριβώς $2n - 1$ στοιχεία, για παράδειγμα η

$$(1, 1) \prec (2, 1) \prec \dots \prec (n, 1) \prec (n, 2) \prec \dots \prec (n, n).$$

Έπεται το ζητούμενο.

(δ) Θα δείξουμε ότι $\text{width}(P_n) = n$. Πράγματι, μια αντιαλυσίδα του P_n με n στοιχεία είναι η $\{(n, 1), (n-1, 2), \dots, (1, n)\}$. Επίσης, υπάρχει διαμέριση του P_n σε n αλυσίδες, για παράδειγμα η $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, όπου C_i είναι η αλυσίδα $(1, i) \prec (2, i) \prec \dots \prec (n, i)$ για $1 \leq i \leq n$. Το ζητούμενο έπεται από το Λήμμα 2.4.1 (β).

17. (α) Αν $S \subseteq T$ και $\#T = \#S + 1$, τότε είναι φανερό ότι $S \subset T$ και ότι δεν υπάρχει σύνολο R με $S \subset R \subset T$, δηλαδή ότι το T καλύπτει το S . Αντίστροφα, έστω ότι το T καλύπτει το S . Τότε $S \subseteq T$ και $\#T \geq \#S + 1$. Αν είχαμε $\#T > \#S + 1$, τότε θα υπήρχαν τουλάχιστον δύο διαφορετικά στοιχεία a, b του $T \setminus S$ και θα είχαμε $S \subset S \cup \{a\} \subset T$, οπότε η $S \subset T$ δεν είναι σχέση κάλυψης στη B_n . Η αντίφαση αυτή μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $\#T = \#S + 1$.

(β) Μια αλυσίδα C στη μερική διάταξη B_n με k στοιχεία είναι ένα σύνολο της μορφής $C = \{S_0, S_1, \dots, S_{k-1}\}$ με $S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_{k-1} \subseteq [n]$. Αν $a_i = \#S_i$ για $0 \leq i \leq k-1$, τότε οι a_0, \dots, a_{k-1} είναι ακέραιοι και ισχύει $0 \leq a_0 < \dots < a_{k-1} \leq n$. Από αυτό προκύπτει ότι $k \leq n+1$, δηλαδή οποιαδήποτε αλυσίδα στη B_n έχει το πολύ $n+1$ στοιχεία. Επιπλέον η αλυσίδα C με $S_0 = \emptyset$ και $S_i = \{1, 2, \dots, i\}$ για $1 \leq i \leq n$ έχει ακριβώς $n+1$ στοιχεία. Συμπεραίνουμε ότι το ύψος της B_n είναι ίσο με $n+1$.

(γ) Από τη λύση μας στο ερώτημα (β) προκύπτει ότι μια αλυσίδα C στη B_n με $n+1$ στοιχεία είναι της μορφής $C = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$ με $S_0 = \emptyset$ και $S_i = S_{i-1} \cup \{\sigma_i\}$ με

$\sigma_i \notin S_{i-1}$ για $1 \leq i \leq n$. Επιπλέον, η ακολουθία $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ είναι αναδιάταξη του $[n]$. Για παράδειγμα αν $n = 4$ και $S_0 = \emptyset$, $S_1 = \{3\}$, $S_2 = \{1, 3\}$, $S_3 = \{1, 3, 4\}$, $S_4 = \{1, 2, 3, 4\}$, τότε η αντίστοιχη αναδιάταξη του $[4]$ είναι η $(3, 1, 4, 2)$. Με αυτόν τον τρόπο ορίζεται μια 1-1 αντιστοιχία (ποια είναι η αντίστροφη απεικόνιση;) από το σύνολο των αλυσίδων με $n + 1$ στοιχεία της B_n στο σύνολο των αναδιατάξεων του $[n]$. Συνεπώς υπάρχουν ακριβώς $n!$ αλυσίδες με $n + 1$ στοιχεία στη B_n , όσες και οι αναδιατάξεις του $[n]$.

18. (α) Υπάρχουν $\binom{n}{k}$ τρόποι να επιλεγεί ένα k -υποσύνολο S του $[n]$ και 2^k τρόποι να επιλεγεί ένα πρόσημο $\varepsilon \in \{-, +\}$ για κάθε στοιχείο του S , ώστε να προκύψει ένα στοιχείο του P_n με πληθάρημο k . Συνεπώς ακριβώς $2^k \binom{n}{k}$ από τα στοιχεία του S έχουν πληθάρημο k . Το συνολικό πλήθος των στοιχείων του P_n είναι ίσο με 3^n . Αυτό προκύπτει είτε από την πολλαπλασιαστική αρχή, αφού για κάθε $1 \leq i \leq n$ υπάρχουν οι τρεις επιλογές \emptyset , $\{i\}$ και $\{-i\}$ για την τομή ενός στοιχείου του P_n με το σύνολο $\{i, -i\}$, είτε υπολογίζοντας ότι

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = (2+1)^n = 3^n$$

με χρήση του Διωνυμικού Θεωρήματος.

(β) Αφήνεται στον αναγνώστη.

(γ) Όπως στην Άσκηση 17 (β), βρίσκουμε ότι το ύψος της P_n είναι ίσο με $n + 1$.

(δ) Για κάθε $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, το σύνολο των στοιχείων του P_n με πληθάρημο k αποτελεί αντιαλυσίδα της P_n . Επομένως, από το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) παίρνουμε

$$\text{width}(P_n) \geq 2^k \binom{n}{k} \quad (2.2)$$

για κάθε τέτοιο k . Το ζητούμενο προκύπτει παρατηρώντας ότι οι n το πλήθος αριθμοί $2^k \binom{n}{k}$ για $1 \leq k \leq n$ αθροίζονται στο $3^n - 1$ και συμπεραίνοντας ότι ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι μεγαλύτερος ή ίσος του $(3^n - 1)/n$.

(ε) Όχι, αφού από τη (2.2) για $n = 4$ και $k = 3$ προκύπτει ότι $\text{width}(P_4) \geq 32$.

19. (α) Αφήνεται στον αναγνώστη.

(β) Θα δείξουμε ότι $\text{height}(Q_n) = \lfloor 1 + \log_2(n) \rfloor$. Κάθε αλυσίδα στο Q_n μήκους $m + 1$ είναι της μορφής $q_0 \prec q_0 q_1 \prec \dots \prec q_0 q_1 \dots q_m$, όπου q_i είναι θετικοί ακέραιοι με $q_i \geq 2$ για $1 \leq i \leq m$ και $q_0 q_1 \dots q_m \leq n$. Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι $2^m \leq n$, δηλαδή $m \leq \log_2(n)$ και επομένως το μήκος της αλυσίδας δεν υπερβαίνει το $\lfloor 1 + \log_2(n) \rfloor$. Θέτοντας $q_0 = 1$ και $q_i = 2$ για $i \geq 1$ προκύπτει η αλυσίδα $\{1, 2, 2^2, \dots, 2^m\}$ μήκους ακριβώς $m + 1$, με $m = \lfloor \log_2(n) \rfloor$.

(γ) Θα δείξουμε ότι $\text{width}(Q_n) = \lfloor (n + 1)/2 \rfloor$. Υποθέτουμε ότι ο n είναι άρτιος, έστω $n = 2m$ (η απόδειξη είναι παρόμοια αν ο n είναι περιττός). Από την ύπαρξη της αντιαλυσίδας $\{m + 1, m + 2, \dots, 2m\}$ του Q_n προκύπτει ότι $\text{width}(Q_n) \geq m = n/2$. Για να αποδείξουμε την αντίστροφη ανισότητα, θέτουμε $C_q = \{q, 2q, 4q, \dots\} \cap [n]$ για κάθε περιττό ακέραιο $q \in [n]$. Είναι φανερό ότι το C_q είναι αλυσίδα του Q_n . Επιπλέον, τα m σύνολα C_1, C_3, \dots, C_{n-1} αποτελούν τα μέρη μιας διαμέρισης του $[n]$, αφού κάθε

θετικός ακέραιος γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $2^k q$, όπου $k \in \mathbb{N}$ και q είναι θετικός περιττός ακέραιος. Από το Πρόρισμα 2.4.1 προκύπτει ότι $\text{width}(Q_n) \leq m$.

20. Έστω S το σύνολο των κοριτσιών και a_1, a_2, \dots, a_m τα αγόρια. Για $1 \leq i \leq m$, έστω A_i το σύνολο των κοριτσιών που έχουν χορέψει με τον a_i . Από τις υποθέσεις του προβλήματος προκύπτει ότι τα A_1, A_2, \dots, A_m είναι γνήσια υποσύνολα του S και ότι η ένωσή τους είναι ίση με S . Ισχυριζόμαστε ότι δύο από τα σύνολα αυτά είναι μη συγκρίσιμα ως προς τη σχέση του εγκλεισμού. Πράγματι στην αντίθετη περίπτωση, σύμφωνα με το μέρος (γ) της Άσκησης 15, υπάρχει αναδιάταξη $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ του $[m]$ με την ιδιότητα $A_{\sigma_1} \subseteq A_{\sigma_2} \subseteq \dots \subseteq A_{\sigma_m}$, οπότε η ένωση των A_i είναι ίση με το γνήσιο υποσύνολο A_{σ_m} του S . Αυτή η αντίφαση αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας. Έχουμε δείξει, δηλαδή, ότι υπάρχουν δείκτες $i < j$ τέτοιοι ώστε $A_i \not\subseteq A_j$ και $A_j \not\subseteq A_i$. Επιλέγοντας στοιχεία $b_i \in A_i \setminus A_j$ και $b_j \in A_j \setminus A_i$, βρίσκουμε τα ζεύγη $a_i b_i$ και $a_j b_j$ με τις απαιτούμενες ιδιότητες.
21. Προκύπτει εφαρμόζοντας το Πρόρισμα 2.4.2 στο σύνολο $P = \{a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}\}$, εφοδιασμένο με τη μερική διάταξη της διαιρετότητας.
22. Αν $n < 2k$, τότε οποιαδήποτε δύο k -υποσύνολα του $[n]$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό στοιχείο και συνεπώς το ζητούμενο μέγιστο είναι ίσο με $\binom{n}{k}$. Αν $n \geq 2k$, θα δείξουμε ότι το ζητούμενο μέγιστο είναι ίσο με $\binom{n-1}{k-1}$ (η πρόταση αυτή είναι γνωστή ως το *Θεώρημα Erdős-Ko-Rado*). Παρατηρούμε πρώτα ότι τα k -υποσύνολα του $[n]$ που περιέχουν ένα συγκεκριμένο στοιχείο, π.χ. το 1, είναι $\binom{n-1}{k-1}$ σε πλήθος και έχουν τη ζητούμενη ιδιότητα. Έστω \mathcal{A} τυχαία οικογένεια k -υποσυνόλων του $[n]$, οποιαδήποτε δύο από τα οποία έχουν μη κενή τομή. Λέμε ότι μια κυκλική αναδιάταξη σ του $[n]$ περιέχει ένα υποσύνολο S του $[n]$ αν τα στοιχεία του S εμφανίζονται διαδοχικά στη σ (με τυχαία σειρά). Συμβολίζουμε με m το πλήθος των ζευγών (S, σ) , όπου $S \in \mathcal{A}$ και η σ είναι κυκλική αναδιάταξη του $[n]$ που περιέχει το S . Για κάθε k -υποσύνολο S του $[n]$ υπάρχουν ακριβώς $k!(n-k)!$ κυκλικές αναδιατάξεις του $[n]$ που περιέχουν το S και συνεπώς $m = \#\mathcal{A} \cdot k!(n-k)!$. Επίσης κάθε κυκλική αναδιάταξη του $[n]$ περιέχει το πολύ k στοιχεία της \mathcal{A} (εξηγήστε γιατί) και συνεπώς $m \leq (n-1)! \cdot k$. Συμπεραίνουμε ότι

$$\#\mathcal{A} \leq \frac{(n-1)! \cdot k}{k!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1},$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

Κεφάλαιο 3

Γραφήματα

Η έννοια του γραφήματος αποτελεί ένα απλό αλλά χρήσιμο μαθηματικό μοντέλο, με βάση το οποίο μπορούν να μελετηθούν επιτυχώς φαινόμενα σε ένα ευρύτατο φάσμα των θετικών και κοινωνικών επιστημών. Σκοπός μας στο κεφάλαιο αυτό είναι, αφού εισάγουμε την έννοια του γραφήματος, να μελετήσουμε διάφορα προβλήματα των διακριτών μαθηματικών που μπορούν να διατυπωθούν στη γλώσσα της θεωρίας των γραφημάτων και να εξοικειωθούμε με κάποιες από τις τεχνικές της θεωρίας αυτής. Ορισμένα από τα προβλήματα αυτά αφορούν ειδικές κατηγορίες γραφημάτων (όπως δένδρα, διμερή γραφήματα και επίπεδα γραφήματα), με τις οποίες θα ασχοληθούμε σε επιμέρους ενότητες.

3.1 Η έννοια του γραφήματος

Αρχίζουμε με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.1.1 Σε μια συνάντηση επτά ατόμων, κάποιοι ανταλλάσσουν χειραψίες (θεωρούμε ότι κανείς δεν ανταλλάσσει χειραψία με τον εαυτό του). Θα δείξουμε ότι κάποιος έχει ανταλλάξει άρτιο πλήθος χειραψιών. \square

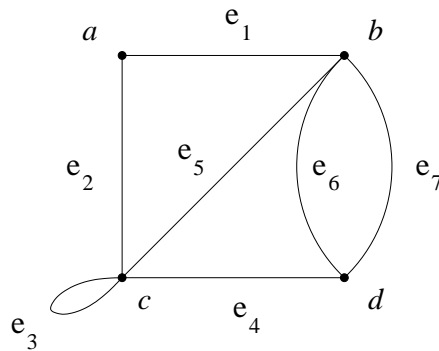
Στόχος μας είναι να περιγράψουμε την κατάσταση αυτή με μια αφηρημένη μαθηματική δομή, η οποία θα λαμβάνει υπόψη μόνο τις πληροφορίες που είναι ουσιώδεις για τη λύση του προβλήματος και θα αδιαφορεί για τις υπόλοιπες. Η δομή που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αυτή ενός γραφήματος, το οποίο θεωρεί τα άτομα της συνάντησης ως κορυφές και κάθε χειραψία μεταξύ των a και b ως ακμή που συνδέει τις κορυφές a και b του γραφήματος. Το ζητούμενο είναι να δείξουμε ότι υπάρχει κορυφή η οποία είναι άκρο άρτιου πλήθους ακμών. Θα επανέλθουμε στο Παράδειγμα 3.1.1 μετά τους σχετικούς ορισμούς.

Ορισμός 3.1.1 Γράφημα λέγεται μια τριάδα $G = (V, E, \varphi)$, όπου V και E είναι σύνολα τα στοιχεία των οποίων λέγονται κορυφές και ακμές του G , αντίστοιχα, και

$$\varphi : E \rightarrow \{\{a, b\} : a, b \in V\}$$

είναι απεικόνιση από το E στο σύνολο των υποσυνόλων του V με ένα ή δύο στοιχεία. Αν $e \in E$ και $\varphi(e) = \{a, b\}$, τότε οι κορυφές a, b λέγονται άκρα της ακμής e .

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μόνο πεπερασμένα γραφήματα, δηλαδή γραφήματα με πεπερασμένα σύνολα κορυφών και ακμών. Στο Σχήμα 3.1 απεικονίζεται ένα γράφημα $G = (V, E, \varphi)$ με σύνολο κορυφών $V = \{a, b, c, d\}$ και επτά ακμές, για το οποίο ισχύουν $\varphi(e_1) = \{a, b\}$, $\varphi(e_2) = \{a, c\}$, $\varphi(e_3) = \{c\}$ κ.ο.κ. Για το γράφημα στο οποίο αναφερθήκαμε μετά το Παράδειγμα 3.1.1, V είναι το σύνολο των επτά ατόμων, E είναι το σύνολο των χειραψιών που έχουν ανταλλαχθεί και $\varphi(e) = \{a, b\}$ αν e είναι χειραψία μεταξύ των a και b .



Σχήμα 3.1: Ένα γράφημα με τέσσερις κορυφές.

Θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη ορολογία για ένα γράφημα $G = (V, E, \varphi)$. Λέμε ότι δύο κορυφές $a, b \in V$ είναι γειτονικές, και ότι συνδέονται με ακμή, στο G αν υπάρχει $e \in E$ με $\varphi(e) = \{a, b\}$. Μια ακμή $e \in E$ με άκρα a και b λέγεται θυλιά (ή βρόχος) αν $a = b$. Δύο ακμές $e_1, e_2 \in E$ λέγονται παράλληλες αν $\varphi(e_1) = \varphi(e_2) = \{a, b\}$ για διακεκριμένες κορυφές a, b . Το γράφημα G λέγεται απλό αν δεν έχει θυλιές ή παράλληλες ακμές. Στην περίπτωση αυτή ταυτίζουμε μια ακμή $e \in E$ με το σύνολο $\{a, b\}$ των δύο άκρων της a, b και θεωρούμε ότι $E \subseteq \binom{V}{2}$. Το πλήθος των ακμών του G που δεν είναι θυλιές και έχουν ένα από τα δύο άκρα τους ίσα με v λέγεται βαθμός της κορυφής v και συμβολίζεται με $\deg(v)$. Η κορυφή v λέγεται απομονωμένη αν $\deg(v) = 0$ και άρτια ή περιττή αν ο βαθμός της v είναι άρτιος ή περιττός ακέραιος, αντίστοιχα. Στο γράφημα του Σχήματος 3.1 η ακμή e_3 είναι θυλιά, οι e_6, e_7 είναι παράλληλες και οι κορυφές a, b, c, d έχουν βαθμούς 2, 4, 3, 3,

αντίστοιχα. Στο Παράδειγμα 3.1.1 ισχυριζόμαστε ότι κάθε γράφημα με επτά κορυφές έχει τουλάχιστον μία άρτια κορυφή.

Πρόταση 3.1.1 *Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών ενός γραφήματος G είναι ίσο με $2m$, όπου m είναι το πλήθος των ακμών του G που δεν είναι θυλίες.*

Απόδειξη. Έστω $G = (V, E, \varphi)$. Συμβολίζουμε με F το σύνολο των ακμών του G που δεν είναι θυλίες, οπότε $F \subseteq E$ και $\#F = m$, και με S το σύνολο των ζευγών (v, e) , όπου $v \in V$, $e \in F$ και η κορυφή v είναι άκρο της e . Παρατηρούμε ότι για κάθε $e \in F$ υπάρχουν ακριβώς δύο κορυφές v του G με $(v, e) \in S$ και συνεπώς $\#S = 2m$. Επίσης, για κάθε $v \in V$ υπάρχουν $\deg(v)$ ακμές $e \in F$ με $(v, e) \in S$ και συνεπώς $\#S = \sum_{v \in V} \deg(v)$. Το ζητούμενο προκύπτει συγκρίνοντας τις δύο ισότητες για το $\#S$. \square

Το επόμενο πόρισμα απαντά στο ερώτημα του Παραδείγματος 3.1.1.

Πόρισμα 3.1.1 *Το πλήθος των περιττών κορυφών τυχαιού γραφήματος G είναι άρτιος αριθμός. Ειδικότερα, κάθε γράφημα με περιττό πλήθος κορυφών έχει τουλάχιστον μία άρτια κορυφή.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.1.1 έχουμε ότι το άθροισμα των βαθμών των κορυφών του G είναι άρτιος αριθμός. Συνεπώς το πλήθος των περιττών προσθετέων στο άθροισμα αυτό, δηλαδή το πλήθος των περιττών κορυφών του G , είναι άρτιος αριθμός. \square

Σημαντική είναι η έννοια του ισομορφισμού γραφημάτων. Δύο γραφήματα λέγονται ισόμορφα αν το ένα προκύπτει από το άλλο αλλάζοντας τις ονομασίες κορυφών και ακμών. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τον εξής ορισμό.

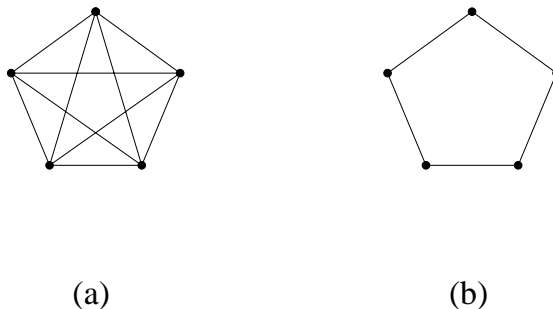
Ορισμός 3.1.2 *Δύο γραφήματα $G_1 = (V_1, E_1, \varphi_1)$ και $G_2 = (V_2, E_2, \varphi_2)$ λέγονται ισόμορφα αν υπάρχουν αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις $f : V_1 \rightarrow V_2$ και $g : E_1 \rightarrow E_2$, τέτοιες ώστε για όλα τα $a, b \in V_1$ και $e \in E_1$ να ισχύει*

$$\varphi_1(e) = \{a, b\} \Leftrightarrow \varphi_2(g(e)) = \{f(a), f(b)\}.$$

Ειδικότερα, δύο απλά γραφήματα $G_1 = (V_1, E_1)$ και $G_2 = (V_2, E_2)$ είναι ισόμορφα αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : V_1 \rightarrow V_2$, τέτοια ώστε για όλα τα $a, b \in V_1$ να ισχύει $\{a, b\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} \in E_2$. Μια τέτοια απεικόνιση f λέγεται *ισομορφισμός γραφημάτων*. Αφήνεται στον αναγνώστη να βεβαιωθεί ότι η σχέση του ισομορφισμού είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των γραφημάτων. Οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης αυτής λέγονται *κλάσεις ισομορφισμού γραφημάτων*.

Παράδειγμα 3.1.2 Έστω σύνολο V με n στοιχεία.

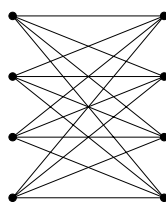
(α) Το απλό γράφημα στο σύνολο κορυφών V στο οποίο δύο οποιεσδήποτε κορυφές συνδέονται με ακμή λέγεται *πλήρες απλό γράφημα* στο V . Οποιαδήποτε δύο πλήρη απλά γραφήματα με n κορυφές είναι μεταξύ τους ισόμορφα. Η κλάση ισομορφισμού τους συμβολίζεται με K_n .



Σχήμα 3.2: Τα γραφήματα K_5 και C_5 .

(β) Έστω $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Το γράφημα στο σύνολο κορυφών V με ακμές $\{v_{i-1}, v_i\}$ για $1 < i \leq n$ λέγεται *μονοπάτι μήκους $n - 1$* . Η κλάση ισομορφισμού του γραφήματος αυτού συμβολίζεται με P_n . Το γράφημα στο ίδιο σύνολο κορυφών με μια επιπλέον ακμή, τη $\{v_1, v_n\}$, λέγεται *κύκλος μήκους n* . Η κλάση ισομορφισμού του γραφήματος αυτού συμβολίζεται με C_n .

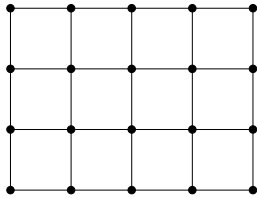
(γ) Έστω $V = A \cup B$, όπου A και B είναι ξένα μεταξύ τους σύνολα με m και n στοιχεία, αντίστοιχα. Το απλό γράφημα στο σύνολο κορυφών V με ακμές $\{a, b\}$ για $a \in A$ και $b \in B$ λέγεται *πλήρες απλό διμερές γράφημα* τύπου (m, n) . Η κλάση ισομορφισμού του συμβολίζεται με $K_{m,n}$.



Σχήμα 3.3: Το γράφημα $K_{4,4}$.

(δ) Το $m \times n$ *γράφημα του Μανχάταν* είναι το απλό γράφημα στο σύνολο κορυφών $[m] \times [n]$, στο οποίο δύο κορυφές (i_1, j_1) και (i_2, j_2) συνδέονται με ακμή αν και μόνο αν είτε $i_1 = i_2$ και $|j_1 - j_2| = 1$, είτε $j_1 = j_2$ και $|i_1 - i_2| = 1$.

(ε) Έστω Ω το σύνολο των υποσυνόλων του $[5]$ με δύο στοιχεία. Το γράφημα του Petersen είναι το απλό γράφημα με κορυφές τα στοιχεία του Ω στο οποίο δύο κορυφές a και b συνδέονται με ακμή αν και μόνο αν $a \cap b = \emptyset$ (για μια σχηματική απεικόνιση αυτού του γραφήματος, δείτε την Άσκηση 2). \square



Σχήμα 3.4: Το 5×4 γράφημα του Μανχάταν.

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με την έννοια του υπογραφήματος και αυτή του επαγόμενου υπογραφήματος. Ένα γράφημα $G' = (V', E', \varphi')$ λέγεται υπογράφημα του $G = (V, E, \varphi)$ αν $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ και $\varphi'(e) = \varphi(e)$ για κάθε $e \in E'$. Έτσι ένα τέτοιο γράφημα προκύπτει διαγράφοντας κάποιες από τις κορυφές και ακμές του G . Το υπογράφημα $G' = (V', E', \varphi')$ του G λέγεται επαγόμενο στο σύνολο κορυφών V' αν το G' περιέχει όλες τις ακμές του G , τα άκρα των οποίων ανήκουν στο V' . Ένα γράφημα με n κορυφές έχει ακριβώς 2^n (συμπεριλαμβανομένου και εκείνου με κενό σύνολο κορυφών) επαγόμενα υπογραφήματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ένα πλήρες απλό γράφημα G με τέσσερις κορυφές έχει τρία υπογραφήματα τα οποία είναι κύκλοι μήκους 4 και τέσσερα υπογραφήματα τα οποία είναι κύκλοι μήκους 3 (τι είδους κορυφές και ακμές πρέπει να διαγραφούν από το G ώστε να προκύψουν τα υπογραφήματα αυτά;). \square

3.2 Περίπατοι και συνεκτικότητα

Με την έννοια του περίπατου σε ένα γράφημα G επιθυμούμε να περιγράψουμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να φτάσουμε από μια κορυφή του G σε μια άλλη διασχίζοντας διαδοχικά (με μια πεπερασμένη διαδικασία) ακμές του G .

Ορισμός 3.2.1 Έστω γράφημα $G = (V, E, \varphi)$ και μη αρνητικός ακέραιος ℓ . Περίπατος (ή διαδρομή) στο G μήκους ℓ λέγεται μια ακολουθία $w = (u_0, e_1, u_1, \dots, e_\ell, u_\ell)$, όπου $u_i \in V$ για $0 \leq i \leq \ell$ και $e_i \in E$ για $1 \leq i \leq \ell$ με $\varphi(e_i) = \{u_{i-1}, u_i\}$. Η κορυφή u_0 λέγεται αρχή και η u_ℓ λέγεται πέρασ του w .

Ο περίπατος $w = (u_0, e_1, u_1, \dots, e_\ell, u_\ell)$ στο G λέγεται κλειστός αν $u_0 = u_\ell$ και μονοπάτι αν οι κορυφές του u_0, u_1, \dots, u_ℓ είναι ανά δύο διαφορετικές. Παρατηρούμε

ότι η ακολουθία $w = (u_0)$ με ένα μόνο στοιχείο $u_0 \in V$ είναι (κλειστός) περίπατος (και μονοπάτι) στο G μήκους $\ell = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Η ακολουθία $(a, e_2, c, e_3, c, e_5, b, e_6, d, e_7, b)$ είναι περίπατος μήκους 5 στο γράφημα του Σχήματος 3.1. Η ακολουθία $(a, e_2, c, e_4, d, e_7, b)$ είναι μονοπάτι μήκους 3. \square

Για κορυφές $u, v \in V$ ενός γραφήματος $G = (V, E, \varphi)$ θέτουμε $u \sim v$ αν υπάρχει περίπατος στο G με αρχή u και πέρας v . Παρατηρούμε ότι για κάθε $u \in V$ υπάρχει περίπατος στο G μήκους μηδέν με αρχή και πέρας u και ότι αν w είναι περίπατος στο G με αρχή u και πέρας v , τότε η ακολουθία που προκύπτει από τη w αντιστρέφοντας τη σειρά των όρων της w είναι περίπατος στο G με αρχή v και πέρας u . Επομένως η διμελής σχέση \sim έχει την ανακλαστική και τη συμμετρική ιδιότητα. Η σχέση αυτή έχει επίσης τη μεταβατική ιδιότητα, διότι αν w είναι περίπατος στο G με αρχή u και πέρας v και w' είναι περίπατος στο G με αρχή v και πέρας p , τότε η ακολουθία που προκύπτει παραθέτοντας τα στοιχεία του w' μετά τα στοιχεία του w και ταυτίζοντας την αρχή του w' με το πέρας του w , είναι περίπατος στο G με αρχή u και πέρας p . Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η \sim είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο V . Το γράφημα G λέγεται *συνεκτικό* αν η \sim έχει μια μοναδική κλάση ισοδυναμίας. Ισοδύναμα, έχουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 3.2.2 Ένα γράφημα G λέγεται *συνεκτικό* αν για οποιοδήποτε κορυφές του u, v υπάρχει περίπατος στο G με αρχή u και πέρας v .

Τα επαγόμενα υπογράφημα του G πάνω στις κλάσεις ισοδυναμίας της \sim λέγονται *συνεκτικές συνιστώσες* (ώστε το G είναι συνεκτικό αν και μόνο αν έχει μία μόνο συνεκτική συνιστώσα).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. (α) Τα γραφήματα του Παραδείγματος 3.1.2 είναι όλα συνεκτικά.

(β) Έστω θετικοί ακέραιοι m, n με $mn \geq 2$ και έστω G το απλό γράφημα με κορυφές τα τετράγωνα μιας $m \times n$ σκακιέρας, στο οποίο δύο τετράγωνα συνδέονται με ακμή αν έχουν ακριβώς μία κοινή κορυφή. Το γράφημα G δεν είναι συνεκτικό και μάλιστα έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες. Τα σύνολα κορυφών των δύο συνιστωσών είναι τα σύνολα των τετραγώνων του ίδιου χρώματος, υπό το συνήθη χρωματισμό των τετραγώνων της σκακιέρας με άσπρο ή μαύρο χρώμα. \square

Μια χρήσιμη γενίκευση της έννοιας της συνεκτικότητας για γραφήματα είναι αυτή της πολλαπλής συνεκτικότητας.

Ορισμός 3.2.3 Έστω γράφημα G με σύνολο κορυφών V και k θετικός ακέραιος. Το γράφημα G λέγεται *k -συνεκτικό* αν έχει τουλάχιστον $k + 1$ κορυφές και για κάθε υποσύνολο U του V με το πολύ $k - 1$ στοιχεία, το επαγόμενο υπογράφημα του G στο σύνολο κορυφών $V \setminus U$ είναι συνεκτικό.

Όστε ένα γράφημα G με τουλάχιστον $k+1$ κορυφές είναι k -συνεκτικό αν το G είναι συνεκτικό και απαιτείται να διαγραφούν τουλάχιστον k κορυφές του για να προκύψει ένα μη συνεκτικό γράφημα. Για παράδειγμα, τα μονοπάτια είναι συνεκτικά αλλά όχι διπλά συνεκτικά γραφήματα και οι κύκλοι είναι διπλά συνεκτικά αλλά όχι τριπλά συνεκτικά γραφήματα. Μια σημαντική κλάση τριπλά συνεκτικών απλών γραφημάτων αποτελούν τα γραφήματα των τρισδιάστατων φραγμένων κυρτών πολυέδρων (κυρτών πολυτόπων) στο χώρο \mathbb{R}^3 , όπως το τετράεδρο, ο κύβος, το τριγωνικό πρίσμα, το οκτάεδρο κ.ο.κ. Για την ακόλουθη γενικότερη πρόταση παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην Παράγραφο 3.5 του [15].

Θεώρημα 3.2.1 (Balinski, 1961) *Το γράφημα τυχαίου d -διάστατου πολυτόπου στο χώρο \mathbb{R}^d είναι d -συνεκτικό.*

3.3 Δένδρα

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με μια σημαντική κλάση απλών συνεκτικών γραφημάτων, τα οποία ονομάζονται δένδρα.

3.3.1 Ορισμοί και ιδιότητες

Ορισμός 3.3.1 *Ένα απλό γράφημα λέγεται δένδρο αν είναι συνεκτικό και δεν περιέχει κύκλο ως υπογράφημα.*

Οι κορυφές βαθμού ένα ενός δένδρου λέγονται *φύλλα*.

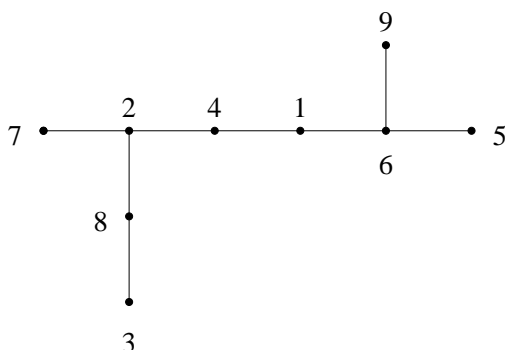
Παράδειγμα 3.3.1 (α) Κάθε μονοπάτι με n κορυφές είναι δένδρο με μηδέν ή δύο φύλλα, αν $n = 1$ ή $n \geq 2$, αντίστοιχα.

(β) Το γράφημα στο σύνολο κορυφών $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ με ακμές $\{v_0, v_i\}$ για $1 \leq i \leq n$ είναι δένδρο και λέγεται *άστρο* με $n+1$ κορυφές. Οι κορυφές v_1, v_2, \dots, v_n είναι φύλλα, ενώ η v_0 είναι φύλλο μόνο αν $n = 1$.

(γ) Το Σχήμα 3.5 απεικονίζει ένα δένδρο στο σύνολο κορυφών [9] με φύλλα τις κορυφές 3, 5, 7 και 9. □

Λήμμα 3.3.1 *Κάθε απλό γράφημα με μία τουλάχιστον ακμή το οποίο δεν περιέχει κύκλο ως υπογράφημα έχει τουλάχιστον δύο κορυφές βαθμού ένα. Ειδικότερα, κάθε δένδρο με δύο τουλάχιστον κορυφές έχει τουλάχιστον δύο φύλλα.*

Απόδειξη. Έστω G ένα απλό γράφημα με μία τουλάχιστον ακμή το οποίο δεν περιέχει κύκλο ως υπογράφημα. Θεωρούμε ένα μονοπάτι $\gamma = (u_0, e_1, u_1, \dots, u_{r-1}, e_r, u_r)$ στο



Σχήμα 3.5: Ένα δένδρο στο σύνολο κορυφών [9].

G μέγιστου δυνατού μήκους r , οπότε έχουμε $u_0 \neq u_r$. Θα δείξουμε ότι οι κορυφές u_0 και u_r έχουν βαθμό ίσο με 1. Έστω ότι η u_0 συνδέεται με ακμή, έστω e , με κάποια κορυφή $u \neq u_1$ του G . Επειδή το G δεν περιέχει κύκλους, η u δεν είναι κορυφή του γ . Κατά συνέπεια η ακολουθία $(u, e, u_0, e_1, u_1, \dots, u_{r-1}, e_r, u_r)$ είναι μονοπάτι στο G μήκους $r + 1$, κατά παράβαση της επιλογής του r . Από αυτή την αντίφαση έπεται ότι $\deg(u_0) = 1$. Το ίδιο επιχείρημα εφαρμόζεται και για την κορυφή u_r . \square

Ένα υπογράφημα $G' = (V', E', \varphi')$ του γραφήματος $G = (V, E, \varphi)$ λέγεται παράγον αν $V' = V$. Ένα παράγον υπογράφημα του G το οποίο είναι δένδρο λέγεται παράγον δένδρο του G .

Πρόταση 3.3.1 Κάθε συνεκτικό γράφημα έχει τουλάχιστον ένα παράγον δένδρο.

Απόδειξη. Έστω συνεκτικό γράφημα G και έστω ένα συνεκτικό παράγον υπογράφημα T του G με το ελάχιστο δυνατό πλήθος ακμών. Παρατηρούμε ότι το T δεν περιέχει θυλιές, παράλληλες ακμές ή κύκλους διότι, στην περίπτωση αυτή, θα ήταν δυνατό να αφαιρεθεί μία ακμή από το T (συγκεκριμένα οποιαδήποτε θυλιά, παράλληλη ακμή ή ακμή κύκλου) και να προκύψει συνεκτικό παράγον υπογράφημα του G με λιγότερες ακμές από το T . Συμπεραίνουμε ότι το T είναι απλό συνεκτικό παράγον υπογράφημα του G χωρίς κύκλους, δηλαδή παράγον δένδρο του G . \square

Πόρισμα 3.3.1 (α) Κάθε συνεκτικό γράφημα με n κορυφές έχει τουλάχιστον $n - 1$ ακμές.

(β) Ένα γράφημα G με n κορυφές είναι δένδρο εάν και μόνο αν το G είναι συνεκτικό και έχει ακριβώς $n - 1$ ακμές.

Πρώτη απόδειξη. Αποδεικνύουμε το μέρος (β) του πορίσματος. Θα δείξουμε πρώτα ότι κάθε δένδρο G με n κορυφές έχει ακριβώς $n - 1$ ακμές. Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο n . Αν $n = 1$, τότε προφανώς το G δεν έχει ακμές. Έστω ότι $n \geq 2$. Σύμφωνα

με το Λήμμα 3.3.1, το G έχει τουλάχιστον ένα φύλλο v . Το γράφημα $G \setminus v$ που προκύπτει από το G διαγράφοντας την κορυφή v και τη μοναδική ακμή με άκρο v είναι επίσης δένδρο (εξηγήστε γιατί) και έχει $n - 1$ κορυφές. Από την υπόθεση της επαγωγής συμπεραίνουμε ότι το $G \setminus v$ έχει ακριβώς $n - 2$ ακμές. Κατά συνέπεια το G έχει ακριβώς $n - 1$ ακμές. Αντιστρόφως, έστω ότι το G είναι συνεκτικό γράφημα και ότι έχει n κορυφές και $n - 1$ ακμές. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.3.1, υπάρχει παράγον δένδρο, έστω T , του G . Το δένδρο T έχει n κορυφές και συνεπώς, όπως μόλις αποδείξαμε, $n - 1$ ακμές, όσες και το G . Έπεται ότι $G = T$, δηλαδή ότι το G είναι δένδρο. Το μέρος (α) προκύπτει από την Πρόταση 3.3.1 και το μέρος (β).

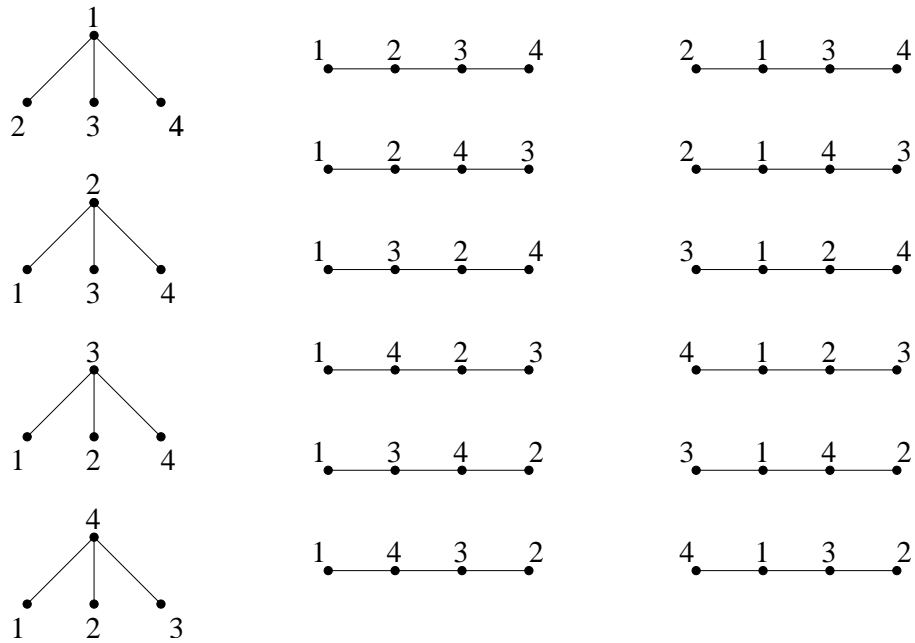
Δεύτερη απόδειξη. Έστω συνεκτικό γράφημα $G = (V, E, \varphi)$ με n κορυφές. Έστω τυχαία κορυφή $v \in V$ και έστω $U = V \setminus \{v\}$. Λόγω της συνεκτικότητας του G , για κάθε $u \in U$ υπάρχει περίπατος στο G με αρχή u και πέρας v . Θεωρούμε έναν τέτοιο περίπατο $w(u)$ με το ελάχιστο δυνατό μήκος, έστω $r(u)$, και ονομάζουμε $f(u)$ την αρχική ακμή του $w(u)$. Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $f : U \rightarrow E$ είναι 1-1. Πράγματι, έστω ότι υπάρχουν διακεκριμένα στοιχεία u_1, u_2 του U με $f(u_1) = f(u_2) = e$, οπότε u_1, u_2 είναι τα δύο άκρα της e . Ο περίπατος που προκύπτει από τον $w(u_2)$ διαγράφοντας την αρχική κορυφή u_2 και ακμή e έχει αρχή u_1 , πέρας v και μήκος $r(u_2) - 1$. Από την επιλογή του $w(u_1)$ προκύπτει ότι $r(u_1) \leq r(u_2) - 1$, δηλαδή ότι $r(u_1) < r(u_2)$. Ομοίως δείχνουμε ότι $r(u_2) < r(u_1)$. Η αντίφαση αυτή αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας. Από την Πρόταση 2.1.1 (α) προκύπτει ότι $n - 1 = \#U \leq \#E$. Αυτό αποδεικνύει το μέρος (α) του πορίσματος.

Υποθέτουμε τώρα ότι το G είναι δένδρο. Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $f : U \rightarrow E$ της προηγούμενης παραγράφου είναι επί. Θεωρούμε τυχαία ακμή e του G με άκρα $u_1, u_2 \in V$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Αν το μοναδικό μονοπάτι, έστω p , στο G με αρχή u_1 και πέρας v διέρχεται από την κορυφή u_2 , τότε $u_1 \in U$ και $f(u_1) = e$. Αν όχι, τότε το μονοπάτι που προκύπτει προσθέτοντας στο p αρχική κορυφή u_2 και ακμή e είναι το μοναδικό μονοπάτι στο G με αρχή u_2 και πέρας v και ισχύουν $u_2 \in U$ και $f(u_2) = e$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $e = f(u)$ για κάποιο $u \in U$ και συνεπώς η απεικόνιση $f : U \rightarrow E$ είναι επί του E . Από το αποτέλεσμα της προηγούμενης παραγράφου συμπεραίνουμε ότι η f είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση και επομένως ότι $\#E = \#U = n - 1$. Έχουμε δείξει ότι κάθε δένδρο με n κορυφές έχει ακριβώς $n - 1$ ακμές. Ο δεύτερος ισχυρισμός του μέρους (β) προκύπτει όπως στην πρώτη απόδειξη. \square

Στην Άσκηση 13 θα αποδείξουμε έναν ακόμη χαρακτηρισμό των δένδρων: ένα απλό γράφημα G με n κορυφές είναι δένδρο αν και μόνο αν το G έχει ακριβώς $n - 1$ ακμές και δεν περιέχει κύκλο ως υπογράφημα.

3.3.2 Το Θεώρημα Cayley–Sylvester

Υπενθυμίζουμε ότι ένα απλό γράφημα G , όπως π.χ. ένα δένδρο, στο σύνολο κορυφών V ταυτίζεται με το ζεύγος (V, E) , όπου $E \subseteq \binom{V}{2}$ είναι το σύνολο των ακμών του G . Πόσα δένδρα υπάρχουν στο σύνολο κορυφών $[n]$; Συμβολίζοντας με t_n το πλήθος των δένδρων αυτών, έχουμε $t_1 = t_2 = 1$, $t_3 = 3$, $t_4 = 16$, $t_5 = 125$. Το Σχήμα 3.6 απεικονίζει τα 16 δένδρα στο σύνολο κορυφών $[4]$. Το επόμενο θεώρημα δηλώνει ότι ισχύει ο απρόσμενα απλός τύπος $t_n = n^{n-2}$, γνωστός ως τύπος του Cayley, για κάθε θετικό ακέραιο n .



Σχήμα 3.6: Τα 16 δένδρα στο σύνολο κορυφών $\{1, 2, 3, 4\}$.

Θεώρημα 3.3.1 (Sylvester, 1857) Το πλήθος των δένδρων στο σύνολο κορυφών $[n]$ είναι ίσο με n^{n-2} για κάθε $n \geq 1$.

Απόδειξη. Ασφαλώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n \geq 3$. Έστω A_n το σύνολο των δένδρων στο σύνολο κορυφών $[n]$ και B_n το σύνολο $[n]^{n-2}$ των ακολουθιών $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$ μήκους $n-2$ με στοιχεία από το $[n]$. Προφανώς ισχύει $\#B_n = n^{n-2}$ και συνεπώς αρκεί να βρούμε μία 1-1 αντιστοιχία $f: A_n \rightarrow B_n$.

Για $T \in A_n$ θέτουμε $f(T) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$, όπου τα a_i ορίζονται διαδοχικά ως εξής: Έστω v_1 το μικρότερο φύλλο του $T_0 = T$ που είναι διάφορο του 1 (τέτοιο

φύλλο υπάρχει εξαιτίας του Λήμματος 3.3.1) και έστω a_1 η μοναδική γειτονική κορυφή του v_1 στο T_0 . Διαγράφοντας από το T_0 το φύλλο v_1 και τη μοναδική ακμή ένα άκρο της οποίας είναι το v_1 , προκύπτει ένα δένδρο T_1 με $n-1$ κορυφές. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για το T_1 , ονομάζουμε v_2 το μικρότερο φύλλο του T_1 που είναι διάφορο του 1 και a_2 τη μοναδική γειτονική κορυφή του v_2 στο T_1 . Διαγράφοντας από το T_1 το φύλλο v_2 και τη μοναδική ακμή ένα άκρο της οποίας είναι το v_1 , προκύπτει ένα δένδρο T_2 με $n-2$ κορυφές. Συνεχίζουμε ομοίως. Η διαδικασία τερματίζει όταν φτάσουμε στο δένδρο T_{n-2} το οποίο έχει δύο κορυφές. Για παράδειγμα, αν $n = 9$ και T είναι το δένδρο του Σχήματος 3.5, τότε $f(T) = (8, 6, 2, 2, 4, 1, 6)$. Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία του $[n]$ που δεν εμφανίζονται στην ακολουθία $f(T)$ είναι ακριβώς τα φύλλα του T που είναι διάφορα του 1 (εξηγήστε γιατί).

Για να δείξουμε ότι η $f : A_n \rightarrow B_n$ είναι αμφιμονοσήμαντη, θα κατασκευάσουμε την αντίστροφη απεικόνιση $g : B_n \rightarrow A_n$. Για $\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}) \in B_n$ θέτουμε $a_{n-1} = 1$ και ορίζουμε ως $g(\sigma)$ το γράφημα, έστω T , στο σύνολο κορυφών $[n]$ με ακμές $\{v_1, a_1\}, \{v_2, a_2\}, \dots, \{v_{n-1}, a_{n-1}\}$, όπου τα v_1, v_2, \dots, v_{n-1} ορίζονται διαδοχικά ως εξής. Το v_1 είναι το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου $\{2, 3, \dots, n\}$ που δεν εμφανίζεται στην ακολουθία σ (τέτοιο στοιχείο υπάρχει αφού η σ έχει το πολύ $n-2$ διακεκριμένα στοιχεία). Γενικότερα, για $1 \leq i \leq n-2$ το v_i είναι το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου $\{2, 3, \dots, n\} \setminus \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ που δεν εμφανίζεται στην ακολουθία $(a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-2})$ (ώστε το v_{n-1} είναι το μοναδικό στοιχείο του συνόλου $\{2, 3, \dots, n\} \setminus \{v_1, \dots, v_{n-2}\}$). Για παράδειγμα, για $n = 9$ και $\sigma = (8, 6, 2, 2, 4, 1, 6)$ έχουμε $v_1 = 3, v_2 = 5, v_3 = 7, v_4 = 8, v_5 = 2, v_6 = 4, v_7 = 9, v_8 = 6$ και το T είναι το δένδρο του Σχήματος 3.5. Θα δείξουμε ότι η g είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ότι το T είναι δένδρο στο σύνολο κορυφών $[n]$. Αφού το T έχει $n-1$ ακμές, σύμφωνα με το Πρόσχημα 3.3.1 (β) αρκεί να δείξουμε ότι το T είναι συνεκτικό. Θέτοντας $v_n = 1$, ισχυριζόμαστε ότι (i) $[n] = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ και (ii) κάθε κορυφή v_k με $1 \leq k \leq n-1$ συνδέεται με ακμή στο T με κάποια κορυφή v_j με $k < j$. Πράγματι, το (i) ισχύει αφού από τον ορισμό των κορυφών v_1, v_2, \dots, v_n , αυτές είναι ανά δύο διαφορετικές. Επίσης, για $1 \leq k \leq n-1$ υπάρχει η ακμή $\{v_k, a_k\}$ του T και ισχύει $v_i \neq a_k$ για $i \leq k$. Επομένως έχουμε $a_k = v_j$ για κάποιο $j > k$ και συνεπώς ισχύει το (ii). Από τα (i) και (ii) προκύπτει ότι κάθε κορυφή του T συνδέεται με περίπατο στο T με την κορυφή $v_n = 1$ και επομένως ότι το T είναι συνεκτικό. Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι η απεικόνιση g είναι η αντίστροφη της f . \square

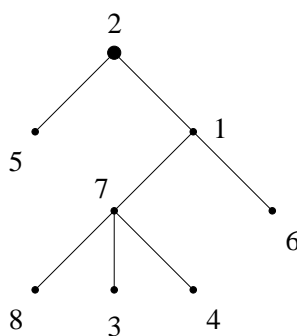
Η προηγούμενη απόδειξη δόθηκε από τον Prüfer το 1918. Δύο άλλες σύντομες αποδείξεις δίνονται στις Ασκήσεις 18 και 19. Η ακολουθία $f(T) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$ για ένα δένδρο T στο σύνολο κορυφών $[n]$ λέγεται κώδικας Prüfer του T .

3.3.3 Δένδρα με ρίζα

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε σύντομα σε κάποιες από τις πολλές ενδιαφέρουσες παραλλαγές της έννοιας του δένδρου.

Ορισμός 3.3.2 Δένδρο με ρίζα είναι ένα ζεύγος (T, r) , όπου το T είναι δένδρο με μια διακεκριμένη κορυφή r , η οποία ονομάζεται ρίζα.

Ένα δένδρο στο σύνολο κορυφών $[8]$ με ρίζα την κορυφή 2 απεικονίζεται στο Σχήμα 3.7. Η ρίζα ενός δένδρου συμβολίζεται συνήθως με μια τελεία μεγαλύτερη από αυτές που συμβολίζουν τις υπόλοιπες κορυφές.



Σχήμα 3.7: Ένα δένδρο με ρίζα $r = 2$ στο σύνολο κορυφών $[8]$.

Έστω δένδρο T με σύνολο κορυφών V και ρίζα r . Γνωρίζουμε ότι για κάθε $v \in V$ υπάρχει μοναδικό μονοπάτι στο T με αρχή v και πέρας r . Επιπλέον, όπως διαπιστώσαμε στη δεύτερη απόδειξη του Πορίσματος 3.3.1 (τελευταία παράγραφος), για κάθε ακμή $\{u, v\}$ του T ισχύει ένα και μόνο από τα παρακάτω:

- Το μοναδικό μονοπάτι στο T με αρχή v και πέρας r διέρχεται από τη u .
- Το μοναδικό μονοπάτι στο T με αρχή u και πέρας r διέρχεται από τη v .

Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι η v είναι διάδοχος της u και ότι η u είναι γονέας (ή προκάτοχος) της v και χρησιμοποιούμε την αντίστροφη ορολογία στη δεύτερη περίπτωση. Μια κορυφή v του T λέγεται φύλλο αν δεν έχει διαδόχους, διαφορετικά η v λέγεται εσωτερική κορυφή.

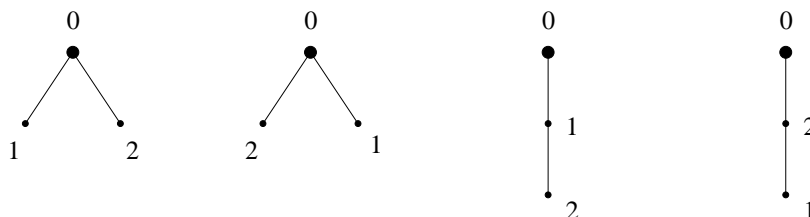
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Η έννοια του φύλλου σε δένδρα με ρίζα διαφέρει από αυτήν της Παραγράφου 3.3.1 στο ότι η ρίζα θεωρείται φύλλο μόνο αν έχει βαθμό 0 στο T , δηλαδή αν είναι η μοναδική κορυφή του T . \square

Ορισμός 3.3.3 Ένα δένδρο με ρίζα λέγεται δυαδικό αν κάθε εσωτερική κορυφή του έχει ακριβώς δύο διαδόχους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Το δένδρο με ρίζα του Σχήματος 3.7 έχει πέντε φύλλα, τα 3, 4, 5, 6, 8 και τις τρεις εσωτερικές κορυφές 1, 2 και 7. Η κορυφή 7 έχει διαδόχους τις 3, 4, 8 και γονέα την κορυφή 1. Το δένδρο με ρίζα που προκύπτει από αυτό του Σχήματος 3.7 διαγράφοντας μία από τις κορυφές 3, 4 και 8 είναι δυαδικό και έχει τέσσερα φύλλα και τρεις εσωτερικές κορυφές. \square

Πρόταση 3.3.2 Κάθε δυαδικό δένδρο με n φύλλα έχει $n - 1$ εσωτερικές κορυφές.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n . Το ζητούμενο ισχύει για $n = 1$. Υποθέτουμε ότι $n \geq 2$ και θεωρούμε δυαδικό δένδρο T (με ρίζα) με n φύλλα. Έστω δύο οποιαδήποτε φύλλα v_1, v_2 του T με κοινό γονέα v . Διαγράφοντας τα v_1, v_2 και τις ακμές $\{v, v_1\}$ και $\{v, v_2\}$ από το T προκύπτει ένα δυαδικό δένδρο T' με ρίζα εκείνη του T . Παρατηρούμε ότι η v είναι εσωτερική κορυφή του T και φύλλο του T' και συνεπώς ότι το T' έχει ένα φύλλο λιγότερο και μία εσωτερική κορυφή λιγότερη από το T . Ειδικότερα, το πλήθος των φύλλων του T' είναι ίσο με $n - 1$. Από την υπόθεση της επαγωγής προκύπτει ότι το πλήθος των εσωτερικών κορυφών του T' είναι ίσο με $n - 2$. Άρα, το πλήθος των εσωτερικών κορυφών του T είναι ίσο με $n - 1$. \square



Σχήμα 3.8: Τα επίπεδα δένδρα στο σύνολο κορυφών $\{0, 1, 2\}$ με ρίζα 0.

Μια ακόμα σημαντική οικογένεια δένδρων είναι αυτή των επίπεδων δένδρων με ρίζα.

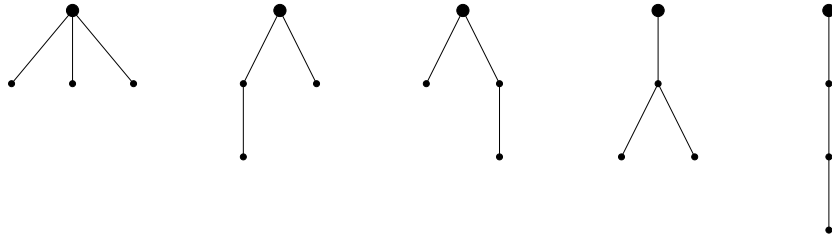
Ορισμός 3.3.4 Επίπεδο δένδρο με ρίζα είναι ένα δένδρο T με ρίζα, εφοδιασμένο με μία αναδιάταξη των διαδόχων της v για κάθε εσωτερική κορυφή v του T .

Στο Σχήμα 3.8 απεικονίζονται τα τέσσερα επίπεδα δένδρα στο σύνολο κορυφών $\{0, 1, 2\}$ με ρίζα 0. Οι διάδοχοι μιας εσωτερικής κορυφής v του T εμφανίζονται στο σχήμα από τα αριστερά προς τα δεξιά, σύμφωνα με την αναδιάταξη που ορίζεται από το T και τη v .

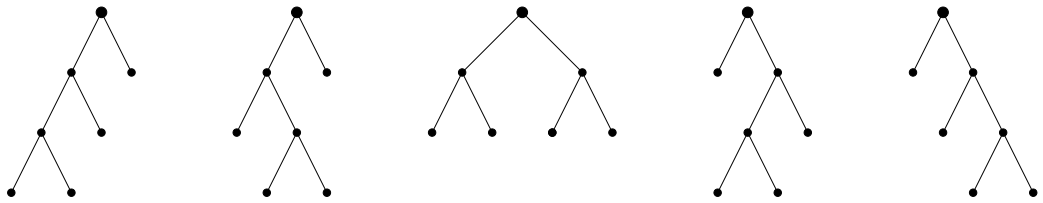
Δύο δένδρα $T = (V, E)$ και $T' = (V', E')$ με ρίζες r και r' , αντίστοιχα, λέγονται *ισόμορφα* (ως δένδρα με ρίζα) αν υπάρχει ισομορφισμός γραφημάτων $f : V \rightarrow V'$ με $f(r) = r'$. Για παράδειγμα, τα δύο τελευταία δένδρα του Σχήματος 3.8 είναι ισόμορφα

ως δένδρα με ρίζα, όπου ο ισομορφισμός ανταλλάσσει τις κορυφές 1 και 2 και αφήνει την κορυφή 0 σταθερή. Ομοίως, δύο επίπεδα δένδρα $T = (V, E)$ και $T' = (V', E')$ με ρίζες r και r' , αντίστοιχα, είναι ισόμορφα ως επίπεδα δένδρα με ρίζα αν υπάρχει ισομορφισμός γραφημάτων $f : V \rightarrow V'$ με $f(r) = r'$ που διατηρεί την αναδιάταξη των διαδόχων για κάθε εσωτερική κορυφή του T .

Προφανώς η σχέση του ισομορφισμού είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των δένδρων με ρίζα (αντίστοιχα, επίπεδων δένδρων με ρίζα). Οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης αυτής λέγονται *μη επιγεγραμμένα δένδρα με ρίζα* (αντίστοιχα, επίπεδα μη επιγεγραμμένα δένδρα με ρίζα). Οι κλάσεις ισοδυναμίας που αποτελούνται από δυαδικά δένδρα είναι τα δυαδικά (επίπεδα) μη επιγεγραμμένα δένδρα με ρίζα. Για παράδειγμα, υπάρχουν δύο επίπεδα μη επιγεγραμμένα δένδρα με ρίζα με τρεις κορυφές (όπως προκύπτει από το Σχήμα 3.8), πέντε επίπεδα μη επιγεγραμμένα δένδρα με ρίζα με τέσσερις κορυφές (Σχήμα 3.9) και πέντε δυαδικά επίπεδα μη επιγεγραμμένα δένδρα με ρίζα με τέσσερα φύλλα (Σχήμα 3.10).



Σχήμα 3.9: Τα επίπεδα μη επιγεγραμμένα δένδρα με ρίζα, με τέσσερις κορυφές.



Σχήμα 3.10: Τα δυαδικά επίπεδα μη επιγεγραμμένα δένδρα με ρίζα, με 4 φύλλα.

Το πλήθος των επίπεδων μη επιγεγραμμένων δένδρων με ρίζα με $n + 1$ κορυφές είναι ίσο με το πλήθος των δυαδικών επίπεδων μη επιγεγραμμένων δένδρων με ρίζα με $n + 1$ φύλλα (ισοδύναμα, με n εσωτερικές κορυφές) για κάθε θετικό ακέραιο n (Άσκηση 26). Το πλήθος αυτό είναι ίσο με το γνωστό αριθμό Catalan $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. Για άλλες συνδυαστικές ερμηνείες των αριθμών αυτών και περισσότερες πληροφορίες

παραπέμπουμε στις Παραγράφους 1.2.4 και 1.3.3 του [2] και στην Παράγραφο 6.2 και Άσκηση 6.19 του [12].

3.4 Χρωματισμοί και ταιριάσματα

Στην παράγραφο αυτή θα εισάγουμε τις έννοιες του χρωματισμού, του χρωματικού αριθμού και του ταιριάσματος για γραφήματα. Από τις έννοιες αυτές θα οδηγηθούμε στη μελέτη των διμερών γραφημάτων και θα καταλήξουμε σε ένα χρήσιμο θεώρημα για την ύπαρξη ταιριασμάτων σε τέτοια γραφήματα, το Θεώρημα του Γάμου.

3.4.1 Ο χρωματικός αριθμός

Έστω ότι θέλουμε να χρωματίσουμε καθένα από τα 2^n υποσύνολα του $[n]$ με ένα από q διαθέσιμα χρώματα, έτσι ώστε δύο οποιαδήποτε ξένα μεταξύ τους υποσύνολα να έχουν διαφορετικό χρώμα. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων που απαιτούνται; Το ερώτημα αυτό μπορεί να διατυπωθεί στη γλώσσα της θεωρίας γραφημάτων μέσω του ακόλουθου ορισμού.

Ορισμός 3.4.1 Έστω απλό γράφημα $G = (V, E)$ και έστω $q \in \mathbb{Z}_{>0}$.

- (α) Μια απεικόνιση $\kappa : V \rightarrow [q]$ λέγεται χρωματισμός του G με χρώματα $1, 2, \dots, q$. Ο χρωματισμός κ λέγεται γνήσιος αν $\kappa(x) \neq \kappa(y)$ για κάθε ακμή $\{x, y\} \in E$.
- (β) Ο ελάχιστος θετικός ακέραιος q για τον οποίο υπάρχει γνήσιος χρωματισμός $\kappa : V \rightarrow [q]$ του G λέγεται χρωματικός αριθμός του G και συμβολίζεται με $\chi(G)$.

Όστε ένας χρωματισμός του G είναι γνήσιος αν αντιστοιχεί διαφορετικά χρώματα στα άκρα οποιασδήποτε ακμής. Ο χρωματικός αριθμός $\chi(G)$ ορίζεται με τον ίδιο τρόπο για τυχαίο (όχι αναγκαστικά απλό) γράφημα $G = (V, E, \varphi)$. Επειδή όμως ο αριθμός αυτός παραμένει αμετάβλητος με τη διαγραφή ή προσθήκη παράλληλων ακμών στο G και είναι ίσος με μηδέν αν υπάρχει θυλιά στο G , επιλέξαμε να περιορίσουμε τον Ορισμό 3.4.1 στην περίπτωση των απλών γραφημάτων.

Παράδειγμα 3.4.1 (α) Έστω σύνολο V με n στοιχεία. Αν G είναι το πλήρες απλό γράφημα στο σύνολο κορυφών V , τότε ένας χρωματισμός $\kappa : V \rightarrow [q]$ του G είναι γνήσιος αν και μόνο αν η απεικόνιση κ είναι 1-1. Από την Πρόταση 2.1.1 (α) συμπεραίνουμε ότι $\chi(G) = n$. Αν G είναι το γράφημα στο σύνολο κορυφών V χωρίς ακμές, τότε κάθε χρωματισμός $\kappa : V \rightarrow [q]$ του G είναι γνήσιος και συνεπώς $\chi(G) = 1$.

(β) Ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων στον οποίο αναφερθήκαμε πριν τον Ορισμό 3.4.1 είναι ίσος με $\chi(G_n)$, όπου G_n είναι το απλό γράφημα που ορίζεται ως εξής: Οι

κορυφές του G_n είναι τα 2^n υποσύνολα του $[n]$ και δύο τέτοια υποσύνολα $S, T \subseteq [n]$ συνδέονται με ακμή στο G_n αν και μόνο αν $S \cap T = \emptyset$. Στο Παράδειγμα 3.4.2 (α) θα δείξουμε ότι $\chi(G_n) = n + 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Έστω $H_n = (V, E)$ το απλό γράφημα με κορυφές τα n^2 τετράγωνα μιας $n \times n$ σκακιέρας στο οποίο δύο κορυφές συνδέονται με ακμή αν και μόνο αν αυτές βρίσκονται στην ίδια γραμμή ή στήλη. Ένας γνήσιος χρωματισμός $\kappa : V \rightarrow [q]$ του H_n είναι μια αντιστοιχία ενός από τα χρώματα $1, 2, \dots, q$ σε κάθε τετράγωνο της σκακιέρας, τέτοια ώστε σε οποιαδήποτε δύο τετράγωνα που βρίσκονται στην ίδια γραμμή ή στήλη να αντιστοιχεί διαφορετικό χρώμα. Τέτοιες αντιστοιχίσεις με $q = n$ λέγονται *λατινικά τετράγωνα τάξης n* . \square

Οι επόμενες δύο προτάσεις δίνουν κάποια φράγματα για το χρωματικό αριθμό $\chi(G)$, τα οποία μπορούν να φανούν χρήσιμα για τον υπολογισμό του.

Λήμμα 3.4.1 *Αν H είναι υπογράφημα του G , τότε $\chi(H) \leq \chi(G)$.*

Απόδειξη. Έστω V το σύνολο κορυφών του G και $\kappa : V \rightarrow [q]$ γνήσιος χρωματισμός του G με $q = \chi(G)$ χρώματα. Ο περιορισμός του κ στο σύνολο κορυφών του H είναι επίσης γνήσιος χρωματισμός του H με q χρώματα και συνεπώς $\chi(H) \leq q = \chi(G)$. \square

Πρόταση 3.4.1 *Έστω απλό γράφημα G με n κορυφές.*

- (α) *Αν υπάρχουν m από τις κορυφές του G οι οποίες ανά δύο συνδέονται με ακμή, τότε $\chi(G) \geq m$.*
- (β) *Αν για κάποιο ακέραιο d ισχύει $\deg(v) \leq d$ για κάθε κορυφή v του G , τότε $\chi(G) \leq d + 1$. Ειδικότερα, $\chi(G) \leq n$.*

Απόδειξη. (α) Από την υπόθεσή μας γνωρίζουμε ότι το G έχει υπογράφημα H το οποίο είναι πλήρες γράφημα με m κορυφές. Από το Παράδειγμα 3.4.1 (α) και το Λήμμα 3.4.1 παίρνουμε $m = \chi(H) \leq \chi(G)$, δηλαδή το ζητούμενο.

(β) Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο πλήθος n των κορυφών του G . Το ζητούμενο είναι φανερό για $n = 1$. Για $n \geq 2$, έστω $v \in V$ και έστω H το γράφημα που προκύπτει από το G διαγράφοντας την κορυφή v και όλες τις ακμές που έχουν τη v ως ένα από τα άκρα τους. Ασφαλώς οι βαθμοί των κορυφών του H δεν υπερβαίνουν το d και επομένως, από την υπόθεση της επαγωγής, υπάρχει γνήσιος χρωματισμός κ του H με χρώματα $1, 2, \dots, d + 1$. Ορίζοντας $\kappa(v) = i$ για κάποιο $1 \leq i \leq d + 1$ το οποίο δεν είναι το χρώμα κάποιας από τις d το πολύ γειτονικές κορυφές του v στο G , προκύπτει γνήσιος χρωματισμός $\kappa : V \rightarrow [d + 1]$ του G . Κατά συνέπεια έχουμε $\chi(G) \leq d + 1$. \square

Παράδειγμα 3.4.2 (α) Θα δείξουμε ότι για το γράφημα G_n του Παραδείγματος 3.4.1 (β) ισχύει $\chi(G_n) = n + 1$. Έστω V_n το σύνολο κορυφών του G_n , δηλαδή το σύνολο των υποσυνόλων του $[n]$. Οι κορυφές $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}$ του G_n ανά δύο συνδέονται με ακμή και συνεπώς, σύμφωνα με το μέρος (α) της Πρότασης 3.4.1, ισχύει $\chi(G_n) \geq n + 1$. Επίσης, ο χρωματισμός $\kappa : V_n \rightarrow [n + 1]$ του G_n με

$$\kappa(S) = \begin{cases} \min(S), & \text{αν } S \neq \emptyset \\ n + 1, & \text{αν } S = \emptyset \end{cases}$$

για $S \subseteq [n]$, είναι γνήσιος αφού δύο ξένα μεταξύ τους μη κενά υποσύνολα του $[n]$ έχουν διαφορετικά ελάχιστα στοιχεία. Έπεται ότι $\chi(G_n) \leq n + 1$ και συνεπώς το ζητούμενο.

(β) Ομοίως, για το γράφημα H_n του Παραδείγματος 3.4.1 (β) έχουμε $\chi(H_n) = n$. Πράγματι, τα n τετράγωνα μιας οποιασδήποτε γραμμής (ή στήλης) της σκακιέρας ανά δύο συνδέονται με ακμή στο H_n . Από το γεγονός αυτό προκύπτει ότι $\chi(H_n) \geq n$. Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι για κάθε θετικό ακέραιο n υπάρχουν γνήσιοι χρωματισμοί (λατινικά τετράγωνα) του H_n με n χρώματα (έναν τέτοιο για $n = 8$ είδαμε στο Σχήμα 2.4). \square

Παράδειγμα 3.4.3 Από την Πρόταση 3.4.1 (β) προκύπτει ότι αν G είναι μονοπάτι ή κύκλος, τότε $\chi(G) \leq 3$. Η περίπτωση της ισότητας ισχύει αν και μόνο αν το G είναι κύκλος περιττού μήκους (βλέπε την επόμενη παράγραφο). \square

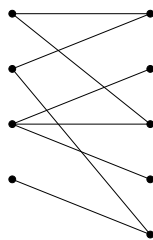
3.4.2 Διμερή γραφήματα

Ένα απλό γράφημα $G = (V, E)$ έχει χρωματικό αριθμό ίσο με 1 αν και μόνο αν $E = \emptyset$. Στην παράγραφο αυτή θα χαρακτηρίσουμε τα απλά γραφήματα με χρωματικό αριθμό ίσο με 2.

Ορισμός 3.4.2 Ένα απλό γράφημα G λέγεται διμερές αν υπάρχει διαμέριση $\{A, B\}$ του συνόλου των κορυφών του G , τέτοια ώστε κάθε ακμή του G να συνδέει μια κορυφή που ανήκει στο σύνολο A με μια κορυφή που ανήκει στο σύνολο B .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. (α) Τα πλήρη διμερή γραφήματα που περιγράψαμε στο Παράδειγμα 3.1.2 (γ) είναι διμερή, με την έννοια του Ορισμού 3.4.2. Το ίδιο ισχύει για το γράφημα του Σχήματος 3.11.

(β) Κάθε γράφημα Μανχάταν (Παράδειγμα 3.1.2 (δ)) με τουλάχιστον δύο κορυφές είναι διμερές. Πράγματι, έστω G το γράφημα Μανχάταν με σύνολο κορυφών $V = [m] \times [n]$, όπου $mn \geq 2$. Αν A, B είναι τα υποσύνολα του V με στοιχεία τις κορυφές (i, j) για τις οποίες ο ακέραιος $i + j$ είναι άρτιος ή περιττός, αντίστοιχα, τότε το $\{A, B\}$ είναι διαμέριση του V και κάθε ακμή του G συνδέει μια κορυφή του A με μια του B . \square



Σχήμα 3.11: Ένα διμερές γράφημα με 9 κορυφές.

Η ακόλουθη πρόταση μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα ως εξής: Ο χρωματικός αριθμός ενός απλού γραφήματος G είναι ίσος με 2 αν και μόνο αν το G είναι διμερές και έχει μία τουλάχιστον ακμή.

Πρόταση 3.4.2 Ένα απλό γράφημα G με τουλάχιστον δύο κορυφές είναι διμερές αν και μόνο αν $\chi(G) \leq 2$.

Απόδειξη. Αν το G είναι διμερές με αντίστοιχη διαμέριση $\{A, B\}$ του συνόλου V των κορυφών του, τότε η απεικόνιση $\kappa : V \rightarrow \{1, 2\}$ με $\kappa(v) = 1$ αν $v \in A$ και $\kappa(v) = 2$ αν $v \in B$ είναι γνήσιος χρωματισμός του G με δύο χρώματα. Κατά συνέπεια ισχύει $\chi(G) \leq 2$. Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι $\chi(G) \leq 2$ και αποδεικνύουμε ότι το G είναι διμερές. Αν $\chi(G) = 1$, τότε το G δεν έχει ακμές και το ζητούμενο είναι φανερό. Έστω ότι $\chi(G) = 2$. Θεωρούμε γνήσιο χρωματισμό $\kappa : V \rightarrow \{1, 2\}$ του G και θέτουμε $A = \kappa^{-1}(1)$ και $B = \kappa^{-1}(2)$. Αφού $\chi(G) = 2$, τα A, B είναι μη κενά και μάλιστα αποτελούν τα μέρη μιας διαμέρισης του V . Για οποιαδήποτε ακμή $e = \{x, y\}$ του G ισχύει $\kappa(x) \neq \kappa(y)$ και επομένως η e συνδέει μια κορυφή του A με μια του B . Άρα, το G είναι διμερές γράφημα. \square

Παράδειγμα 3.4.4 Για έναν κύκλο G μήκους n τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα: (i) το G είναι διμερές γράφημα, (ii) $\chi(G) = 2$, (iii) ο ακεραίος n είναι άρτιος. Πράγματι, έστω $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ το σύνολο κορυφών του G και $\{v_{i-1}, v_i\}$ οι ακμές του, όπου $1 \leq i \leq n$ και $v_0 = v_n$. Ένας γνήσιος χρωματισμός του G με δύο χρώματα αντιστοιχεί το ένα χρώμα στις κορυφές v_i με περιττό δείκτη i και το άλλο χρώμα σε αυτές με άρτιο δείκτη. Αφού $v_0 = v_n$, αυτό είναι δυνατό αν και μόνο αν ο n είναι άρτιος. Επομένως (ii) \Leftrightarrow (iii). Η ισοδυναμία (i) \Leftrightarrow (ii) προκύπτει από την Πρόταση 3.4.2. Από τα προηγούμενα και το Παράδειγμα 3.4.3 προκύπτει ότι οι κύκλοι περιττού μήκους έχουν χρωματικό αριθμό ίσο με 3. \square

Λήμμα 3.4.2 Ένα απλό γράφημα G με τουλάχιστον δύο κορυφές είναι διμερές αν και μόνο αν το G δεν περιέχει κύκλο περιττού μήκους ως υπογράφημα.

Απόδειξη. Έστω ότι το G περιέχει κύκλο H περιττού μήκους ως υπογράφημα. Από το Λήμμα 3.4.1 και το Παράδειγμα 3.4.4 συνάγουμε ότι $\chi(G) \geq \chi(H) = 3$. Συνεπώς, σύμφωνα με την Πρόταση 3.4.2, το G δεν είναι διμερές.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι το G δεν περιέχει κύκλο περιττού μήκους ως υπογράφημα. Θα δείξουμε ότι το G είναι διμερές. Παρατηρούμε ότι οι συνεκτικές συνιστώσες του G επίσης δεν περιέχουν κύκλους περιττού μήκους και ότι αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο για εκείνες που έχουν δύο τουλάχιστον κορυφές. Συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς να βλάψουμε τη γενικότητα, ότι το G είναι συνεκτικό. Έστω V το σύνολο κορυφών του G και έστω $v \in V$. Για τυχαία κορυφή $u \in V$ υπάρχει τουλάχιστον ένας περίπατος στο G με αρχή v και πέρας u . Αφού το G δεν περιέχει κύκλο περιττού μήκους, είτε όλοι αυτοί οι περίπατοι έχουν άρτιο μήκος, είτε όλοι έχουν περιττό μήκος (εξηγήστε γιατί). Συμβολίζουμε με A και B , αντίστοιχα, το σύνολο των κορυφών u στις δύο περιπτώσεις. Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι $\{A, B\}$ είναι διαμέριση του V και ότι οποιαδήποτε ακμή του G συνδέει μια κορυφή του A με μια του B . \square

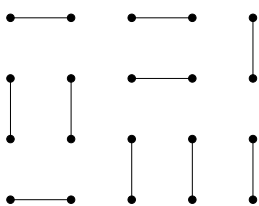
Πόρισμα 3.4.1 Κάθε δένδρο με δύο τουλάχιστον κορυφές είναι διμερές γράφημα.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 3.4.2. \square

3.4.3 Το Θεώρημα του Γάμου

Έστω απλό γράφημα $G = (V, E)$.

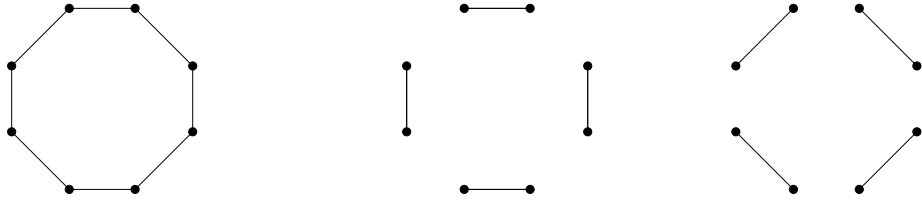
Ορισμός 3.4.3 Ένα υποσύνολο F του συνόλου των ακμών του G λέγεται ταίριασμα (ή ζευγάρισμα) αν κάθε κορυφή του G είναι άκρο το πολύ μίας ακμής που ανήκει στο F . Το F λέγεται τέλει ταίριασμα (ή τέλει ζευγάρισμα) αν κάθε κορυφή του G είναι άκρο ακριβώς μίας ακμής που ανήκει στο F .



Σχήμα 3.12: Ένα τέλει ταίριασμα του γραφήματος του Σχήματος 3.4.

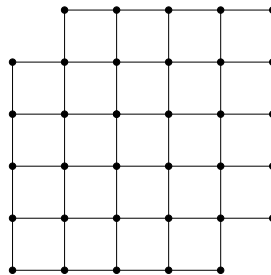
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. (α) Ένα τέλει ταίριασμα του 5×4 γραφήματος Μανχάταν (βλέπε Σχήμα 3.4) απεικονίζεται στο Σχήμα 3.12.

(β) Κάθε κύκλος άρτιου μήκους έχει ακριβώς δύο τέλεια ταιριάσματα (ο κύκλος μήκους 8 και τα τέλεια ταιριάσματα αυτού απεικονίζονται στο Σχήμα 3.13). Κάθε κύκλος μήκους $2n + 1$ έχει ακριβώς $2n + 1$ ταιριάσματα με n στοιχεία και κανένα τέλειο ταιρίασμα.



Σχήμα 3.13: Τα τέλεια ταιριάσματα του κύκλου μήκους 8.

(γ) Το γράφημα G του Σχήματος 3.14 έχει 34 κορυφές και 60 ακμές. Ισχυριζόμαστε ότι το γράφημα αυτό δεν έχει τέλειο ταιρίασμα. Πράγματι, το G είναι διμερές (εξηγήστε γιατί) με αντίστοιχη διαμέριση του συνόλου των κορυφών σε σύνολα με 16 και 18 στοιχεία. Είναι φανερό ότι ένα τυχαίο ταιρίασμα ενός γραφήματος με τις ιδιότητες αυτές έχει το πολύ 16 ακμές και συνεπώς δεν είναι τέλειο. \square



Σχήμα 3.14: Ένα απλό γράφημα με 34 κορυφές.

Πότε έχει ένα γράφημα τέλειο ταιρίασμα; Θα απαντήσουμε το ερώτημα αυτό για διμερή γραφήματα. Έστω ότι το απλό γράφημα $G = (V, E)$ είναι διμερές, με αντίστοιχη διαμέριση $\{A, B\}$ του συνόλου V . Θα εξετάσουμε πρώτα το εξής ερώτημα: Πότε έχει το G ταιρίασμα F , τέτοιο ώστε κάθε στοιχείο του A να είναι άκρο ακμής που ανήκει στο F ; Μια προφανής αναγκαία συνθήκη είναι ότι για κάθε υποσύνολο S του A , έστω με r στοιχεία, θα πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον r κορυφές του B η καθεμιά από τις οποίες συνδέεται με ακμή στο G με μια τουλάχιστον κορυφή στο S . Πράγματι, αν υπάρχει τέτοιο ταιρίασμα F του G , τότε οι γειτονικές κορυφές των στοιχείων του S στο F είναι r σε πλήθος και έχουν τη ζητούμενη ιδιότητα.

Συμβολίζοντας με $N(S)$ το σύνολο των κορυφών του G οι οποίες συνδέονται με ακμή στο G με μια τουλάχιστον κορυφή στο S , θα πρέπει επομένως να ισχύει

$$\#N(S) \geq \#S$$

για κάθε $S \subseteq A$. Η αναγκαία αυτή συνθήκη είναι και ικανή, όπως δηλώνει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.4.1 Έστω G απλό διμερές γράφημα με διαμέριση $\{A, B\}$ του συνόλου των κορυφών, τέτοια ώστε κάθε ακμή του G συνδέει ένα στοιχείο του A με ένα στοιχείο του B . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Υπάρχει ταίριασμα F του G , τέτοιο ώστε κάθε στοιχείο του A είναι άκρο ακμής που ανήκει στο F .
- (ii) Ισχύει

$$\#N(S) \geq \#S$$

για κάθε $S \subseteq A$.

Απόδειξη. Έχουμε ήδη αναφερθεί στη συνεπαγωγή (i) \Rightarrow (ii). Θα δείξουμε ότι (ii) \Rightarrow (i) χρησιμοποιώντας επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του A . Το ζητούμενο είναι φανερό αν το A έχει ένα μόνο στοιχείο. Υποθέτουμε ότι $\#A \geq 2$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

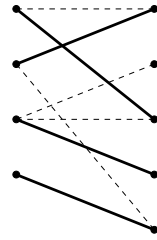
(α) Έστω ότι ισχύει $\#N(S) \geq \#S + 1$ για κάθε γνήσιο υποσύνολο S του A . Επιλέγουμε τυχαία ακμή $\{a, b\}$ του G , όπου $a \in A$ και $b \in B$, και συμβολίζουμε με H το επαγόμενο υπογράφημα του G στο σύνολο κορυφών $V \setminus \{a, b\}$. Παρατηρούμε ότι το H είναι απλό διμερές γράφημα, με αντίστοιχη διαμέριση του $V \setminus \{a, b\}$ στα σύνολα $A \setminus \{a\}$ και $B \setminus \{b\}$. Από την υπόθεσή μας, γνωρίζουμε ότι για κάθε υποσύνολο S του $A \setminus \{a\}$ με r στοιχεία ισχύει $\#N(S) \geq r + 1$. Επομένως, υπάρχουν τουλάχιστον r κορυφές του H η καθεμιά από τις οποίες συνδέεται με ακμή με μια τουλάχιστον κορυφή του H που ανήκει στο S . Κατά συνέπεια, η συνθήκη (ii) του θεωρήματος ισχύει για το H και το $A \setminus \{a\}$. Από την υπόθεση της επαγωγής συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ταίριασμα F_0 του H για το οποίο κάθε στοιχείο του $A \setminus \{a\}$ είναι άκρο ακμής που ανήκει στο F_0 και διαπιστώνουμε ότι το $F_0 \cup \{a, b\}$ είναι ταίριασμα του G με την επιθυμητή ιδιότητα.

(β) Έστω ότι υπάρχει γνήσιο υποσύνολο S του A , τέτοιο ώστε $\#N(S) = \#S$. Θέτουμε $A_1 = S$, $B_1 = N(S)$, $A_2 = A \setminus S$ και $B_2 = B \setminus N(S)$ και για $i = 1, 2$ συμβολίζουμε με H_i το επαγόμενο υπογράφημα του G στο σύνολο κορυφών $A_i \cup B_i$. Προφανώς το H_i είναι απλό διμερές γράφημα, με αντίστοιχη διαμέριση του συνόλου των κορυφών $\{A_i, B_i\}$. Είναι φανερό ότι η συνθήκη (ii) του θεωρήματος ισχύει για

το H_1 και το A_1 . Θα δείξουμε ότι ισχύει επίσης για το H_2 και το A_2 . Έστω τυχαίο σύνολο $T \subseteq A_2 = A \setminus S$. Γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\#N(S \cup T) \geq \#(S \cup T) = \#S + \#T$$

στο G . Από τη σχέση αυτή και την υπόθεση $\#N(S) = \#S$ προκύπτει ότι υπάρχουν τουλάχιστον $\#T$ στοιχεία του B_2 , καθένα από τα οποία συνδέεται με ακμή με μια τουλάχιστον κορυφή του G που ανήκει στο $S \cup T$. Αφού τα στοιχεία του B_2 δε συνδέονται με ακμές με στοιχεία του S , έπεται ότι υπάρχουν τουλάχιστον $\#T$ στοιχεία του B_2 , καθένα από τα οποία συνδέεται με ακμή με μια τουλάχιστον κορυφή του G που ανήκει στο T . Άρα, ισχύει ο ισχυρισμός μας για το H_2 και το A_2 . Από την υπόθεση της επαγωγής συμπεραίνουμε ότι για $i \in \{1, 2\}$, υπάρχει ταίριασμα F_i του H_i τέτοιο ώστε κάθε στοιχείο του A_i είναι άκρο ακμής που ανήκει στο F_i . Προφανώς το σύνολο $F = F_1 \cup F_2$ είναι ταίριασμα του G και κάθε στοιχείο του A είναι άκρο ακμής που ανήκει στο F . Το γεγονός αυτό ολοκληρώνει την επαγωγή και την απόδειξη του θεωρήματος. \square



Σχήμα 3.15: Ένα ταίριασμα για το γράφημα του Σχήματος 3.11.

Το διμερές γράφημα του Σχήματος 3.11 επαληθεύει τη συνθήκη (ii) του Θεωρήματος 3.4.1, όπου A είναι το σύνολο των τεσσάρων κορυφών στην αριστερή πλευρά. Το Σχήμα 3.15 απεικονίζει ένα ταίριασμα για το γράφημα αυτό, όπως προβλέπει το Θεώρημα 3.4.1. Η επόμενη πρόταση είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος.

Πόρισμα 3.4.2 (Θεώρημα του Γάμου) Έστω G απλό διμερές γράφημα με διαμέριση $\{A, B\}$ του συνόλου των κορυφών, τέτοια ώστε κάθε ακμή του G συνδέει ένα στοιχείο του A με ένα στοιχείο του B . Τότε υπάρχει τέλει ταίριασμα του G , αν και μόνο αν $\#A = \#B$ και ισχύει

$$\#N(S) \geq \#S$$

για κάθε $S \subseteq A$. \square

Το Θεώρημα 3.4.1 μπορεί να διατυπωθεί διαφορετικά ως εξής. Έστω σύνολα A_1, A_2, \dots, A_n . Μια ακολουθία (x_1, x_2, \dots, x_n) διαφορετικών ανά δύο στοιχείων της

ένωσης των συνόλων αυτών λέγεται *Σύστημα Διακεκριμένων Αντιπροσώπων* ($\Sigma\Delta A$) για τα A_1, A_2, \dots, A_n αν $x_i \in A_i$ για κάθε $1 \leq i \leq n$. Για παράδειγμα για $n = 5$, η ακολουθία $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 3, x_4 = 5, x_5 = 1$ αποτελεί $\Sigma\Delta A$ για τα σύνολα $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{2, 4, 5\}$, $A_3 = \{3\}$, $A_4 = \{1, 5\}$ και $A_5 = \{1, 4\}$. Αντιθέτως, για $n = 4$ δεν υπάρχει $\Sigma\Delta A$ για τα σύνολα $B_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $B_2 = \{2\}$, $B_3 = \{4\}$ και $B_4 = \{2, 4\}$.

Πόρισμα 3.4.3 Τα σύνολα A_1, A_2, \dots, A_n έχουν $\Sigma\Delta A$ αν και μόνο αν για κάθε $1 \leq r \leq n$, η ένωση οποιονδήποτε r από τα σύνολα αυτά έχει τουλάχιστον r στοιχεία, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει

$$\#(A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_r}) \geq r \quad (3.1)$$

για κάθε επιλογή δεικτών $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$.

Απόδειξη. Έστω $A = [n]$ και B η ένωση των συνόλων A_i . Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι τα A και B είναι ξένα μεταξύ τους και θεωρούμε το απλό διμερές γράφημα G στο σύνολο κορυφών $A \cup B$, στο οποίο τα $i \in A$ και $b \in B$ ενώνονται με ακμή αν και μόνο αν $b \in A_i$. Ισχυριζόμαστε ότι (α) τα A_1, A_2, \dots, A_n έχουν $\Sigma\Delta A$ αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη (i) του Θεωρήματος 3.4.1 για το G και (β) ισχύει η (3.1) για τα A_1, A_2, \dots, A_n αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη (ii) του Θεωρήματος 3.4.1 για το G . Πράγματι, για το (α) παρατηρούμε ότι μια ακολουθία (x_1, x_2, \dots, x_n) είναι $\Sigma\Delta A$ για τα A_1, A_2, \dots, A_n αν και μόνο αν το σύνολο $\{i, x_i\} : 1 \leq i \leq n\}$ είναι ταίριασμα του G . Για το (β) αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν $S = \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subseteq A$, τότε έχουμε $N(S) = A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_r}$ στο γράφημα G . Το ζητούμενο προκύπτει από το Θεώρημα 3.4.1 και τους ισχυρισμούς (α) και (β). \square

Εφαρμογή: Μαγικά τετράγωνα. Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με μια από τις πολλές ενδιαφέρουσες εφαρμογές του Θεωρήματος του Γάμου. Ονομάζουμε *μαγικό τετράγωνο*, με *μαγικό άθροισμα* k , έναν τετραγωνικό πίνακα με στοιχεία μη αρνητικούς ακεραίους, κάθε γραμμή και κάθε στήλη του οποίου έχει άθροισμα ίσο με k . Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

είναι ένα 3×3 μαγικό τετράγωνο με μαγικό άθροισμα $k = 4$. Τα $n \times n$ μαγικά τετράγωνα με μαγικό άθροισμα $k = 1$ είναι ακριβώς οι $n \times n$ πίνακες - μετάθεση, δηλαδή οι $n \times n$ πίνακες κάθε γραμμή και κάθε στήλη των οποίων έχει ένα στοιχείο ίσο με 1 και τα υπόλοιπα ίσα με 0. Παρατηρούμε ότι το άθροισμα δύο μαγικών τετραγώνων της ίδιας διάστασης με μαγικό άθροισμα s και t , αντίστοιχα, είναι επίσης μαγικό τετράγωνο με μαγικό άθροισμα $s + t$. Κατά συνέπεια το άθροισμα οποιωνδήποτε, έστω k σε πλήθος, $n \times n$ πινάκων-μεταθέσεων είναι μαγικό τετράγωνο με μαγικό

άθροισμα ίσο με k . Είναι κάθε μαγικό τετράγωνο ίσο με το άθροισμα πινάκων-μεταθέσεων; Για παράδειγμα, το τετράγωνο (3.2) γράφεται ως άθροισμα τεσσάρων πινάκων-μεταθέσεων ως εξής:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Η ακόλουθη πρόταση δίνει καταφατική απάντηση στο ερώτημά μας.

Πρόταση 3.4.3 *Κάθε μαγικό τετράγωνο μπορεί να γραφεί ως άθροισμα πινάκων-μεταθέσεων.*

Απόδειξη. Έστω A ένα $n \times n$ μαγικό τετράγωνο με μαγικό άθροισμα k . Ισχυριζόμαστε ότι αν $k \geq 1$, τότε ο πίνακας A είναι ίσος με το άθροισμα ενός $n \times n$ πίνακα-μετάθεση και ενός μαγικού τετραγώνου με μαγικό άθροισμα $k - 1$. Το ζητούμενο προκύπτει από τον ισχυρισμό αυτό με επαγωγή στο k .

Συμβολίζουμε με a_{ij} το στοιχείο του A στη γραμμή i και στήλη j . Θέτουμε $[n]' = \{1', 2', \dots, n'\}$ και ορίζουμε το απλό διμερές γράφημα G_A με σύνολο κορυφών $[n] \cup [n]'$ και ακμές τα σύνολα $\{i, j'\}$ για τα οποία $a_{ij} \geq 1$. Θα δείξουμε ότι για το G_A και το σύνολο $[n]$ ισχύει η συνθήκη (ii) του Θεωρήματος 3.4.1. Έστω $S \subseteq [n]$ με $\#S = r$. Το άθροισμα των στοιχείων των γραμμών του A με δείκτη $i \in S$ είναι ίσο με rk . Αφού κάθε στήλη του A έχει άθροισμα ίσο με k , τουλάχιστον r στήλες του A έχουν η καθεμιά μη μηδενικό στοιχείο σε κάποια γραμμή με δείκτη $i \in S$. Αυτό σημαίνει ότι ισχύει $\#N(S) \geq r$ στο G_A . Από το Πρόβλημα 3.4.2 συμπεραίνουμε ότι το G_A έχει τέλειο ταιρίασμα. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει αναδιάταξη $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ του $[n]$ για την οποία ισχύει $a_{i\sigma_i} \geq 1$ για $1 \leq i \leq n$. Επομένως μπορούμε να γράψουμε $A = P + B$, όπου P είναι ο $n \times n$ πίνακας - μετάθεση με μη μηδενικά στοιχεία στις θέσεις (i, σ_i) για $1 \leq i \leq n$ και B είναι $n \times n$ πίνακας με στοιχεία μη αρνητικούς ακεραίους. Είναι φανερό ότι ο $B = A - P$ είναι μαγικό τετράγωνο με μαγικό άθροισμα $k - 1$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού μας, άρα και της πρότασης. \square

3.5 Το χρωματικό πολυώνυμο

Στην παράγραφο αυτή θα μας απασχολήσουν τα εξής ερωτήματα: Πόσοι είναι οι γνήσιοι χρωματισμοί ενός γραφήματος που χρησιμοποιούν ένα δοσμένο πλήθος χρωμάτων q ; Πώς μεταβάλλεται αυτή η ποσότητα ως συνάρτηση του q ;

Ορισμός 3.5.1 Έστω απλό γράφημα G . Για $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ συμβολίζουμε με $\chi_G(q)$ το πλήθος των γνήσιων χρωματισμών του G με χρώματα $1, 2, \dots, q$ και ονομάζουμε χρωματικό πολυώνυμο του G τη συνάρτηση $\chi_G : \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε ότι ο χρωματικός αριθμός του G είναι ίσος με τον ελάχιστο θετικό ακέραιο q για τον οποίο ισχύει $\chi_G(q) \neq 0$ και ότι για δύο ισόμορφα γραφήματα G_1 και G_2 ισχύει $\chi_{G_1}(q) = \chi_{G_2}(q)$.

Παράδειγμα 3.5.1 Έστω απλό γράφημα $G = (V, E)$ με n κορυφές.

(α) Αν $E = \emptyset$, τότε κάθε χρωματισμός $\kappa : V \rightarrow [q]$ του G είναι γνήσιος και συνεπώς το $\chi_G(q)$ είναι ίσο με το πλήθος όλων των απεικονίσεων $\kappa : V \rightarrow [q]$, δηλαδή $\chi_G(q) = q^n$. Αν το G είναι το πλήρες γράφημα στο σύνολο κορυφών V , τότε (όπως προκύπτει από τις διαπιστώσεις μας στο Παράδειγμα 3.4.1) το $\chi_G(q)$ είναι ίσο με το πλήθος όλων των 1-1 απεικονίσεων $\kappa : V \rightarrow [q]$. Συνεπώς $\chi_G(q) = q(q-1) \cdots (q-n+1)$.

(β) Έστω $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ και έστω ότι G είναι το μονοπάτι με ακμές $\{v_{i-1}, v_i\}$ για $2 \leq i \leq n$. Για να επιλέξουμε ένα γνήσιο χρωματισμό $\kappa : V \rightarrow [q]$ του G έχουμε διαδοχικά q επιλογές για το χρώμα $\kappa(v_1)$ και $q-1$ επιλογές για καθένα από τα χρώματα $\kappa(v_2), \dots, \kappa(v_n)$ ώστε $\kappa(v_i) \neq \kappa(v_{i-1})$ για $2 \leq i \leq n$. Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι $\chi_G(q) = q(q-1)^{n-1}$. \square

Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση χ_G είναι όντως πολυώνυμο στο q (Πόρισμα 3.5.1) με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Ο πρώτος βασίζεται στην ακόλουθη πρόταση. Ένα υποσύνολο W του συνόλου των κορυφών του G λέγεται *ανεξάρτητο* (ή *ευσταθές*) αν δεν υπάρχει ακμή του G τα άκρα της οποίας να ανήκουν στο W .

Πρόταση 3.5.1 Για κάθε απλό γράφημα $G = (V, E)$ με n κορυφές ισχύει

$$\chi_G(q) = \sum_{i=1}^n c_i q(q-1) \cdots (q-i+1), \quad (3.3)$$

όπου c_i είναι το πλήθος διαμερίσεων του V σε i ανεξάρτητα μέρη.

Απόδειξη. Ένας γνήσιος χρωματισμός κ του G με χρώματα $1, 2, \dots, q$ είναι μια απεικόνιση $\kappa : V \rightarrow [q]$ για την οποία το $\kappa^{-1}(j)$ είναι ανεξάρτητο υποσύνολο του G για κάθε $j \in [q]$. Επομένως, τα μη κενά από τα υποσύνολα αυτά αποτελούν τα μέρη μιας διαμέρισης του V , καθένα από τα οποία είναι ανεξάρτητο υποσύνολο του V . Υπάρχουν c_i τρόποι να επιλέξει κανείς μια τέτοια διαμέριση με i μέρη και $q(q-1) \cdots (q-i+1)$ τρόποι να αντιστοιχίσει ένα από τα χρώματα $1, 2, \dots, q$ σε κάθε μέρος, ώστε ανά δύο τα χρώματα αυτά να είναι διαφορετικά. Έπεται η (3.3). \square

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Αν το G είναι κύκλος μήκους 4, τότε έχουμε $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$ και $c_4 = 1$, οπότε η (3.3) δίνει

$$\begin{aligned} \chi_G(q) &= q(q-1) + 2q(q-1)(q-2) + q(q-1)(q-2)(q-3) \\ &= q^4 - 4q^3 + 6q^2 - 3q. \end{aligned}$$

\square

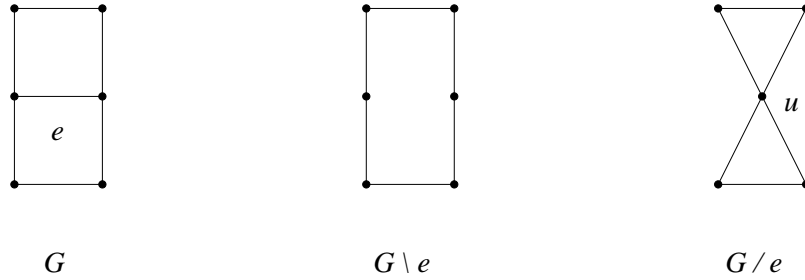
Πόρισμα 3.5.1 Για κάθε απλό γράφημα $G = (V, E)$ με n κορυφές, η συνάρτηση $\chi_G(q)$ είναι πολυώνυμο στο q βαθμού n . Επιπλέον, αν

$$\chi_G(q) = \sum_{i=0}^n a_i q^{n-i}, \quad (3.4)$$

τότε $a_0 = 1$, $a_n = 0$ και $a_1 = -m$, όπου m είναι το πλήθος των ακμών του G .

Απόδειξη. Είναι φανερό από την (3.3) ότι το $\chi_G(q)$ γράφεται στη μορφή (3.4) με σταθερό όρο $a_n = 0$. Υπολογίζοντας τους συντελεστές του q^n και του q^{n-1} στο δεξιό μέλος της (3.3) βρίσκουμε ότι $a_0 = c_n$ και $a_1 = -c_n \binom{n}{2} + c_{n-1}$. Παρατηρώντας ότι $c_n = 1$ και $c_{n-1} = \binom{n}{2} - m$, συμπεραίνουμε ότι $a_0 = 1$ και $a_1 = -m$. \square

Ο δεύτερος τρόπος που θα χρησιμοποιήσουμε για να δείξουμε ότι το $\chi_G(q)$ είναι πολυώνυμο στο q βασίζεται στην τεχνική της *διαγραφής - συστολής*, μιας σημαντικής τεχνικής της θεωρίας γραφημάτων. Δοσμένου απλού γραφήματος $G = (V, E)$ και ακμής $e \in E$, λέμε ότι το γράφημα $(V, E \setminus \{e\})$ προκύπτει με *διαγραφή* της e από το G και το συμβολίζουμε με $G \setminus e$. Συμβολίζουμε επίσης με G/e το γράφημα που ορίζεται ως εξής: Το σύνολο κορυφών του G/e προκύπτει από το V αντικαθιστώντας τα άκρα της e με μια νέα κορυφή u . Το σύνολο των ακμών του G/e προκύπτει από το E διαγράφοντας τις ακμές του G που έχουν ένα τουλάχιστον κοινό άκρο με την e και προσθέτοντας ως ακμές τα σύνολα $\{u, v\}$, όπου το $v \in V$ δεν είναι άκρο της e και συνδέεται με ακμή στο G με ένα τουλάχιστον άκρο της e . Λέμε ότι το G/e προκύπτει από το G με *συστολή* της ακμής e . Ένα παράδειγμα διαγραφής και συστολής απεικονίζεται στο Σχήμα 3.16.



Σχήμα 3.16: Διαγραφή και συστολή της e στο γράφημα G .

Λήμμα 3.5.1 (Θεώρημα Διαγραφής - Συστολής) Για τυχαίο απλό γράφημα G και ακμή του e ισχύει

$$\chi_G(q) = \chi_{G \setminus e}(q) - \chi_{G/e}(q).$$

Απόδειξη. Έστω V το σύνολο των κορυφών του G και έστω $e = \{x, y\}$. Παρατηρούμε ότι για ένα γνήσιο χρωματισμό $\kappa : V \rightarrow [q]$ του $G \setminus e$ ισχύει είτε $\kappa(x) \neq \kappa(y)$, είτε $\kappa(x) = \kappa(y)$. Οι γνήσιοι χρωματισμοί με την ιδιότητα $\kappa(x) \neq \kappa(y)$ συμπίπτουν με τους γνήσιους χρωματισμούς του G με χρώματα $1, 2, \dots, q$ και συνεπώς το πλήθος τους είναι ίσο με $\chi_G(q)$. Οι γνήσιοι χρωματισμοί με την ιδιότητα $\kappa(x) = \kappa(y)$ βρίσκονται σε εμφανή 1-1 αντιστοιχία με τους γνήσιους χρωματισμούς του G/e με χρώματα $1, 2, \dots, q$ και συνεπώς το πλήθος τους είναι ίσο με $\chi_{G/e}(q)$. Έπεται ότι $\chi_{G \setminus e}(q) = \chi_G(q) + \chi_{G/e}(q)$, δηλαδή το ζητούμενο. \square

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Έστω G το απλό γράφημα στο σύνολο κορυφών $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ με ακμές $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\{v_2, v_4\}$ και $\{v_3, v_4\}$. Παρατηρούμε ότι $G = K \setminus e$, όπου K είναι το πλήρες απλό γράφημα στο σύνολο κορυφών V και $e = \{v_1, v_4\}$, και ότι το K/e είναι πλήρες απλό γράφημα με τρεις κορυφές. Από το Παράδειγμα 3.5.1 (α) έχουμε $\chi_K(q) = q(q-1)(q-2)(q-3)$ και $\chi_{K/e}(q) = q(q-1)(q-2)$. Από το Λήμμα 3.5.1 συμπεραίνουμε ότι

$$\chi_G(q) = \chi_K(q) + \chi_{K/e}(q) = q(q-1)(q-2)^2.$$

\square

Δεύτερη απόδειξη του Πορίσματος 3.5.1. Εφαρμόζουμε επαγωγή στο πλήθος m των ακμών του G . Αν $m = 0$, τότε έχουμε $\chi_G(q) = q^n$ από το Παράδειγμα 3.5.1 (α) και το ζητούμενο ισχύει. Έστω $m \geq 1$ και e τυχαία ακμή του G . Το γράφημα $G \setminus e$ έχει n κορυφές και $m - 1$ ακμές, ενώ το G/e έχει $n - 1$ κορυφές. Επομένως, από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε

$$\chi_{G \setminus e}(q) = \sum_{i=0}^n b_i q^{n-i}$$

και

$$\chi_{G/e}(q) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i q^{n-i-1},$$

όπου $b_0 = c_0 = 1$, $b_1 = -m + 1$ και $b_n = c_{n-1} = 0$. Το ζητούμενο προκύπτει από τις σχέσεις αυτές και το Λήμμα 3.5.1. \square

Ένας ακόμη μη αναγωγικός τύπος για το χρωματικό πολυώνυμο δίνεται στην ακόλουθη πρόταση. Για απλό γράφημα $G = (V, E)$ και $S \subseteq E$, συμβολίζουμε με G_S το παράγον υπογράφημα (V, S) του G με σύνολο ακμών S και με $c(S)$ το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του G_S . Για παράδειγμα, αν G είναι το δένδρο του Σχήματος 3.5 και $S = \{\{1, 4\}, \{5, 6\}\}$, τότε $c(S) = 3$.

Πρόταση 3.5.2 Για κάθε απλό γράφημα $G = (V, E)$ ισχύει

$$\chi_G(q) = \sum_{S \subseteq E} (-1)^{\#S} q^{c(S)}, \quad (3.5)$$

όπου $c(S)$ είναι το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του $G_S = (V, S)$.

Απόδειξη. Έστω A το σύνολο όλων των χρωματισμών $\kappa : V \rightarrow [q]$ του G και για $e \in E$ με $e = \{x, y\}$, έστω A_e το σύνολο εκείνων των στοιχείων κ του A με την ιδιότητα $\kappa(x) = \kappa(y)$. Προφανώς το σύνολο των γνήσιων χρωματισμών του G με χρώματα $1, 2, \dots, q$ είναι ίσο με το σύνολο

$$A - \bigcup_{e \in E} A_e.$$

Συνεπώς, από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού (Θεώρημα 1.4.1) έχουμε ότι

$$\chi_G(q) = \sum_{S \subseteq E} (-1)^{\#S} \# \bigcap_{e \in S} A_e.$$

Αρκεί επομένως να δείξουμε ότι το σύνολο $\bigcap_{e \in S} A_e$ έχει ακριβώς $q^{c(S)}$ στοιχεία για κάθε $S \subseteq E$. Πράγματι, ένας χρωματισμός $\kappa : V \rightarrow [q]$ του G ανήκει στο σύνολο αυτό αν και μόνο αν λαμβάνει την ίδια τιμή στα άκρα κάθε ακμής στο S . Ισοδύναμα, αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν ο κ λαμβάνει την ίδια τιμή σε κορυφές του G που ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G_S . Το πλήθος των χρωματισμών $\kappa : V \rightarrow [q]$ του G με την ιδιότητα αυτή είναι προφανώς ίσο με $q^{c(S)}$. \square

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Αν G είναι το απλό πλήρες γράφημα με τρεις κορυφές, τότε έχουμε $c(\emptyset) = 3$, $c(S) = 2$ αν το S έχει ένα στοιχείο και $c(S) = 1$ αν το S έχει δύο ή τρία στοιχεία. Κατά συνέπεια η (3.5) δίνει $\chi_G(q) = q^3 - 3q^2 + 3q - q = q(q-1)(q-2)$. \square

Τρίτη απόδειξη του Πορίσματος 3.5.1. Παρατηρώντας ότι στην (3.5) ισχύει $c(S) = n$ αν και μόνο αν $S = \emptyset$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $\chi_G(q)$ γράφεται στη μορφή (3.4) με $a_0 = 1$. Οι σχέσεις $a_n = 0$ και $a_1 = -m$ προκύπτουν παρατηρώντας ότι $c(S) \geq 1$ για κάθε $S \subseteq E$ και ότι $c(S) = n - 1$ εάν και μόνο αν το S έχει ακριβώς ένα στοιχείο. \square

Άκυκλοι προσανατολισμοί. Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με μια εφαρμογή της μεθόδου της διαγραφής - συστολής σε προσανατολισμούς γραφημάτων. Έστω γράφημα $G = (V, E, \varphi)$ και $e \in E$ με $\varphi(e) = \{a, b\}$. Προσανατολισμός της e λέγεται η επιλογή μιας από τις κορυφές a, b ως αρχικής κορυφής της e . Η ακμή e λέγεται προσανατολισμένη και αν a είναι η αρχική κορυφή της e , τότε η b είναι η τελική κορυφή της (ώστε η αρχική και τελική κορυφή της προσανατολισμένης ακμής e συμπίπτουν αν και μόνο αν η e είναι θυλιά).

Ορισμός 3.5.2 Προσανατολισμός του G λέγεται μια επιλογή προσανατολισμού για κάθε ακμή του G .



Σχήμα 3.17: Δύο προσανατολισμοί ενός γραφήματος.

Έστω σ προσανατολισμός του G . Ένας περίπατος $w = (u_0, e_1, u_1, \dots, e_\ell, u_\ell)$ στο G λέγεται *προσανατολισμένος* ως προς τον σ αν με τον προσανατολισμό σ , η ακμή e_i έχει αρχική κορυφή u_{i-1} και τελική κορυφή u_i για κάθε $1 \leq i \leq \ell$. Ένας κλειστός περίπατος w στο G ο οποίος είναι προσανατολισμένος ως προς τον σ λέγεται *κύκλος* του σ . Ένας προσανατολισμός του G που δεν έχει κύκλο λέγεται *άκυκλος*. Στο Σχήμα 3.17 απεικονίζονται δύο προσανατολισμοί για το γράφημα του Σχήματος 3.16, ο δεύτερος από τους οποίους είναι άκυκλος.

Το πλήθος των προσανατολισμών ενός γραφήματος G είναι ίσος με 2^m , όπου m είναι το πλήθος των ακμών του G που δεν είναι θυλιές. Θα συμβολίζουμε με $a(G)$ το πλήθος των άκυκλων προσανατολισμών του G .

Παράδειγμα 3.5.2 (α) Έστω G το πλήρες απλό γράφημα σε σύνολο κορυφών V με n στοιχεία. Θα δείξουμε ότι $a(G) = n!$. Δοσμένου ενός άκυκλου προσανατολισμού σ του G , ορίζουμε τη διμελή σχέση \leq_σ στο σύνολο V θέτοντας $a \leq_\sigma b$ αν $a = b$ ή το a είναι η αρχική κορυφή της ακμής $\{a, b\}$ του G , ως προς τον προσανατολισμό σ . Αφήνουμε στον αναγνώστη να επαληθεύσει ότι η σχέση \leq_σ είναι μερική διάταξη στο σύνολο V (η μεταβατικότητα ισχύει διότι ο προσανατολισμός σ είναι άκυκλος), η οποία είναι ολική διάταξη (οποιαδήποτε δύο στοιχεία του V είναι μεταξύ τους συγκρίσιμα). Από την Άσκηση 15 (γ) του Κεφαλαίου 2 προκύπτει ότι υπάρχει αναδιάταξη $f(\sigma) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ του V τέτοια ώστε $v_i \leq_\sigma v_j$ αν και μόνο αν $i < j$. Προφανώς κάθε αναδιάταξη του V γράφεται στη μορφή $f(\sigma)$ για μοναδικό άκυκλο προσανατολισμό σ του G . Συμπεραίνουμε ότι οι άκυκλοι προσανατολισμοί του G βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχία με τις αναδιατάξεις του V και συνεπώς ότι $a(G) = n!$.

(β) Ένας κύκλος G μήκους n έχει ακριβώς δύο προσανατολισμούς (ποιούς;) οι οποίοι δεν είναι άκυκλοι. Συνεπώς ισχύει $a(G) = 2^n - 2$.

(γ) Αν το G είναι δένδρο με n κορυφές, τότε κάθε προσανατολισμός του G είναι άκυκλος. Επομένως, σύμφωνα με το Πόρισμα 3.3.1 (β), έχουμε $a(G) = 2^{n-1}$. \square

Το ακόλουθο θεώρημα συνδέει με απρόσμενο τρόπο τον ακέραιο $a(G)$ με το χρωματικό πολυώνυμο του G .

Θεώρημα 3.5.1 (Stanley, 1973) Για κάθε γράφημα G με n κορυφές ισχύει

$$a(G) = (-1)^n \chi_G(-1), \quad (3.6)$$

όπου $\chi_G(-1)$ είναι η τιμή του πολυωνύμου $\chi_G(q)$ για $q = -1$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι τα δύο μέλη της (3.6) δε μεταβάλλονται διαγράφοντας μία από δύο παράλληλες ακμές του G και ότι είναι ίσα με 0 αν υπάρχει θυλιά στο G . Κατά συνέπεια, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το G είναι απλό γράφημα. Θα αποδείξουμε την (3.6) με επαγωγή στο πλήθος των ακμών του G . Θέτουμε $\psi(G) = (-1)^n \chi_G(-1)$ και συμβολίζουμε με $\text{AO}(G)$ το σύνολο των άκυκλων προσανατολισμών του G . Αν το G δεν έχει ακμές, τότε $\chi_G(q) = q^n$ και συνεπώς $a(G) = \psi(G) = 1$. Διαφορετικά, από το Λήμμα 3.5.1 έχουμε

$$\psi(G) = \psi(G \setminus e) + \psi(G/e)$$

για τυχαία ακμή e του G . Αφού τα $G \setminus e$ και G/e έχουν λιγότερες ακμές από το G , αρκεί να δείξουμε ότι το $a(G)$ ικανοποιεί την ίδια σχέση, δηλαδή ότι

$$a(G) = a(G \setminus e) + a(G/e). \quad (3.7)$$

Για $o \in \text{AO}(G)$ συμβολίζουμε με $f(o)$ τον προσανατολισμό του $G \setminus e$ που προκύπτει από τον o διαγράφοντας την ακμή e . Προφανώς $f(o) \in \text{AO}(G \setminus e)$ και συνεπώς ορίσαμε μια απεικόνιση

$$f : \text{AO}(G) \rightarrow \text{AO}(G \setminus e).$$

Θέτουμε $e = \{a, b\}$ και για $o' \in \text{AO}(G \setminus e)$, συμβολίζουμε με o_a (αντίστοιχα, o_b) τον προσανατολισμό του G που προκύπτει από τον o' προσανατολίζοντας την e έτσι ώστε αυτή να έχει αρχική κορυφή a (αντίστοιχα, b). Παρατηρούμε ότι η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(o')$ αποτελείται από τους προσανατολισμούς $o \in \{o_a, o_b\}$ του G οι οποίοι είναι άκυκλοι. Παρατηρούμε επίσης ότι ο o_a (αντίστοιχα, ο o_b) είναι άκυκλος αν και μόνο αν δεν υπάρχει προσανατολισμένος ως προς τον o' περίπατος στο $G \setminus e$ με αρχή b και πέρασ a (αντίστοιχα, με αρχή a και πέρασ b). Αφού ο o' είναι άκυκλος, από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $f^{-1}(o')$ έχει είτε ακριβώς ένα, είτε ακριβώς δύο στοιχεία και ότι ισχύει το δεύτερο αν και μόνο αν δεν υπάρχει προσανατολισμένος ως προς τον o' περίπατος στο $G \setminus e$ με αρχή μια από τις κορυφές a, b και πέρασ την άλλη. Αφού οι προσανατολισμοί $o' \in \text{AO}(G \setminus e)$ με την τελευταία ιδιότητα βρίσκονται σε εμφανή 1-1 αντιστοιχία με τους άκυκλους προσανατολισμούς του G/e , από τα παραπάνω έπεται ότι $a(G) - a(G \setminus e) = a(G/e)$, δηλαδή ότι ισχύει η (3.7). \square

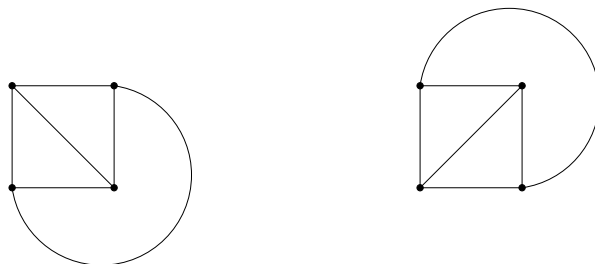
3.6 Επίπεδα γραφήματα

Επίπεδο λέγεται ένα γράφημα οι κορυφές του οποίου είναι σημεία στο \mathbb{R}^2 και οι ακμές του οποίου είναι μη αυτοτεμνόμενα τόξα τα οποία συνδέουν τα σημεία αυτά, χωρίς να διασταυρώνονται μεταξύ τους. Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε μια θεμελιώδη σχέση που συνδέει το πλήθος των κορυφών και των ακμών ενός τέτοιου γραφήματος, με το πλήθος των περιοχών στις οποίες διαχωρίζεται το \mathbb{R}^2 από τις ακμές του. Για να ορίσουμε τις παραπάνω έννοιες με μεγαλύτερη σαφήνεια και να πετύχουμε το στόχο αυτό, θα υποθέσουμε ότι ο αναγνώστης είναι εξοικειωμένος με βασικά στοιχεία της τοπολογίας του \mathbb{R}^2 (η ικανοποιητική διαίσθηση αρκεί).

Αρχίζουμε με την εξής ορολογία. Θεωρούμε σημεία $a, b \in \mathbb{R}^2$ (όχι κατανάγκη διαφορετικά). Απλό τόξο (στο \mathbb{R}^2) με άκρα a, b θα λέγεται ένα σύνολο της μορφής $\{\gamma(t) : 0 \leq t \leq 1\}$, όπου $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι συνεχής απεικόνιση με τις ιδιότητες: (α) $\{\gamma(0), \gamma(1)\} = \{a, b\}$, και (β) αν $s, t \in [0, 1]$ και ισχύουν $s < t$ και $\gamma(s) = \gamma(t)$, τότε $s = 0$ και $t = 1$.

Ορισμός 3.6.1 Ένα πεπερασμένο γράφημα (V, E, φ) λέγεται επίπεδο αν ισχύουν τα εξής: (α) $V \subset \mathbb{R}^2$, (β) κάθε ακμή $e \in E$ είναι απλό τόξο στο \mathbb{R}^2 με άκρα a, b , όπου $\{a, b\} = \varphi(e)$, και (γ) αν δύο διακεκριμένα στοιχεία του E έχουν μη κενή τομή, τότε η τομή τους αποτελείται από κοινά τους άκρα.

Επιπεδικό θα λέγεται κάθε γράφημα το οποίο είναι ισόμορφο με κάποιο επίπεδο γράφημα.



Σχήμα 3.18: Δύο επίπεδα γραφήματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. (α) Επίπεδα γραφήματα απεικονίζονται στα Σχήματα 3.1, 3.2 (b), 3.4 3.5 και 3.14.

(β) Το πλήρες γράφημα K_4 είναι επιπεδικό. Στο Σχήμα 3.18 απεικονίζονται δύο επίπεδα γραφήματα στο σύνολο κορυφών $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ τα οποία είναι ισόμορφα με το K_4 .

(γ) Το διμερές γράφημα του Σχήματος 3.11 είναι επιπεδικό, αν και αυτό δεν είναι προφανές από το συγκεκριμένο σχήμα. \square

Έστω (πεπερασμένο) επίπεδο γράφημα G . Το σύνολο \mathcal{M}_G που προκύπτει από το \mathbb{R}^2 αφαιρώντας την ένωση των ακμών του G είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 . Συνεπώς, το \mathcal{M}_G γράφεται με μοναδικό τρόπο ως ένωση ξένων ανά δύο, συνεκτικών ανοικτών υποσυνόλων του \mathbb{R}^2 . Τα υποσύνολα αυτά λέγονται περιοχές του G .

Θα συμβολίζουμε με $p(G)$, $q(G)$ και $r(G)$ το πλήθος των κορυφών, των ακμών και των περιοχών του G , αντίστοιχα. Θα λέμε ότι μια ακμή e του G είναι ακμή μιας περιοχής R , αν η e περιέχεται στην κλειστή θήκη της R .

Παράδειγμα 3.6.1 (α) Το επίπεδο γράφημα του Σχήματος 3.1 έχει $p(G) = 4$ κορυφές, $q(G) = 7$ ακμές και $r(G) = 5$ περιοχές. Μια από τις πέντε περιοχές του G έχει τις ακμές e_1, e_2, e_5 και μια άλλη τις e_6, e_7 .

(β) Έστω ότι το επίπεδο γράφημα G έχει μία κορυφή και μία ακμή (τα άκρα της οποίας συμπίπτουν). Από το «Θεώρημα της Καμπύλης του Jordan» (βλέπε π.χ. [9, Κεφάλαιο 10]), το οποίο εδώ θεωρούμε ως δεδομένο, προκύπτει ότι $r(G) = 2$. Επιπλέον, ακριβώς μία από τις περιοχές του G (αυτή που «περικλείεται» από την ακμή του G) είναι φραγμένη, ενώ η μοναδική ακμή του G είναι ακμή και των δύο περιοχών του.

(γ) Αν το G είναι δένδρο, τότε $r(G) = 1$ (εξηγήστε γιατί). \square

Θεώρημα 3.6.1 (Euler) Για κάθε συνεκτικό επίπεδο γράφημα G ισχύει η σχέση $p(G) - q(G) + r(G) = 2$ μεταξύ του πλήθους των κορυφών, των ακμών και των περιοχών του G . Ειδικότερα, δύο οποιαδήποτε ισόμορφα συνεκτικά επίπεδα γραφήματα έχουν το ίδιο πλήθος περιοχών.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την πρώτη πρόταση με επαγωγή στο πλήθος $q(G)$ των ακμών του G . Η δεύτερη πρόταση έπεται από την πρώτη, αφού ισόμορφα γραφήματα έχουν το ίδιο πλήθος κορυφών και το ίδιο πλήθος ακμών.

Αν $q(G) = 0$, τότε $p(G) = r(G) = 1$ και το ζητούμενο ισχύει. Υποθέτουμε ότι $q(G) = m \geq 1$ και ότι το ζητούμενο ισχύει για κάθε συνεκτικό επίπεδο γράφημα με $m-1$ ακμές. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Αν το G είναι δένδρο, τότε $p(G) = m+1$ (όπως δείξαμε στο Πρόσχημα 3.3.1 (β)) και $r(G) = 1$ (όπως αναφέραμε στο Παράδειγμα 3.6.1 (γ)) και συνεπώς $p(G) - q(G) + r(G) = 2$. Διαφορετικά, υπάρχει ακμή e του G η οποία είναι θυλιά, ή παράλληλη προς κάποια άλλη, ή ανήκει σε υπογράφημα του G που είναι κύκλος. Θεωρούμε το γράφημα $G \setminus e$, το οποίο προκύπτει από το G διαγράφοντας την e . Προφανώς, το $G \setminus e$ είναι συνεκτικό και επίπεδο και έχει $p(G \setminus e) = p(G)$ κορυφές και $q(G \setminus e) = q(G) - 1 = m - 1$ ακμές. Επιπλέον, η e είναι ακμή ακριβώς δύο περιοχών του G (ο ισχυρισμός αυτός προκύπτει από το Θεώρημα της Καμπύλης του Jordan) και συνεπώς $r(G \setminus e) = r(G) - 1$. Από τα παραπάνω και

την ισότητα $p(G \setminus e) - q(G \setminus e) + r(G \setminus e) = 2$, την οποία εγγυάται η υπόθεση της επαγωγής, έπεται η ζητούμενη σχέση για το G . \square

Στο υπόλοιπο της παραγράφου αυτής θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 3.6.1 για να δείξουμε ότι τα γραφήματα K_5 και $K_{3,3}$ δεν είναι επιπεδικά.

Πρόταση 3.6.1 *Αν G είναι απλό συνεκτικό επίπεδο γράφημα με τουλάχιστον τρεις κορυφές, τότε $q(G) \leq 3p(G) - 6$.*

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $\mathcal{R}(G)$ το σύνολο των περιοχών του G . Για $\Omega \in \mathcal{R}(G)$, συμβολίζουμε με $q(\Omega)$ το πλήθος των ακμών της Ω , όπου μετράμε δυο φορές κάθε ακμή η οποία δεν είναι ακμή άλλης περιοχής του G . Για παράδειγμα, αν το G είναι δένδρο, τότε $q(\Omega) = 2q(G)$ για τη μοναδική περιοχή $\Omega \in \mathcal{R}(G)$. Στη γενική περίπτωση, παρατηρώντας ότι κάθε ακμή του G είναι ακμή μίας ή δύο περιοχών του G , καταλήγουμε στην ισότητα

$$\sum_{\Omega \in \mathcal{R}(G)} q(\Omega) = 2q(G). \quad (3.8)$$

Παρατηρώντας επίσης ότι $q(\Omega) \geq 3$ για κάθε $\Omega \in \mathcal{R}(G)$ (στο σημείο αυτό χρειάζεται η υπόθεση ότι το G έχει τουλάχιστον τρεις κορυφές), συμπεραίνουμε ότι

$$2q(G) \geq 3r(G). \quad (3.9)$$

Το ζητούμενο προκύπτει αντικαθιστώντας το $r(G)$ με το $q(G) - p(G) + 2$ (Θεώρημα 3.6.1) στην προηγούμενη ανισότητα. \square

Πόρισμα 3.6.1 *Το πλήρες γράφημα K_5 δεν είναι επιπεδικό.*

Απόδειξη. Το K_5 είναι απλό συνεκτικό γράφημα και έχει $p = 5$ κορυφές και $q = 10$ ακμές. Το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση 3.6.1. \square

Πρόταση 3.6.2 *Αν G είναι απλό συνεκτικό επίπεδο γράφημα με τουλάχιστον τρεις κορυφές το οποίο δεν περιέχει κύκλο μήκους 3 ως υπογράφημα, τότε $q(G) \leq 2p(G) - 4$.*

Απόδειξη. Ακολουθούμε την απόδειξη της Πρότασης 3.6.1. Από την υπόθεσή μας ότι το G δεν περιέχει κύκλο μήκους 3 ως υπογράφημα έπεται ότι $q(\Omega) \geq 4$ για κάθε $\Omega \in \mathcal{R}(G)$. Συνεπώς, η ανισότητα (3.9) βελτιώνεται στην $2q(G) \geq 4r(G)$ και το ζητούμενο προκύπτει από το Θεώρημα 3.6.1, όπως στην περίπτωση της Πρότασης 3.6.1. \square

Πόρισμα 3.6.2 *Το πλήρες διμερές γράφημα $K_{3,3}$ δεν είναι επιπεδικό.*

Απόδειξη. Το $K_{3,3}$ είναι απλό συνεκτικό γράφημα με $p = 6$ κορυφές και $q = 9$ ακμές, το οποίο δεν περιέχει κύκλο μήκους 3 ως υπογράφημα. Το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση 3.6.2. \square

3.7 Ασκήσεις

1. Ανάμεσα σε έντεκα φοιτητές, κάποιοι έχουν αλληλογραφήσει με κάποιους άλλους. Είναι δυνατόν κάθε φοιτητής να έχει στείλει γράμμα σε ακριβώς τρεις άλλους φοιτητές και να έχει λάβει γράμμα από ακριβώς τρεις άλλους, αν:
 - (α) αν ο A έχει γράψει στον B , τότε και ο B έχει γράψει στον A ;
 - (β) δεν υπάρχει περιορισμός στο ποιος μπορεί να έχει γράψει σε ποιον;
2. Σχεδιάστε το γράφημα του Petersen (Παράδειγμα 3.1.2 (ε)).
3. Σε μια συνάντηση φοιτητών υποθέτουμε ότι αν ο A γνωρίζει τον B , τότε και ο B γνωρίζει τον A . Παρατηρήθηκε ότι αν δύο φοιτητές γνωρίζονται μεταξύ τους, τότε δεν έχουν κοινό γνωστό ενώ αν δύο φοιτητές δε γνωρίζονται μεταξύ τους, τότε έχουν ακριβώς δύο κοινούς γνωστούς. Δείξτε ότι όλοι οι φοιτητές έχουν το ίδιο πλήθος γνωστών.
4. Για τυχαίο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P συμβολίζουμε με $\text{inc}(P)$ το απλό γράφημα στο σύνολο κορυφών P στο οποίο δύο κορυφές $x, y \in P$ συνδέονται με ακμή αν και μόνο αν τα x, y είναι μη συγκρίσιμα στοιχεία του P (δηλαδή δεν ισχύει $x \preceq y$, ή $y \preceq x$, όπου \preceq είναι η μερική διάταξη στο P). Για καθένα από τα παρακάτω απλά γραφήματα G , αποφανθείτε αν υπάρχει μερικώς διατεταγμένο σύνολο P τέτοιο ώστε $\text{inc}(P) = G$:
 - (α) Το γράφημα στο σύνολο κορυφών $[n]$ με κενό σύνολο ακμών.
 - (β) Το πλήρες γράφημα K_n .
 - (γ) Το πλήρες διμερές γράφημα $K_{m,n}$.
 - (δ) Το μονοπάτι μήκους $n - 1$.
 - (ε) Ο κύκλος μήκους 6.
5.
 - (α) Σχεδιάστε ένα απλό γράφημα με πέντε κορυφές, οι οποίες να έχουν βαθμούς 3, 3, 2, 2 και 2.
 - (β) Έστω απλό γράφημα G με τουλάχιστον δύο κορυφές. Δείξτε ότι υπάρχουν δύο κορυφές του G που έχουν τον ίδιο βαθμό.
 - (γ) Έστω απλό γράφημα G με $2m + 1$ κορυφές, η καθεμιά από τις οποίες έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του m . Δείξτε ότι το G είναι συνεκτικό.
 - (δ) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι υπάρχει απλό, μη συνεκτικό γράφημα με $2m + 2$ κορυφές, η καθεμιά από τις οποίες έχει βαθμό ίσο με m .
6. Έστω ακέραιος $n \geq 2$.

- (α) Δείξτε ότι κάθε απλό γράφημα G με n κορυφές και περισσότερες από $(n-1)(n-2)/2$ ακμές είναι συνεκτικό.
- (β) Δώστε ένα παράδειγμα μη συνεκτικού απλού γραφήματος, το οποίο έχει n κορυφές και $(n-1)(n-2)/2$ ακμές.
7. Έστω G ένα απλό συνεκτικό γράφημα με n κορυφές.
- (α) Αν το G είναι k -συνεκτικό, δείξτε ότι κάθε κορυφή του G έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του k και συνάγετε ότι το πλήθος των ακμών του G είναι μεγαλύτερο ή ίσο από $kn/2$.
- (β) Αν κάθε κορυφή του G έχει βαθμό ίσο με 2, δείξτε ότι το G είναι διπλά συνεκτικό.
- (γ) Αν το G είναι διπλά συνεκτικό και κάθε κορυφή του έχει βαθμό ίσο με 3, είναι υποχρεωτικά το G τριπλά συνεκτικό;
8. Έστω γράφημα G χωρίς απομονωμένες κορυφές. Ένας περίπατος w στο G λέγεται *περίπατος του Euler* αν κάθε ακμή του G εμφανίζεται στον w ακριβώς μία φορά.
- (α) Δείξτε ότι υπάρχει περίπατος του Euler στο G αν και μόνο αν το G είναι συνεκτικό και έχει είτε καμία, είτε ακριβώς δύο περιττές κορυφές.
- (β) Δείξτε ότι υπάρχει κλειστός περίπατος του Euler στο G αν και μόνο αν το G είναι συνεκτικό και όλες οι κορυφές του είναι άρτιες.
9. Έστω G συνεκτικό γράφημα. Δείξτε ότι υπάρχει κλειστός περίπατος στο G στον οποίο κάθε ακμή του G εμφανίζεται ακριβώς δύο φορές.
10. Έστω G_n το απλό γράφημα στο σύνολο κορυφών $\{0, 1\}^n$, στο οποίο δύο κορυφές συνδέονται με ακμή αν διαφέρουν σε μία ακριβώς συντεταγμένη. Για παράδειγμα, το G_2 είναι ισόμορφο με τον κύκλο μήκους 4.
- (α) Σχεδιάστε το γράφημα G_3 .
- (β) Πόσες κορυφές και πόσες ακμές έχει το G_n ;
- (γ) Δείξτε ότι το G_n είναι n -συνεκτικό γράφημα για κάθε θετικό ακέραιο n .
11. Ένας κλειστός περίπατος w σε ένα γράφημα G λέγεται *κύκλος Hamilton* αν κάθε κορυφή του G εμφανίζεται ακριβώς μία φορά στον περίπατο που προκύπτει από τον w διαγράφοντας την τελική κορυφή και ακμή του. Για το γράφημα G_n της Άσκησης 10:
- (α) Βρείτε ένα κύκλο Hamilton για τα G_2 , G_3 και G_4 .
- (β) Δείξτε ότι το G_n έχει κύκλο Hamilton για κάθε $n \geq 1$.

12. Για θετικό ακέραιο n , έστω G_n το απλό γράφημα με κορυφές τις αναδιατάξεις του $[n]$ στο οποίο δύο αναδιατάξεις συνδέονται με ακμή αν η μια προκύπτει από την άλλη ανταλλάσσοντας τις θέσεις δύο διαδοχικών στοιχείων της. Για παράδειγμα, οι $(3, 1, 5, 4, 2)$ και $(3, 1, 4, 5, 2)$ συνδέονται με ακμή στο G_5 .
- Πόσες κορυφές και πόσες ακμές έχει το G_n ;
 - Σχεδιάστε το γράφημα G_3 .
 - Βρείτε ένα κύκλο Hamilton του G_4 .
 - Δείξτε ότι το G_n έχει κύκλο Hamilton για κάθε $n \geq 2$.
13. Έστω απλό γράφημα G με n κορυφές.
- Αν το G δεν περιέχει κύκλο ως υπογράφημα, δείξτε ότι το πλήθος των ακμών του G είναι μικρότερο ή ίσο του $n - 1$.
 - Δείξτε ότι το G είναι δένδρο αν και μόνο αν έχει ακριβώς $n - 1$ ακμές και δεν περιέχει κύκλο ως υπογράφημα.
14. Έστω απλό γράφημα $G = (V, E)$ και παράγον δένδρο $T = (V, F)$ αυτού. Έστω επίσης ακμή $e \in E \setminus F$.
- Δείξτε ότι υπάρχει ακμή $f \in F$, τέτοια ώστε το γράφημα που προκύπτει από το T προσθέτοντας την ακμή e και διαγράφοντας την f να είναι επίσης παράγον δένδρο του G .
 - Έστω παράγον δένδρο $T' = (V, F')$ του G με $e \in F'$. Δείξτε ότι υπάρχει ακμή $f \in F \setminus F'$, τέτοια ώστε το γράφημα που προκύπτει από το T προσθέτοντας την ακμή e και διαγράφοντας την f να είναι επίσης παράγον δένδρο του G .
15. Συμβολίζουμε με $\kappa(G)$ το πλήθος των παραγόντων δένδρων ενός (πεπερασμένου, συνεκτικού) απλού γραφήματος G .
- Δείξτε ότι $\kappa(G) = 1$ εάν και μόνο αν το G είναι δένδρο.
 - Δείξτε ότι δεν υπάρχει απλό γράφημα G με $\kappa(G) = 2$.
 - Δείξτε ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 3$ υπάρχει απλό γράφημα G με n κορυφές και $\kappa(G) = 3$.
16. Δίνονται απλό γράφημα $G = (V, E)$ και συνάρτηση $w : E \rightarrow [0, \infty)$. Θέτουμε $w(T) = \sum_{e \in F} w(e)$ για παράγον δένδρο $T = (V, F)$ του G . Έστω αναδιάταξη (e_1, e_2, \dots, e_m) του E με $w(e_1) \leq \dots \leq w(e_m)$. Θεωρούμε το παράγον υπογράφημα $T_0 = (V, F_0)$ του G που ορίζεται επαγωγικά θέτοντας $e_i \in F_0$, για $1 \leq i \leq m$, αν δεν υπάρχει μονοπάτι στο γράφημα $(V, \{e_1, e_2, \dots, e_{i-1}\} \cap F_0)$ τα άκρα του οποίου συμπίπτουν με τα άκρα της e_i .

- (α) Σχεδιάστε το T_0 αν $V = [9]$, $m = 12$ και $e_1 = \{1, 2\}$, $e_2 = \{2, 3\}$, $e_3 = \{2, 5\}$, $e_4 = \{4, 5\}$, $e_5 = \{1, 4\}$, $e_6 = \{5, 6\}$, $e_7 = \{3, 6\}$, $e_8 = \{5, 8\}$, $e_9 = \{7, 8\}$, $e_{10} = \{4, 7\}$, $e_{11} = \{8, 9\}$, $e_{12} = \{6, 9\}$.
- (β) Δείξτε ότι το T_0 είναι παράγον δένδρο του G και ότι ισχύει $w(T_0) \leq w(T)$ για κάθε παράγον δένδρο T του G .
17. Δάσος είναι ένα γράφημα κάθε συνεκτική συνιστώσα του οποίου είναι δένδρο. Δάσος με ρίζες είναι ένα δάσος κάθε συνεκτική συνιστώσα του οποίου είναι δένδρο με ρίζα.
- (α) Δείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς n^{n-1} δένδρα με ρίζα στο σύνολο κορυφών $[n]$.
- (β) Δείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς $(n+1)^{n-1}$ δάση με ρίζες στο σύνολο κορυφών $[n]$.
18. Για ένα δάσος F με ρίζες (βλέπε Άσκηση 17) στο σύνολο κορυφών $[n]$, συμβολίζουμε με $\mathcal{E}(F)$ το σύνολο των ζευγών (a, b) , όπου $\{a, b\}$ είναι ακμή του F και η b είναι γονέας της a στο αντίστοιχο δένδρο του F . Αποδείξτε το Θεώρημα Cayley-Sylvester απαριθμώντας με δύο διαφορετικούς τρόπους το σύνολο των ακολουθιών $(F_0, F_1, \dots, F_{n-1})$, όπου τα F_i είναι δάση με ρίζες στο σύνολο κορυφών $[n]$ και
- $$\emptyset = \mathcal{E}(F_0) \subset \mathcal{E}(F_1) \subset \dots \subset \mathcal{E}(F_{n-1}).$$
19. (α) Περιγράψτε μια 1-1 αντιστοιχία από το σύνολο των απεικονίσεων $f : [n] \rightarrow [n]$ στο σύνολο των τριάδων (T, r, s) , όπου T είναι δένδρο στο σύνολο κορυφών $[n]$ και $r, s \in [n]$.
- (β) Συνάγετε από το (α) το Θεώρημα Cayley-Sylvester.
20. Έστω φυσικοί αριθμοί n, m με $n \geq 1$. Δείξτε ότι το πλήθος των δένδρων στο σύνολο κορυφών $[n+m]$ για τα οποία οι κορυφές $n+1, n+2, \dots, n+m$ είναι φύλλα είναι ίσο με n^{n+m-2} .
21. Έστω $\varphi(T)$ το πλήθος των φύλλων τυχαίου δένδρου T . Υπολογίστε το μέσο όρο a_n των ακεραίων $\varphi(T)$, όταν το T διατρέχει όλα τα δένδρα στο σύνολο κορυφών $[n]$. Για $n = 4$, από τα 16 δένδρα στις κορυφές 1, 2, 3, 4, δώδεκα έχουν 2 φύλλα και τέσσερα έχουν 3 φύλλα, οπότε $a_4 = (12 \cdot 2 + 4 \cdot 3) / 16 = 9/4$.
22. Έστω π μια τυχαία διαμέριση του συνόλου $\{2, 3, \dots, n\}$ με k μέρη.
- (α) Δείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς n^{k-1} δένδρα T στο σύνολο κορυφών $[n]$ με ρίζα το 1, τέτοια ώστε δύο οποιαδήποτε στοιχεία του $\{2, 3, \dots, n\}$ που ανήκουν στο ίδιο μέρος της π να έχουν τον ίδιο γονέα στο δένδρο T .

- (β) Δείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς $\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$ δένδρα T στο σύνολο κορυφών $[n]$ με ρίζα το 1 με την εξής ιδιότητα: Δύο στοιχεία του $\{2, 3, \dots, n\}$ έχουν τον ίδιο γονέα στο δένδρο T αν και μόνο αν τα στοιχεία αυτά ανήκουν στο ίδιο μέρος της π .
- (γ) Για $n \geq 3$, υπολογίστε το πλήθος των δένδρων T στο σύνολο κορυφών $[n]$ με ρίζα το 1, τα οποία έχουν την εξής ιδιότητα: Οι μόνες διακεκριμένες κορυφές του T με κοινό γονέα είναι οι $n-1$ και n .
23. Έστω $g(n)$ το πλήθος των δένδρων T με ρίζα το 1 στο σύνολο κορυφών $[2n]$ με τις εξής ιδιότητες:
- (i) Οι άρτιοι ακέραιοι $2, 4, \dots, 2n$ είναι όλοι φύλλα του T .
- (ii) Δεν υπάρχει δείκτης $2 \leq k \leq n$ τέτοιος ώστε οι τρεις κορυφές $2k-2$, $2k-1$ και $2k$ να έχουν τον ίδιο γονέα στο T .

Δείξτε ότι $g(n) = (n^2 - 1)^{n-1}$ για κάθε $n \geq 2$.

24. Για $n \geq 2$ έστω μη αρνητικοί ακέραιοι r_0, r_1, \dots, r_{n-1} και έστω $A(r_0, \dots, r_{n-1})$ το σύνολο των δένδρων με ρίζα στο σύνολο κορυφών $[n]$, τα οποία έχουν ακριβώς r_i κορυφές με i διαδόχους για $0 \leq i \leq n-1$. Αν το $A(r_0, \dots, r_{n-1})$ δεν είναι κενό, δείξτε ότι
- (α) $r_0 + r_1 + \dots + r_{n-1} = n$,
- (β) $r_1 + 2r_2 + \dots + (n-1)r_{n-1} = n-1$,
- (γ)

$$\#A(r_0, \dots, r_{n-1}) = \frac{n!(n-1)!}{\prod_{i=0}^{n-1} (i!)^{r_i} r_i!}.$$

25. Μια μέρα η κυρία Ευτέρπη αγόρασε μια κότα. Η κότα έκανε δύο αβγά και μετά μαγειρεύτηκε για βραδινό. Όπως είναι γνωστό, από κάθε αβγό βγαίνει είτε μια κότα είτε ένας κόκορας. Κάθε κόκορας που βγήκε μαγειρεύτηκε αμέσως για βραδινό, ενώ κάθε κότα μαγειρεύτηκε αφού πρώτα έκανε δύο αβγά. Η διαδικασία συνεχίστηκε για αρκετό καιρό και έληξε φυσιολογικά όταν έμειναν μόνο κόκορες και μαγειρεύτηκαν όλοι για βραδινό. Αν συνολικά μαγειρεύτηκαν 2010 κόκορες, πόσες κότες μαγειρεύτηκαν;
26. Δείξτε ότι το πλήθος των επίπεδων μη επιγεγραμμένων δένδρων με ρίζα με $n+1$ κορυφές είναι ίσο με το πλήθος των δυαδικών επίπεδων μη επιγεγραμμένων δένδρων με ρίζα με n εσωτερικές κορυφές.

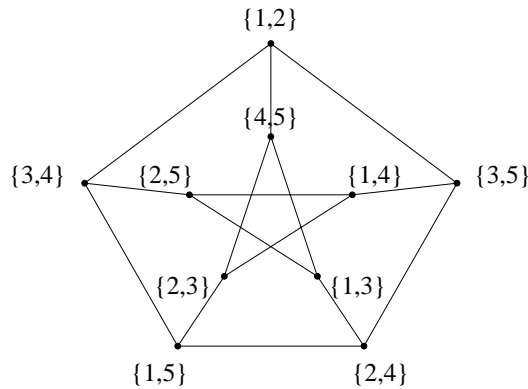
27. Δείξτε ότι οι κορυφές τυχαίου απλού (πεπερασμένου) γραφήματος μπορούν να χρωματιστούν με ένα από δύο χρώματα, άσπρο ή μαύρο, έτσι ώστε τουλάχιστον οι μισές από τις γειτονικές κορυφές οποιασδήποτε άσπρης (αντίστοιχα μαύρης) κορυφής να είναι μαύρες (αντίστοιχα άσπρες).
28. Υπολογίστε το χρωματικό αριθμό:
- (α) του γράφηματος που προκύπτει διαγράφοντας μια από τις ακμές του K_n ,
 - (β) του γραφήματος της Άσκησης 10,
 - (γ) του απλού γραφήματος με σύνολο κορυφών $[n]$, όπου $n \geq 3$, και ακμές τα σύνολα $\{i, j\} \subseteq [n]$ με $j - i = 1$ ή $2 \pmod{n}$.
29. Δίνεται πεπερασμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο (P, \preceq) .
- (α) Έστω G_P το απλό γράφημα στο σύνολο κορυφών P , οι ακμές του οποίου είναι τα ζεύγη $\{x, y\}$ στοιχείων του P με $x \prec y$. Δείξτε ότι $\chi(G_P) = \text{height}(P)$.
 - (β) Έστω G_n το απλό γράφημα το οποίο έχει κορυφές τα 2^n υποσύνολα του $[n]$ και ακμές τα ζεύγη υποσυνόλων $\{S, T\}$ με $S \subset T$. Συνάγετε ότι $\chi(G_n) = n + 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
30. Το επίπεδο χωρίζεται σε περιοχές από πεπερασμένους πλήθους ευθείες. Δείξτε ότι οι περιοχές αυτές μπορούν να χρωματιστούν με ένα από δύο χρώματα, έτσι ώστε περιοχές που συνορεύουν (δηλαδή που έχουν κάποιο ευθύγραμμο τμήμα κοινό στα σύνορά τους) να έχουν διαφορετικό χρώμα.
31. Δίνεται απλό γράφημα $G = (V, E)$ με n κορυφές. Συμβολίζουμε με $\alpha(G)$ το μέγιστο πλήθος στοιχείων ενός ανεξάρτητου υποσυνόλου του V (δηλαδή ενός υποσυνόλου του V που δεν περιέχει δύο γειτονικές κορυφές).
- (α) Δείξτε ότι $n/\alpha(G) \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$.
 - (β) Για τυχαίους θετικούς ακέραιους a, q με $a + q = n + 1$, δώστε παράδειγμα γραφήματος G με $\alpha(G) = a$ και $\chi(G) = q$.
 - (γ) Για τυχαίους θετικούς ακέραιους a, q με $aq = n$, δώστε παράδειγμα γραφήματος G με $\alpha(G) = a$ και $\chi(G) = q$.
32. Έστω n, k θετικοί ακέραιοι με $n \geq 2k$. Συμβολίζουμε με $\text{KG}_{n,k}$ το απλό γράφημα το οποίο έχει τα k -υποσύνολα του $[n]$ ως κορυφές και ακμή μεταξύ δύο κορυφών S και T αν $S \cap T = \emptyset$.
- (α) Δείξτε ότι $\chi(\text{KG}_{n,k}) \leq n - 2k + 2$.
 - (β) Δείξτε ότι $\chi(\text{KG}_{n,k}) = n - 2k + 2$.

33. Υπολογίστε το πλήθος των τέλειων ταιριασμάτων:
- (α) του πλήρους απλού γραφήματος K_n ,
 - (β) του πλήρους διμερούς απλού γραφήματος $K_{m,n}$.
34. Έστω άρτιος θετικός ακέραιος n .
- (α) Δώστε παράδειγμα απλού γραφήματος με n κορυφές και $(n-1)(n-2)/2$ ακμές το οποίο δεν έχει τέλειο ταιριασμα.
 - (β) Έστω ότι $n \in \{2, 4, 6, 8\}$. Δείξτε ότι κάθε απλό γράφημα με n κορυφές και περισσότερες από $(n-1)(n-2)/2$ ακμές έχει τέλειο ταιριασμα.
35. Έστω $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Σε ένα χωριό κάθε άνδρας γνωρίζει τουλάχιστον k γυναίκες και κάθε γυναίκα γνωρίζει το πολύ k άνδρες. Δείξτε ότι όλοι οι άνδρες μπορούν να παντρευτούν, ο καθένας με μία γυναίκα που γνωρίζει.
36. Σε ένα μεσαιωνικό χωριό υπάρχουν n άνδρες και m γυναίκες. Ένας δράκος έρχεται στο χωριό και αρπάζει μια από τις γυναίκες. Αν A_1, A_2, \dots, A_n είναι τα σύνολα των γυναικών που γνωρίζουν οι n άνδρες, αντίστοιχα, βρείτε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη στα σύνολα αυτά ώστε όποια γυναίκα και να έχει αρπάξει ο δράκος, να μπορούν οι άνδρες να παντρευτούν, ο καθένας με μία από τις γυναίκες που έμειναν που γνωρίζει.
37. Αν T είναι δένδρο με n κορυφές, δείξτε ότι $\chi_T(q) = q(q-1)^{n-1}$.
38. Έστω $\chi_n(q)$ το χρωματικό πολυώνυμο του κύκλου μήκους n . Δείξτε ότι
- $$\chi_n(q) = \begin{cases} (q-1)^n - q + 1, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός,} \\ (q-1)^n + q - 1, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος.} \end{cases}$$
39. (α) Δώστε παράδειγμα απλού γραφήματος G για το χρωματικό πολυώνυμο του οποίου ισχύει $\chi_G(q) = q(q-1)(q-2)^2(q-3)^3$.
- (β) Γενικότερα, για τυχαίους θετικούς ακραίους a_0, a_1, \dots, a_r , δείξτε ότι υπάρχει απλό γράφημα G με $\chi_G(q) = q^{a_0}(q-1)^{a_1}(q-2)^{a_2} \dots (q-r)^{a_r}$.
- (γ) Βρείτε όλα τα ζεύγη n, m φυσικών αριθμών για τα οποία υπάρχει απλό γράφημα G με $\chi_G(q) = q^n(q-2)^m$.
40. Ένα απλό γράφημα $G = (V, E)$ λέγεται *χορδικό* αν δεν υπάρχει $U \subseteq V$ τέτοιο ώστε το επαγόμενο υπογράφημα του G στο σύνολο κορυφών U να είναι ισόμορφο με κύκλο μήκους μεγαλύτερου του 3. Έστω n το πλήθος των κορυφών του G .

- (α) Δείξτε ότι το γράφημα G είναι χορδικό αν και μόνο αν υπάρχει αναδιάταξη (v_1, v_2, \dots, v_n) του V με την εξής ιδιότητα: αν $1 \leq i < j < k \leq n$ και $\{v_i, v_k\}, \{v_j, v_k\} \in E$, τότε $\{v_i, v_j\} \in E$.
- (β) Δείξτε ότι αν το G είναι χορδικό, τότε υπάρχουν μη αρνητικοί ακέραιοι e_1, e_2, \dots, e_n τέτοιοι ώστε $\chi_G(q) = (q - e_1)(q - e_2) \cdots (q - e_n)$.
41. Έστω $\chi_G(q) = \sum_{i=0}^n a_i q^{n-i}$ το χρωματικό πολυώνυμο ενός απλού γραφήματος G με n κορυφές, όπου $a_0 = 1$ και $a_n = 0$.
- (α) Δείξτε ότι $(-1)^i a_i \geq 0$ για κάθε i .
- (β) Δείξτε ότι το G είναι συνεκτικό αν και μόνο αν $a_{n-1} \neq 0$.
- (γ) Βρείτε μια συνδυαστική ερμηνεία για το $(-1)^i a_i$.
42. Είναι το γράφημα του Petersen (Παράδειγμα 3.1.2 (ε)) επιπεδικό;
43. Δείξτε ότι κάθε απλό επιπεδικό γράφημα με περισσότερες από μία κορυφές έχει τουλάχιστον δύο κορυφές βαθμού μικρότερου ή ίσου του 5.
44. (α) Αν G είναι απλό επιπεδικό γράφημα κάθε κορυφή του οποίου έχει βαθμό το πολύ 4, δείξτε ότι $\chi(G) \leq 4$.
- (β) Δείξτε με παράδειγμα ότι το (α) δεν ισχύει χωρίς την υπόθεση ότι το G είναι επιπεδικό.

Υποδείξεις - Λύσεις

- (α) Όχι. Αν αυτό ήταν δυνατό, τότε το γράφημα που έχει ως κορυφές τους φοιτητές και μια ακμή μεταξύ κάθε δύο φοιτητών που έχουν αλληλογραφήσει μεταξύ τους θα είχε έντεκα κορυφές και καθεμιά από αυτές θα είχε βαθμό 3, πράγμα αδύνατο σύμφωνα με το Πρόσχημα 3.1.1.
(β) Αυτό είναι δυνατό. Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι οι φοιτητές είναι καθισμένοι σε ένα κυκλικό τραπέζι, τότε μπορεί ο κάθε φοιτητής να γράψει γράμματα στους τρεις που τον διαδέχονται κατά την κατεύθυνση της φοράς των δεικτών του ρολογιού και να λάβει γράμματα από τους τρεις που προηγούνται.
- Δείτε το Σχήμα 3.19.



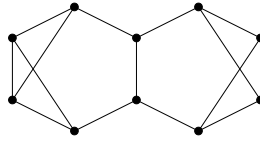
Σχήμα 3.19: Το γράφημα του Petersen.

- Έστω n το πλήθος των φοιτητών και έστω A ένας από αυτούς. Έστω ότι ο A έχει k γνωστούς, τους A_1, A_2, \dots, A_k . Για $1 \leq i < j \leq k$, οι A_i και A_j έχουν κοινό γνωστό τον A . Από την υπόθεση του προβλήματος συμπεραίνουμε ότι οι A_i και A_j δε γνωρίζονται μεταξύ τους και ότι έχουν ακριβώς έναν ακόμη κοινό γνωστό, έστω τον A_{ij} . Αφού οι A_1, A_2, \dots, A_k ανά δύο δε γνωρίζονται μεταξύ τους, ο A_{ij} δεν είναι ένας από αυτούς. Επίσης οι A_{ij} και $A_{i'j'}$ δεν μπορούν να ταυτίζονται για διαφορετικά ζεύγη $i < j$ και $i' < j'$, διότι τότε ο A και ο A_{ij} θα είχαν τουλάχιστον τρεις κοινούς γνωστούς, συγκεκριμένα τα στοιχεία του συνόλου $\{A_i, A_j, A_{i'}, A_{j'}\}$. Τέλος, οι A, A_1, A_2, \dots, A_k και A_{ij} είναι όλοι οι φοιτητές διότι κάθε φοιτητής B διάφορος του A είτε γνωρίζει τον A , οπότε είναι ένας από τους A_i , είτε όχι, οπότε έχει ακριβώς δύο κοινούς γνωστούς με τον A και είναι ένας από τους A_{ij} . Έπεται ότι

$$n = 1 + k + \frac{k(k-1)}{2}$$

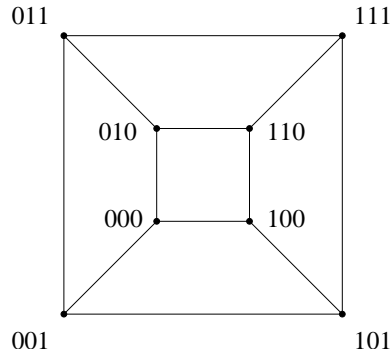
και επομένως ότι $k = (\sqrt{8n-7} - 1)/2$. Δείξαμε ότι ένας οποιοσδήποτε από τους n φοιτητές έχει $(\sqrt{8n-7} - 1)/2$ γνωστούς. Συνεπώς όλοι τους έχουν το ίδιο πλήθος γνωστών.

4. (α-δ) Τέτοιο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P υπάρχει. Για τα (α) – (γ) αρκεί να ορίσει κανείς το P ως οποιαδήποτε αλυσίδα στο σύνολο $[n]$, ως την αντιαλυσίδα στο σύνολο $[n]$ και ως την ξένη ένωση δύο αλυσίδων, μίας με m και μίας με n στοιχεία, αντίστοιχα. Για το (δ) αρκεί να θεωρήσει κανείς τη μερική διάταξη \preceq στο σύνολο $[n]$ η οποία ορίζεται θέτοντας $a \preceq b$ αν $b - a \in \{0, 2, 3, \dots\}$, για $a, b \in [n]$.
- (ε) Δεν υπάρχει τέτοιο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P . Πράγματι, ας υποθέσουμε αντιθέτως ότι $G = \text{inc}(P)$ για κάποιο P , όπου G είναι ο κύκλος στο σύνολο κορυφών $\{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ με ακμές $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_6, v_1\}$. Θεωρούμε τα σύνολα $A = \{v_1, v_3, v_5\}$ και $B = \{v_2, v_4, v_6\}$. Αφού καθένα από τα σύνολα αυτά αποτελείται από στοιχεία που ανά δύο δε συνδέονται με ακμή στο G , άρα από στοιχεία που ανά δύο είναι συγκρίσιμα στο P , τα A και B είναι αλυσίδες του P . Επιπλέον, κάθε στοιχείο του A συνδέεται με ακμή με ακριβώς δύο στοιχεία του B και συνεπώς είναι συγκρίσιμο με ακριβώς ένα στοιχείο του B . Ομοίως, κάθε στοιχείο του B είναι συγκρίσιμο με ακριβώς ένα στοιχείο του A . Αφήνεται στον αναγνώστη να επαληθεύσει ότι δεν υπάρχει μερικώς διατεταγμένο σύνολο P με τις παραπάνω ιδιότητες.
5. Για το (α) παρατηρούμε ότι ένας κύκλος μήκους 5 με μια επιπλέον ακμή σχηματίζει ένα απλό γράφημα με πέντε κορυφές, δύο βαθμού 3 και τρεις βαθμού 2, και έξι ακμές. Η πρόταση στο (β) είναι αναδιατύπωση του Παραδείγματος 2.1.2 του Κεφαλαίου 2. Για το (γ), θεωρούμε δύο τυχαίες κορυφές u, v του G . Θα δείξουμε ότι υπάρχει περίπατος μεταξύ των u και v στο G μήκους το πολύ 2. Αν οι u και v συνδέονται με ακμή στο G , τότε ο ισχυρισμός μας είναι φανερός. Αν όχι, τότε καθεμιά από τις u, v έχει τουλάχιστον m γειτονικές κορυφές μεταξύ των $2m - 1$ κορυφών του G εκτός των u, v . Κατά συνέπεια, οι u και v έχουν τουλάχιστον μία κοινή γειτονική κορυφή και συνεπώς υπάρχει περίπατος μεταξύ των u και v στο G μήκους 2. Για το (δ) παρατηρούμε ότι ένα γράφημα με δύο συνεκτικές συνιστώσες, καθεμιά από τις οποίες είναι ισόμορφη με το πλήρες γράφημα με $m + 1$ κορυφές, έχει τις επιθυμητές ιδιότητες.
6. (α) Έστω $G = (V, E)$ και έστω \bar{G} το απλό γράφημα στο σύνολο κορυφών V με ακμές τα ζεύγη των κορυφών που δεν ανήκουν στο E . Από την υπόθεση προκύπτει ότι το \bar{G} έχει λιγότερες από $n - 1$ ακμές και συνεπώς, σύμφωνα με το Πρόγραμμα 3.3.1 (α), το \bar{G} δεν είναι συνεκτικό. Με άλλα λόγια υπάρχει διαμέριση $V = V_1 \cup V_2$ του V , τέτοια ώστε καμιά κορυφή του V_1 να μη συνδέεται με κορυφή του V_2 στο \bar{G} . Ισοδύναμα, κάθε κορυφή του V_1 συνδέεται με κάθε κορυφή του V_2 στο G . Κατά συνέπεια, δύο τυχαία στοιχεία του V συνδέονται με μονοπάτι μήκους το πολύ δύο στο G και επομένως το G είναι συνεκτικό.
- (β) Τέτοιο παράδειγμα είναι κάθε απλό γράφημα με n κορυφές, στο οποίο μία από αυτές είναι απομονωμένη κορυφή και οποιεσδήποτε δύο από τις υπόλοιπες συνδέονται με ακμή.
7. Διαγράφοντας όλες τις γειτονικές κορυφές μιας κορυφής v του G προκύπτει γράφημα το οποίο είτε είναι μη συνεκτικό, είτε έχει μία μόνο κορυφή. Επομένως, αν το G είναι k -συνεκτικό, τότε κάθε κορυφή του έχει τουλάχιστον k γειτονικές κορυφές. Ο ισχυρισμός στο (α) για το πλήθος των ακμών είναι άμεση συνέπεια. Για το (β), δείξτε ότι κάθε γράφημα με τις δοσμένες ιδιότητες είναι ισόμορφο με τον κύκλο μήκους n . Όπως φαίνεται από το παράδειγμα του Σχήματος 3.20, η απάντηση στο (γ) είναι αρνητική.



Σχήμα 3.20: Ένα 2-συνεκτικό αλλά όχι 3-συνεκτικό γράφημα.

8. Η πρόταση αυτή οφείλεται στον Euler. Είναι φανερό ότι αν υπάρχει περίπατος (αντίστοιχα, κλειστός περίπατος) του Euler στο G , τότε το G είναι συνεκτικό και οι βαθμοί των κορυφών του είναι όπως στο (α) (αντίστοιχα, στο (β)). Θα αποδείξουμε το αντίστροφο. Το ζητούμενο στο μέρος (β) προκύπτει από εκείνο στο (α) διαγράφοντας μια τυχαία ακμή του G . Για τον ίδιο λόγο, στο (α) μπορούμε να υποθέσουμε ότι το G έχει ακριβώς δύο περιττές κορυφές, έστω u και v . Θα δείξουμε ότι υπάρχει περίπατος του Euler στο G με αρχή u και πέρας v . Αφού το G είναι συνεκτικό, υπάρχει περίπατος στο G με αρχή u και πέρας v , στον οποίο κάθε ακμή του G εμφανίζεται το πολύ μία φορά (οποιοδήποτε μονοπάτι στο G με αρχή u και πέρας v έχει αυτή την ιδιότητα). Από όλους αυτούς τους περιπάτους (οι οποίοι είναι πεπερασμένοι σε πλήθος) επιλέγουμε έναν, έστω w , με το μέγιστο δυνατό μήκος. Ισχυριζόμαστε ότι κάθε ακμή του G εμφανίζεται στον w , οπότε ο w είναι ο ζητούμενος περίπατος του Euler. Πράγματι, αν όχι, τότε λόγω της συνεκτικότητας του G , υπάρχει ακμή e_1 του G που δεν είναι ακμή του w , το ένα τουλάχιστον άκρο της οποίας, έστω v_0 , είναι κορυφή του w . Αν η e_1 είναι θυλιά, τότε μπορούμε να προσθέσουμε κατάλληλα το ζεύγος (e_1, v_0) στον w και να πάρουμε έναν περίπατο μεγαλύτερου μήκους στο G με αρχή u και πέρας v , σε αντίθεση με την επιλογή του w . Έστω ότι η e_1 δεν είναι θυλιά και έστω v_1 το άλλο της άκρο. Αφού οι κορυφές του G εκτός των u, v έχουν άρτιο βαθμό και οι u, v έχουν περιττό βαθμό, υπάρχει ακμή $e_2 \neq e_1$ με άκρο v_1 η οποία δεν είναι θυλιά και δεν είναι ακμή του w . Ονομάζουμε v_2 το άλλο άκρο της e_2 και συνεχίζουμε παρόμοια έως ότου φτάσουμε πίσω στην κορυφή v_0 με περίπατο που χρησιμοποιεί νέες ακμές του G . Προσθέτοντας κατάλληλα τον κλειστό αυτό περίπατο με αρχή και πέρας v_0 στον w , βρίσκουμε περίπατο στο G μήκους μεγαλύτερου του w με αρχή u και πέρας v , ο οποίος χρησιμοποιεί κάθε ακμή του G το πολύ μία φορά, σε αντίθεση με την επιλογή του w . Οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη.
9. Έστω G' το γράφημα που προκύπτει από το G προσθέτοντας για κάθε ακμή e του G ένα αντίγραφο e' της e με τα ίδια άκρα. Το G' είναι ασφαλώς συνεκτικό. Παρατηρούμε ότι ο βαθμός τυχαίας κορυφής του G' είναι διπλάσιος από το βαθμό της ίδιας κορυφής στο G και συνεπώς άρτιος αριθμός. Από το μέρος (β) της Άσκησης 8 προκύπτει ότι το G' έχει κλειστό περίπατο Euler. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κλειστός περίπατος στο G που διασχίζει κάθε ακμή του G ακριβώς δύο φορές.
10. (α) Το γράφημα G_3 απεικονίζεται στο Σχήμα 3.21. (β) Προφανώς, το πλήθος των κορυφών του G_n είναι ίσο με 2^n . Επίσης, κάθε κορυφή του G_n έχει βαθμό n και συνεπώς το πλήθος των ακμών του G_n είναι ίσο με $n2^{n-1}$.
(γ) Θα δείξουμε ότι το G_n είναι n -συνεκτικό με επαγωγή στο n . Αυτό είναι φανερό για $n = 1$. Υποθέτοντας ότι $n \geq 2$, θεωρούμε τυχαίο υποσύνολο N του συνόλου $\{0, 1\}^n$ των κορυφών του G_n με λιγότερα από n στοιχεία και συμβολίζουμε με $G_n \setminus N$



Σχήμα 3.21: Το γράφημα του τρισδιάστατου κύβου.

το επαγόμενο γράφημα του G_n στο σύνολο κορυφών $\{0, 1\}^n \setminus N$. Θα δείξουμε ότι δύο τυχαίες κορυφές $u = (u_1, \dots, u_n)$ και $v = (v_1, \dots, v_n)$ του G_n που δεν ανήκουν στο N συνδέονται με περίπατο στο $G_n \setminus N$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: (i) $u_i \neq v_i$ για $1 \leq i \leq n$. Δεν είναι δύσκολο να κατασκευάσει κανείς n μονοπάτια στο G_n με αρχή u και πέρας v , τα οποία ανά δύο να μην έχουν κοινή κορυφή εκτός των u και v . Για παράδειγμα, αν $n = 3$ και $u = (0, 0, 0)$, $v = (1, 1, 1)$, τέτοια μονοπάτια είναι αυτά με διαδοχικές κορυφές

$$\begin{array}{cccc} (0, 0, 0) & (1, 0, 0) & (1, 1, 0) & (1, 1, 1) \\ (0, 0, 0) & (0, 1, 0) & (0, 1, 1) & (1, 1, 1) \\ (0, 0, 0) & (0, 0, 1) & (1, 0, 1) & (1, 1, 1). \end{array}$$

Αφού το N έχει λιγότερα από n στοιχεία, τουλάχιστον ένα από τα μονοπάτια αυτά είναι και μονοπάτι στο γράφημα $G_n \setminus N$. (ii) $u_i = v_i$ για κάποιο δείκτη $1 \leq i \leq n$, έστω π.χ. ότι $u_n = v_n = 0$. Συμβολίζουμε με H_n (αντίστοιχα, \tilde{H}_n) το επαγόμενο υπογράφημα του G_n στο σύνολο κορυφών $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$ με $\varepsilon_n = 0$ (αντίστοιχα, $\varepsilon_n = 1$). Παρατηρούμε ότι το H_n (καθώς και το \tilde{H}_n) είναι ισόμορφο με το G_{n-1} . Επομένως, το ζητούμενο προκύπτει εφαρμόζοντας την υπόθεση της επαγωγής στο γράφημα H_n αν λιγότερα από $n - 1$ στοιχεία του N είναι κορυφές του H_n . Διαφορετικά, όλα τα στοιχεία του N είναι κορυφές του H_n . Παρατηρώντας ότι καθεμιά από τις u και v συνδέεται μέσω ακμής του G_n με μοναδική κορυφή του \tilde{H}_n , το ζητούμενο στην περίπτωση αυτή προκύπτει από τη συνεκτικότητα του H_n .

11. Ένας κύκλος Hamilton του G_2 είναι αυτός με διαδοχικές κορυφές $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$ και $(0, 0)$. Από αυτόν προκύπτει ο κύκλος Hamilton του G_3 με διαδοχικές κορυφές $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 0, 1)$ και $(0, 0, 0)$. Για τη γενική περίπτωση, αφήνεται στον αναγνώστη να επαληθεύσει ότι αν $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, \alpha_m = \alpha_0$ είναι οι διαδοχικές κορυφές ενός κύκλου Hamilton του G_{n-1} , τότε $(\alpha_0, 0)$, $(\alpha_1, 0), \dots, (\alpha_{m-1}, 0)$, $(\alpha_{m-1}, 1), \dots, (\alpha_1, 1)$, $(\alpha_0, 1)$, $(\alpha_0, 0)$ είναι οι διαδοχικές κορυφές ενός κύκλου Hamilton του G_n . Επομένως, η ύπαρξη κύκλου Hamilton του G_n για $n \geq 2$ προκύπτει με επαγωγή στο n .

12. Προφανώς το G_n έχει $n!$ κορυφές. Επίσης, κάθε κορυφή του G_n έχει βαθμό $n-1$ και συνεπώς το πλήθος των ακμών του G_n είναι ίσο με $(n-1)n!/2$. Το G_3 είναι κύκλος με διαδοχικές κορυφές $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$, $(2, 3, 1)$ και $(2, 1, 3)$. Ένας κύκλος Hamilton του G_4 είναι αυτός που περνά διαδοχικά από τις κορυφές

$(1, 2, 3, 4)$	$(1, 3, 4, 2)$	$(4, 3, 2, 1)$	$(2, 4, 3, 1)$
$(1, 2, 4, 3)$	$(1, 3, 2, 4)$	$(3, 4, 2, 1)$	$(4, 2, 3, 1)$
$(1, 4, 2, 3)$	$(3, 1, 2, 4)$	$(3, 2, 4, 1)$	$(4, 2, 1, 3)$
$(4, 1, 2, 3)$	$(3, 1, 4, 2)$	$(3, 2, 1, 4)$	$(2, 4, 1, 3)$
$(4, 1, 3, 2)$	$(3, 4, 1, 2)$	$(2, 3, 1, 4)$	$(2, 1, 4, 3)$
$(1, 4, 3, 2)$	$(4, 3, 1, 2)$	$(2, 3, 4, 1)$	$(2, 1, 3, 4)$

και $(1, 2, 3, 4)$ του G_4 , ξεκινώντας από πάνω προς τα κάτω με τις κορυφές της πρώτης στήλης και συνεχίζοντας όμοια με τη δεύτερη, τρίτη και τέταρτη στήλη. Αφήνεται στον αναγνώστη να γενικεύσει την παραπάνω κατασκευή για τυχαίο $n \geq 2$.

13. Έστω ότι $G = (V, E)$.

(α) Υποθέτουμε ότι το G δεν περιέχει κύκλο (ως υπογράφημα) και θεωρούμε ένα απλό υπεργράφημα $G' = (V, E')$ του G (δηλαδή απλό γράφημα με $E \subseteq E'$) στο σύνολο κορυφών V με το μέγιστο δυνατό πλήθος ακμών, το οποίο δεν περιέχει κύκλο. Παρατηρούμε ότι αν οι κορυφές $a, b \in V$ ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του G' , τότε το υπεργράφημα $(V, E' \cup \{a, b\})$ του G επίσης δεν περιέχει κύκλο (εξηγήστε γιατί) και έχει μία ακμή παραπάνω από το G' . Από την υπόθεσή μας για το G' προκύπτει ότι δεν υπάρχουν τέτοιες κορυφές και συνεπώς ότι το G' είναι συνεκτικό. Άρα, το G' είναι δένδρο και επομένως έχει ακριβώς $n-1$ ακμές, οπότε $\#E \leq \#E' = n-1$.

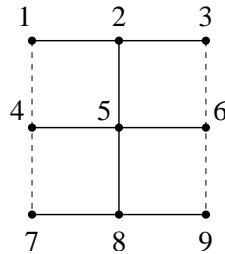
(β) Αν το G είναι δένδρο, τότε το G έχει τις ζητούμενες ιδιότητες (Πόρισμα 3.3.1). Το αντίστροφο προκύπτει είτε από την απόδειξη του (α), είτε με επαγωγή στο n αν χρησιμοποιήσει κανείς το Λήμμα 3.3.1 και μιμηθεί την απόδειξη του Πορίσματος 3.3.1 (β).

14. Έστω n το πλήθος των κορυφών του G . Παρατηρούμε ότι το γράφημα $(V, F \cup \{e\})$ έχει n ακμές και συνεπώς (Πόρισμα 3.3.1 (β)) δεν είναι δένδρο. Αφού το γράφημα αυτό είναι προφανώς συνεκτικό, θα πρέπει να περιέχει κύκλο C ως υπογράφημα. Διαγράφοντας οποιαδήποτε ακμή f του C διάφορη της e προκύπτει συνεκτικό παράγον υπογράφημα του G με $n-1$ ακμές, άρα παράγον δένδρο του G με τις επιθυμητές ιδιότητες. Αυτό αποδεικνύει το (α). Για το (β) παρατηρούμε ότι στον προηγούμενο συλλογισμό δεν είναι δυνατόν όλες οι ακμές του C να είναι ακμές του T' . Επομένως μπορούμε να επιλέξουμε την f έτσι ώστε $f \notin F'$.

15. Είναι φανερό ότι ισχύει $\kappa(T) = 1$ για κάθε δένδρο T . Παρατηρούμε επίσης ότι ισχύει $\kappa(G) = 3$ για κάθε γράφημα G το οποίο προκύπτει από ένα μονοπάτι P με $n \geq 3$ κορυφές, προσθέτοντας μια ακμή που να συνδέει τις δύο γειτονικές κορυφές κάποιας από τις κορυφές βαθμού δύο του P . Μένει να δείξουμε ότι $\kappa(G) \geq 3$ για κάθε απλό συνεκτικό γράφημα G το οποίο δεν είναι δένδρο. Θα χρησιμοποιήσουμε την εξής βοηθητική πρόταση. Αν G είναι απλό συνεκτικό γράφημα και F_0 είναι υποσύνολο του συνόλου των ακμών του G που δεν περιέχει κύκλο, τότε υπάρχει παράγον δένδρο

του G , το σύνολο των ακμών του οποίου περιέχει το F_0 . Η απόδειξη της πρότασης αυτής είναι παρόμοια με εκείνη της Πρότασης 3.3.1 και παραλείπεται. Έστω τώρα ένα απλό συνεκτικό γράφημα G το οποίο δεν είναι δένδρο. Γνωρίζουμε ότι το G περιέχει κάποιον κύκλο ως υπογράφημα. Έστω F το σύνολο των ακμών ενός τέτοιου κύκλου. Από τη βοηθητική μας πρόταση προκύπτει ότι για κάθε $e \in F$ υπάρχει παράγον δένδρο T_e του G , το σύνολο των ακμών του οποίου περιέχει το $F \setminus \{e\}$. Προφανώς το T_e δεν περιέχει την ακμή $e \in F$. Επομένως, τα παράγοντα δένδρα T_e του G είναι ανά δύο διαφορετικά και συνεπώς τόσα, όσα και τα στοιχεία του F . Αφού κάθε κύκλος περιέχει τρεις τουλάχιστον ακμές, έπεται ότι $\kappa(G) \geq 3$, όπως το θέλαμε.

16. (α) Το δένδρο T_0 απεικονίζεται στο Σχήμα 3.22 (με διακεκομμένες γραμμές απεικονίζονται οι ακμές του G που δεν είναι ακμές του T_0).



Σχήμα 3.22: Το βέλτιστο παράγον δένδρο.

(β) Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι το T_0 είναι παράγον δένδρο του G . Για τυχαίο παράγον δένδρο $T = (V, F)$ του G , θα δείξουμε ότι $w(T_0) \leq w(T)$ με επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του $F_0 \setminus F$. Αν το τελευταίο είναι ίσο με μηδέν, τότε $T_0 = T$ και το ζητούμενο ισχύει. Διαφορετικά, θεωρούμε τον ελάχιστο δείκτη $i \in [m]$ με $e_i \in F_0 \setminus F$. Από την Άσκηση 14 προκύπτει ότι υπάρχει ακμή $e_j \in F \setminus F_0$ τέτοια ώστε το γράφημα $T' = (V, (F \setminus \{e_j\}) \cup \{e_i\})$ να είναι παράγον δένδρο του G . Θα δείξουμε ότι $i < j$. Ας υποθέσουμε, αντιθέτως, ότι ισχύει $j < i$. Από την επιλογή του δείκτη i έχουμε $\{e_1, e_2, \dots, e_j\} \cap F_0 \subseteq F$. Από αυτό και το γεγονός ότι το T είναι δένδρο συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει κύκλος του G , το σύνολο των ακμών του οποίου περιέχεται στο $\{e_1, e_2, \dots, e_j\} \cap F_0$. Από τον ορισμό του T_0 έπεται ότι $e_j \in F_0$, σε αντίθεση με την επιλογή της e_j . Αυτή η αντίφαση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $i < j$. Κατά συνέπεια έχουμε $w(e_i) \leq w(e_j)$, οπότε $w(T') \leq w(T)$. Από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε επίσης $w(T_0) \leq w(T')$. Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι $w(T_0) \leq w(T)$, το οποίο ολοκληρώνει την επαγωγή. Το δένδρο T_0 αναφέρεται ως το βέλτιστο παράγον δένδρο του G ως προς τη συνάρτηση βαρών $w : E \rightarrow [0, \infty)$ και την αναδιάταξη (e_1, e_2, \dots, e_m) . Η μέθοδος κατασκευής του T_0 στην εκφώνηση της άσκησης είναι γνωστή ως αλγόριθμος του *Kruskal*.

17. (α) Υπάρχουν n^{n-2} δένδρα στο σύνολο κορυφών $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ και n τρόποι να επιλέξουμε μια ρίζα για καθένα από αυτά. Συνεπώς υπάρχουν n^{n-1} δένδρα με ρίζα στο σύνολο κορυφών $[n]$.

(β) Έστω A_n το σύνολο των δασών με ρίζες στο σύνολο κορυφών $[n]$ και έστω B_n το σύνολο των δένδρων στο σύνολο κορυφών $\{0, 1, \dots, n\}$. Από το Θεώρημα 3.3.1 έχουμε $\#B_n = (n+1)^{n-1}$. Για $F \in A_n$, έστω $\varphi(F)$ το γράφημα στο σύνολο κορυφών $\{0, 1, \dots, n\}$ που προκύπτει από το δάσος F προσθέτοντας τη νέα κορυφή 0 και ακμές που να συνδέουν το 0 με τις ρίζες των δένδρων του F (μια ακμή για κάθε ρίζα). Παρατηρούμε ότι $\varphi(F) \in B_n$ και ότι η απεικόνιση $\varphi : A_n \rightarrow B_n$ είναι αμφιμονοσήμαντη, με αντίστροφη την απεικόνιση $\psi : B_n \rightarrow A_n$ για την οποία $\psi(T)$ είναι το δάσος στο σύνολο κορυφών $[n]$ που προκύπτει από το $T \in B_n$ διαγράφοντας την κορυφή 0 και τις ακμές με άκρο 0 και θέτοντας ως ρίζες του $\psi(T)$ τις γειτονικές κορυφές του 0 στο T . Έπεται ότι $\#A_n = \#B_n = (n+1)^{n-1}$.

18. Έστω $r(n)$ το πλήθος των δένδρων με ρίζα στο σύνολο κορυφών $[n]$ και έστω A_n το σύνολο των ακολουθιών $(F_0, F_1, \dots, F_{n-1})$ στην εκφώνηση της άσκησης. Αφού ένα δάσος με n κορυφές έχει το πολύ $n-1$ ακμές, για κάθε τέτοια ακολουθία ισχύει $\#\mathcal{E}(F_i) = i$ για $0 \leq i \leq n-1$ και συνεπώς το F_{n-1} είναι δένδρο με ρίζα. Παρατηρούμε ότι $\#A_n = r(n)(n-1)!$ διότι υπάρχουν $r(n)$ τρόποι να επιλεγεί το δένδρο με ρίζα F_{n-1} και $(n-1)!$ τρόποι να διαγραφούν διαδοχικά οι $n-1$ ακμές του, ώστε να προκύψουν τα F_{n-2}, \dots, F_1, F_0 . Παρατηρούμε επίσης ότι για $1 \leq i \leq n-1$ έχουμε $\mathcal{E}(F_i) = \mathcal{E}(F_{i-1}) \cup \{(a, b)\}$, όπου a είναι υποχρεωτικά μια από τις $n-i+1$ ρίζες του F_{i-1} και b είναι κορυφή που δεν ανήκει στο ίδιο δένδρο με την a . Δοσμένου του δάσους F_{i-1} , υπάρχουν n τρόποι να επιλεγεί η κορυφή b και $n-i$ τρόποι να επιλεγεί η ρίζα a του F_{i-1} για να προκύψει το δάσος F_i . Κατά συνέπεια ισχύει

$$\#A_n = \prod_{i=1}^{n-1} n(n-i) = n^{n-1}(n-1)!.$$

Προκύπτει ότι $r(n) = n^{n-1}$, δηλαδή το Θεώρημα 3.3.1. Η απόδειξη αυτή οφείλεται στον J. Pitman [J. Combin. Theory Series A **85** (1999), 165–193].

19. Το πλήθος των απεικονίσεων $f : [n] \rightarrow [n]$ και των τριάδων (T, r, s) στην εκφώνηση της άσκησης είναι ίσα με n^n και $n^2 t(n)$, αντίστοιχα, όπου $t(n)$ συμβολίζει το πλήθος των δένδρων στο σύνολο κορυφών $[n]$. Κατά συνέπεια, από το (α) προκύπτει ότι $n^2 t(n) = n^n$, δηλαδή το Θεώρημα 3.3.1. Μια 1–1 αντιστοιχία όπως στο ερώτημα (α) έχει δοθεί στο άρθρο του A. Joyal [Adv. in Math. **42** (1981), 1–82] (Παράδειγμα 12). Η αντιστοιχία αυτή περιγράφεται επίσης στη δεύτερη απόδειξη της Πρότασης 5.3.2 του [12].
20. Έστω A το σύνολο των δένδρων τα οποία θέλουμε να απαριθμήσουμε και έστω B το σύνολο των δένδρων στο σύνολο κορυφών $[n]$. Για $T \in A$, έστω $f(T)$ το δένδρο που προκύπτει από το T διαγράφοντας τα φύλλα $n+1, \dots, n+m$. Παρατηρούμε ότι για την απεικόνιση $f : A \rightarrow B$ που ορίζεται με τον τρόπο αυτό ισχύει $\#f^{-1}(y) = n^m$ για κάθε $y \in B$. Από την Πρόταση 1.2.3, το Θεώρημα 3.3.1 και τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι $\#A = n^{n+m-2}$.
21. Έστω b_n το άθροισμα των ακεραίων $\varphi(T)$, όπου το T διατρέχει όλα τα δένδρα στο σύνολο κορυφών $[n]$ και έστω R_n το σύνολο των ζευγών (i, T) , όπου T είναι δένδρο στο σύνολο κορυφών $[n]$ και i είναι φύλλο του T . Έχουμε $\#R_n = b_n$ διότι για κάθε

δένδρο T , υπάρχουν ακριβώς $\varphi(T)$ ακέρατοι $1 \leq i \leq n$ με $(i, T) \in R_n$. Από την Άσκηση 20 προκύπτει ότι για κάθε $1 \leq i \leq n$ υπάρχουν ακριβώς $(n-1)^{n-2}$ δένδρα T στο σύνολο κορυφών $[n]$ με $(i, T) \in R_n$. Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι $b_n = \#R_n = n \cdot (n-1)^{n-2}$. Εφόσον n^{n-2} είναι το συνολικό πλήθος των δένδρων στο σύνολο κορυφών $[n]$, ο ζητούμενος μέσος όρος είναι ίσος με

$$b_n/t_n = b_n/n^{n-2} = \frac{(n-1)^{n-2}}{n^{n-3}}.$$

22. Για το (α), μπορούμε να γενικεύσουμε τον κώδικα Prüfer σε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f: A_n \rightarrow [n]^{k-1}$, όπου A_n είναι το σύνολο των δένδρων με ρίζα στο σύνολο κορυφών $[n]$, όπως στην εκφώνηση. Για να ορίσουμε το $f(T) = (a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$ για $T \in A_n$, από όλα τα μέρη της π που αποτελούνται από φύλλα του T , θεωρούμε εκείνο το μέρος B_1 που περιέχει το μικρότερο στοιχείο και ονομάζουμε a_1 τη μοναδική γειτονική κορυφή στο T οποιοδήποτε από τα στοιχεία του B_1 . Διαγράφουμε από το T όλες τις κορυφές που ανήκουν στο B_1 και συνεχίζουμε όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1. Οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη. Το (β) προκύπτει με συλλογισμό παρόμοιο εκείνου στο (α), ορίζοντας μια 1-1 αντιστοιχία από το σύνολο των δένδρων της εκφώνησης στο σύνολο των $(k-1)$ -αναδιατάξεων του $\{2, 3, \dots, n\}$. Για το (γ), εφαρμόζουμε το (β) για τη διαμέριση $\{\{2\}, \dots, \{n-2\}, \{n-1, n\}\}$ του συνόλου $\{2, 3, \dots, n\}$. Η απάντηση είναι $(n-1)!/2$.
23. Η άσκηση αυτή οφείλεται στον J. P. Gorp και η ακόλουθη λύση στο συγγραφέα. Έστω S το σύνολο των δένδρων με ρίζα το 1 στο σύνολο κορυφών $[2n]$ με την ιδιότητα (i). Από την Άσκηση 20 έχουμε $\#S = n^{2n-2}$. Για $2 \leq i \leq n$, έστω A_i το σύνολο των δένδρων $T \in S$ με ρίζα, για τα οποία οι κορυφές $2i-2$, $2i-1$ και $2i$ έχουν κοινό γονέα. Προφανώς έχουμε

$$g(n) = \# \left(S - \bigcup_{i=2}^n A_i \right).$$

Έστω σύνολο δεικτών $I \subseteq \{2, 3, \dots, n\}$ με r στοιχεία. Έστω π_I η μοναδική διαμέριση του $\{2, 3, \dots, 2n\}$ με $2n-2r-1$ μέρη που είναι τέτοια ώστε τα $2i-2$, $2i-1$ και $2i$ να ανήκουν στο ίδιο μέρος της π_I για κάθε $i \in I$. Ένα δένδρο $T \in S$ με ρίζα ανήκει στην τομή $\bigcap_{i \in I} A_i$ αν και μόνο αν τα στοιχεία οποιοδήποτε μέρους της π_I έχουν κοινό γονέα στο T . Από μια εύκολη γενίκευση της Άσκησης 22 (α) (βλέπε επίσης και Άσκηση 20) προκύπτει ότι

$$\# \bigcap_{i \in I} A_i = n^{2n-2r-2}.$$

Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n-1}{r} n^{2n-2r-2} = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} (-1)^r (n^2)^{n-1-r} \\ &= (n^2 - 1)^{n-1}. \end{aligned}$$

24. Το (α) είναι φανερό αφού καθεμιά από τις n κορυφές δένδρου $T \in A(r_0, \dots, r_{n-1})$ έχει i διαδόχους για μοναδικό δείκτη $0 \leq i \leq n-1$. Έστω S το σύνολο των ζευγών (x, y) κορυφών του T , τέτοιες ώστε η κορυφή y είναι γονέας της x . Έχουμε $\#S = r_1 + 2r_2 + \dots + (n-1)r_{n-1}$ διότι υπάρχουν ακριβώς ir_i τέτοια ζεύγη για τα οποία η y έχει ακριβώς i διαδόχους. Επίσης έχουμε $\#S = n-1$ διότι κάθε κορυφή x του T εκτός της ρίζας έχει ακριβώς έναν γονέα, ενώ η ρίζα δεν έχει κανένα. Από τις δύο αυτές ισότητες έπεται το (β).

Για το (γ) θα χρησιμοποιήσουμε τον κώδικα Prüfer ως αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f: R_n \rightarrow [n]^{n-1}$ του συνόλου R_n των δένδρων με ρίζα στο σύνολο κορυφών $[n]$, επί του συνόλου $[n]^{n-1}$ των ακολουθιών $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ με $1 \leq a_i \leq n$ για κάθε i . Αυτό διαφέρει από την αντιστοιχία του Θεωρήματος 3.3.1 στο ότι θεωρούμε δένδρα T με τυχαία ρίζα στο $[n]$ και στο ότι ο κωδικός $f(T) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ περιέχει αυτή τη ρίζα ως τη συντεταγμένη a_{n-1} . Παρατηρούμε ότι μια κορυφή j έχει i διαδόχους στο T αν και μόνο αν το j εμφανίζεται i φορές ως συντεταγμένη της $f(T)$. Προκύπτει ότι $T \in A(r_0, \dots, r_{n-1})$ αν και μόνο αν για $0 \leq i \leq n-1$ υπάρχουν ακριβώς r_i θετικοί ακέραιοι που εμφανίζονται ο καθένας i φορές ως συντεταγμένες της $f(T)$. Συνεπώς το πλήθος των στοιχείων του $A(r_0, \dots, r_{n-1})$ είναι ίσο με το πλήθος των ακολουθιών στο $[n]^{n-1}$ στις οποίες ακριβώς r_i θετικοί ακέραιοι εμφανίζονται ο καθένας i φορές για $0 \leq i \leq n-1$. Για να απαριθμήσουμε τις ακολουθίες αυτές, επιλέγουμε με

$$\frac{n!}{r_0!r_1! \cdots r_{n-1}!}$$

τρόπους τα r_i στοιχεία του $[n]$ που θα εμφανιστούν i φορές το καθένα στην ακολουθία για $i = 0, 1, \dots, n-1$ και αναδιατάσουμε τα $r_1 + 2r_2 + \dots + (n-1)r_{n-1} = n-1$ συνολικά αντίτυπα των ακεραίων αυτών με

$$\frac{(n-1)!}{(1!)^{r_1}(2!)^{r_2} \cdots ((n-1)!)^{r_{n-1}}}$$

τρόπους ώστε να σχηματιστεί η ακολουθία. Προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \#A(r_0, \dots, r_{n-1}) &= \frac{n!}{r_0!r_1! \cdots r_{n-1}!} \frac{(n-1)!}{(1!)^{r_1}(2!)^{r_2} \cdots ((n-1)!)^{r_{n-1}}} \\ &= \frac{n!(n-1)!}{\prod_{i=0}^{n-1} (i!)^{r_i} r_i!}. \end{aligned}$$

25. Η διαδικασία περιγράφεται με ένα δυαδικό δένδρο T , τα φύλλα του οποίου είναι οι κόκορες και οι εσωτερικές κορυφές του οποίου είναι οι κόττες. Αφού το T έχει 2010 φύλλα, σύμφωνα με την Πρόταση 3.3.2, το T έχει 2009 εσωτερικές κορυφές. Επομένως μαγειρεύτηκαν ακριβώς 2009 κόττες.
26. Έστω a_n και b_n το πλήθος των δένδρων αυτών, αντίστοιχα, οπότε $a_0 = b_0 = 1$ και $a_1 = b_1 = 1$. Για τυχαίο επίπεδο μη επιγεγραμμένο δένδρο T με ρίζα με $n+1 \geq 3$ κορυφές, οι διάδοχοι της ρίζας του T δίνονται με μια συγκεκριμένη αναδιάταξη. Έστω T_1 το δένδρο που σχηματίζεται από τον πρώτο διάδοχο της ρίζας του T και τους

απογόνους αυτού και έστω F η ένωση των δένδρων που σχηματίζονται από τους άλλους διαδόχους της ρίζας του T (αν υπάρχουν τέτοιοι). Προφανώς το T_1 είναι επίσης επίπεδο μη επιγεγραμμένο δένδρο με ρίζα, ενώ το F είναι τέτοιο δένδρο από το οποίο έχει διαγραφεί η ρίζα. Επιπλέον, αν το T_1 έχει $i + 1$ κορυφές, τότε το F έχει $n - i - 1$ κορυφές. Συνεπώς υπάρχουν a_i τρόποι να επιλεγεί το T_1 και a_{n-i-1} τρόποι να επιλεγεί το F , άρα υπάρχουν $a_i a_{n-i-1}$ τρόποι να επιλεγεί το ζεύγος (T_1, F) . Συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-i-1} \quad (3.10)$$

για $n \geq 2$. Παρόμοιο σκεπτικό (θεωρώντας δηλαδή τα δύο δένδρα που ορίζονται από τον πρώτο και δεύτερο διάδοχο της ρίζας ενός δυαδικού επίπεδου με επιγεγραμμένου δένδρου με n εσωτερικές κορυφές και τους απογόνους αυτών) μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι

$$b_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_i b_{n-i-1} \quad (3.11)$$

για $n \geq 2$. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι $a_n = b_n$ για κάθε n .

27. Για τυχαίο χρωματισμό κ των κορυφών του G με δύο χρώματα, άσπρο ή μαύρο, συμβολίζουμε με $e(\kappa)$ το πλήθος των ακμών του G , τα άκρα των οποίων έχουν το ίδιο χρώμα. Ανάμεσα σε όλους αυτούς τους χρωματισμούς των κορυφών του G υπάρχει κάποιος, έστω ο λ , για τον οποίο ο ακέραιος $e(\lambda)$ είναι ο ελάχιστος δυνατός. Ισχυριζόμαστε ότι ο χρωματισμός λ έχει τη ζητούμενη ιδιότητα. Πράγματι αν όχι, τότε υπάρχει κορυφή v του G , έστω με άσπρο χρώμα, η οποία έχει περισσότερες γειτονικές κορυφές με άσπρο χρώμα από ότι με μαύρο. Αλλάζοντας το χρώμα της v από άσπρο σε μαύρο και διατηρώντας το χρώμα των υπολοίπων κορυφών του G προκύπτει χρωματισμός κ του G με $e(\kappa) < e(\lambda)$, σε αντίθεση με την επιλογή του λ . Αυτή η αντίφαση αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.
28. (α) Έστω G το γράφημα το οποίο προκύπτει διαγράφοντας την ακμή $\{v_{n-1}, v_n\}$ του πλήρους γραφήματος στο σύνολο κορυφών $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Παρατηρούμε ότι (α) οι κορυφές v_1, v_2, \dots, v_{n-1} του G ανά δύο συνδέονται με ακμή, οπότε από την Πρόταση 3.4.1 (α) έχουμε $\chi(G) \geq n - 1$ και ότι (β) υπάρχει ο γνήσιος χρωματισμός κ του G με $n - 1$ χρώματα, ο οποίος ορίζεται θέτοντας $\kappa(v_i) = \min\{i, n - 1\}$ για $1 \leq i \leq n$. Από τα (α) και (β) προκύπτει ότι $\chi(G) = n - 1$.
- (β) Το γράφημα αυτό είναι διμερές (εξηγήστε γιατί) και συνεπώς έχει χρωματικό αριθμό ίσο με 2 για κάθε θετικό ακέραιο n .
- (γ) Αφήνεται στον αναγνώστη να δείξει ότι ο ζητούμενος χρωματικός αριθμός είναι ίσος με 3, αν το n είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 3, με 5 αν $n = 5$ και με 4 σε κάθε άλλη περίπτωση.
29. (α) Έστω $m = \text{height}(P)$ και έστω C μια αλυσίδα του P με m στοιχεία. Αφού τα στοιχεία της C ανά δύο συνδέονται με ακμή στο G_P , από την Πρόταση 3.4.1 (α) προκύπτει ότι $\chi(G_P) \geq m$. Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.1, για $x \in P$ συμβολίζουμε με $h(x)$ το μέγιστο πλήθος στοιχείων μια αλυσίδας $x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_r$

του P με $x_r = x$. Από την απόδειξη αυτή προκύπτει ότι η απεικόνιση $h : P \rightarrow [m]$ είναι γνήσιος χρωματισμός του G_P . Κατά συνέπεια ισχύει $\chi(G_P) \leq m$.

(β) Έχουμε $G_n = G_P$, όπου $P = B_n$ είναι η άλγεβρα Boole τάξης n . Συνεπώς το ζητούμενο έπεται από το (α) και την Άσκηση 17 του Κεφαλαίου 2.

30. Έστω \mathcal{A} το δοσμένο σύνολο ευθειών και έστω G το γράφημα με κορυφές τις περιοχές του επιπέδου που ορίζονται από τις ευθείες του \mathcal{A} , στο οποίο δύο περιοχές συνδέονται με ακμή αν η τομή των συνόρων τους περιέχει κάποιο ευθύγραμμο τμήμα θετικού μήκους. Θεωρούμε ένα τυχαίο κύκλο στο G με διαδοχικές κορυφές $R_0, R_1, \dots, R_{k-1}, R_k = R_0$. Παρατηρούμε ότι δύο περιοχές του \mathcal{A} που είναι γειτονικές στο γράφημα G βρίσκονται σε διαφορετικό ημιεπίπεδο ως προς μία από τις ευθείες του \mathcal{A} και στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς τις υπόλοιπες. Επομένως, μεταβαίνοντας από την περιοχή R_{i-1} στη γειτονική της περιοχή R_i αλλάζουμε ημιεπίπεδο ως προς ακριβώς μία από τις ευθείες του \mathcal{A} . Όταν έχουμε καταλήξει στην αρχική περιοχή R_0 , από την οποία ξεκινήσαμε, θα πρέπει να έχουμε αλλάξει ημιεπίπεδο άρτιου πλήθους φορές για καθενιά από τις ευθείες του \mathcal{A} . Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι το μήκος k του κύκλου είναι άρτιος αριθμός. Δείξαμε λοιπόν ότι κάθε κύκλος στο G έχει άρτιο μήκος. Από το Λήμμα 3.4.2 προκύπτει ότι το G είναι διμερές γράφημα και συνεπώς ο χρωματικός αριθμός του είναι μικρότερος ή ίσος του 2. Άρα, οι περιοχές του \mathcal{A} μπορούν να χρωματιστούν όπως στην εκφώνηση της άσκησης.

31. (α) Θέτουμε $q = \chi(G)$ και θεωρούμε γνήσιο χρωματισμό $\kappa : V \rightarrow [q]$ του G με χρώματα $1, 2, \dots, q$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $j \in [q]$, η αντίστροφη εικόνα $\kappa^{-1}(j)$ είναι ανεξάρτητο υποσύνολο του V και συνεπώς έχει το πολύ $\alpha(G)$ στοιχεία. Συμπεραίνουμε ότι

$$n = \#V = \# \bigcup_{j \in [q]} \kappa^{-1}(j) = \sum_{j \in [q]} \#\kappa^{-1}(j) \leq q \cdot \alpha(G),$$

οπότε $\chi(G) = q \geq n/\alpha(G)$. Για τη δεύτερη ανισότητα θέτουμε $a = \alpha(G)$ και θεωρούμε ανεξάρτητο υποσύνολο W του V με a το πλήθος στοιχεία. Παρατηρούμε ότι υπάρχει επί απεικόνιση $\kappa : V \rightarrow [n - a + 1]$ τέτοια ώστε $\kappa(x) = n - a + 1$ για κάθε $x \in W$ και ότι κάθε τέτοια απεικόνιση είναι γνήσιος χρωματισμός του G . Έπεται ότι $\chi(G) \leq n - a + 1 = n - \alpha(G) + 1$.

(β) Το γράφημα που προκύπτει προσθέτοντας $a - 1$ απομονωμένες κορυφές σε ένα πλήρες απλό γράφημα με q κορυφές έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

(γ) Θεωρούμε την ξένη ένωση $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_q$ συνόλων V_1, V_2, \dots, V_q , το καθένα με a στοιχεία. Το απλό γράφημα G στο σύνολο κορυφών V για το οποίο δύο κορυφές $x, y \in V$ είναι γειτονικές αν και μόνο αν $x \in V_i$ και $y \in V_j$ με $i \neq j$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

32. (α) Ένας γνήσιος χρωματισμός του $KG_{n,k}$ με $n - 2k + 2$ χρώματα είναι η απεικόνιση $\kappa : \binom{[n]}{k} \rightarrow [n - 2k + 2]$, με

$$\kappa(S) = \begin{cases} \min(S), & \text{αν } \min(S) \leq n - 2k + 1 \\ n - 2k + 2, & \text{αν } S \subseteq \{n - 2k + 2, \dots, n\} \end{cases}$$

για $S \in \binom{[n]}{k}$ (για να το επαληθεύσετε αυτό, παρατηρήστε ότι οποιαδήποτε δύο k -υποσύνολα του $\{n-2k+2, \dots, n\}$ έχουν τουλάχιστον ένα κοινό στοιχείο). Συνεπώς $\chi(\text{KG}_{n,k}) \leq n-2k+2$.

(β) Η πρόταση αυτή διατυπώθηκε σαν εικασία από τον Kneser το 1955 και αποδείχθηκε από τον Lovász [J. Combin. Theory Series A **25** (1978), 319–324] περίπου 23 χρόνια αργότερα, με χρήση του Θεωρήματος Borsuk-Ulam της αλγεβρικής τοπολογίας. Διάφορες αποδείξεις, καθεμιά από τις οποίες χρησιμοποιεί κάποια εκδοχή του Θεωρήματος Borsuk-Ulam, καθώς και γενικεύσεις δίνονται στο βιβλίο του J. Matousek [Using the Borsuk-Ulam Theorem. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry, Univesitext, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2003].

33. (α) Χρησιμοποιώντας την πολλαπλασιαστική αρχή (εξηγήστε πώς) βρίσκουμε ότι το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με $(2m-1)!! := 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)$, αν ο $n = 2m$ είναι άρτιος αριθμός (και με μηδέν, αν ο n είναι περιττός).

(β) Παρατηρούμε ότι τα τέλεια ταιριάσματα του $K_{n,n}$ βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχία με τις αναδιατάξεις του συνόλου $[n]$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με $n!$ αν $m = n$ (και με μηδέν διαφορετικά).

34. Για το (α) θεωρήστε το απλό γράφημα με n κορυφές v_1, v_2, \dots, v_n και ακμές $\{v_i, v_j\}$ για $1 \leq i < j \leq n-1$. Για το (β) δείξτε ότι υπάρχει διαμέριση $\{F_1, F_2, \dots, F_{n-1}\}$ του συνόλου των ακμών του πλήρους απλού γραφήματος με n κορυφές v_1, v_2, \dots, v_n σε $n-1$ τέλεια ταιριάσματα. Για παράδειγμα, για $n = 3$ μπορεί κανείς να επιλέξει $F_1 = \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\}$, $F_2 = \{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}$ και $F_3 = \{\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}\}$. Δεδομένης μιας τέτοιας διαμέρισης, δείξτε ότι κάθε απλό γράφημα στο σύνολο κορυφών $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ με περισσότερες από $(n-1)(n-2)/2$ ακμές περιέχει ένα τουλάχιστον από τα F_1, F_2, \dots, F_{n-1} και συνάγετε το ζητούμενο.

35. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4.1, αρκεί να δείξουμε ότι αν S είναι τυχαίο υποσύνολο του συνόλου των ανδρών και T είναι το υποσύνολο του συνόλου των γυναικών που γνωρίζουν έναν τουλάχιστον άνδρα από το σύνολο S , τότε $\#S \leq \#T$. Έστω m το πλήθος των ζευγών (a, b) με $a \in S$ και $b \in T$ για τα οποία οι a και b γνωρίζονται. Αφού κάθε στοιχείο του S γνωρίζεται με τουλάχιστον k στοιχεία του T , έχουμε $m \geq (\#S) \cdot k$ και ομοίως βρίσκουμε ότι $m \leq (\#T) \cdot k$. Έπεται ότι $\#S \leq \#T$.

36. Η συνθήκη που ζητάμε είναι η εξής: για κάθε $1 \leq r \leq n$, η ένωση r τυχαίων από τα σύνολα A_1, A_2, \dots, A_n έχει τουλάχιστον $r+1$ στοιχεία. Προφανώς η συνθήκη είναι αναγκαία. Έστω ότι η συνθήκη ισχύει και έστω τυχαίο $x \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ (στοιχείο που αντιστοιχεί στην επιλογή του δράκου). Τα σύνολα $A_i \setminus \{x\}$ ικανοποιούν τη συνθήκη του Πορίσματος 3.4.3 και συνεπώς υπάρχει Σύστημα Διακεκριμένων Αντιπροσώπων για τα A_1, A_2, \dots, A_n στο οποία δε μετέχει το x , δηλαδή είναι δυνατό το ζευγάρι των ανδρών με γυναίκες εκτός της x .

37. Εφαρμόζουμε επαγωγή στο n . Για $n = 1$ το αποτέλεσμα είναι φανερό. Έστω T δένδρο με $n \geq 2$ κορυφές και έστω S το δένδρο που προκύπτει από το T διαγράφοντας ένα φύλλο v του T και τη μοναδική ακμή e του T με άκρο v . Έστω u το άλλο άκρο της e . Κάθε γνήσιος χρωματισμός του T με q χρώματα περιορίζεται σε γνήσιο χρωματισμό του S με τα ίδια χρώματα. Επιπλέον, για κάθε χρωματισμό κ του S με q χρώματα υπάρχουν $q-1$ τρόποι να χρωματίσουμε το v με ένα από τα χρώματα αυτά εκτός

του $\kappa(u)$, ώστε να προκύψει γνήσιος χρωματισμός του T . Κατά συνέπεια έχουμε $\chi_T(q) = (q-1)\chi_S(q)$. Από την υπόθεση της επαγωγής ισχύει $\chi_S(q) = q(q-1)^{n-2}$, άρα $\chi_T(q) = q(q-1)^{n-1}$.

38. Αν G είναι ένας κύκλος μήκους n και e είναι οποιαδήποτε ακμή του, τότε το γράφημα $G \setminus e$ είναι μονοπάτι με n κορυφές και το G/e είναι κύκλος μήκους $n-1$. Κατά συνέπεια, από το Λήμμα 3.5.1 και το Παράδειγμα 3.5.1 (β) προκύπτει η αναγωγική σχέση $\chi_n(q) = q(q-1)^{n-1} - \chi_{n-1}(q)$ για $n \geq 3$, όπου $\chi_2(q) = q(q-1)$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι

$$\chi_n(q) = \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i q(q-1)^{n-1-i},$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την προτεινόμενη ισότητα για το $\chi_n(q)$.

39. (α) Στο πλήρες απλό γράφημα στο σύνολο κορυφών $\{0, 1, 2, 3\}$ προσθέτουμε τις κορυφές 4, 5, 6 και τις ακμές $\{0, 4\}$, $\{1, 4\}$, $\{0, 5\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 5\}$ και $\{0, 6\}$, $\{1, 6\}$, $\{2, 6\}$. Με μια απλή εφαρμογή της πολλαπλασιαστικής αρχής βρίσκουμε ότι για το απλό γράφημα G που προκύπτει ισχύει $\chi_G(q) = q(q-1)(q-2)^2(q-3)^3$.

(β) Ένα τέτοιο γράφημα μπορεί να κατασκευαστεί όπως στην ειδική περίπτωση του ερωτήματος (α), ξεκινώντας από το πλήρες απλό γράφημα σε $r+1$ κορυφές.

(γ) Θέτοντας $q=1$ στην ισότητα $\chi_G(q) = q^n(q-2)^m$ βρίσκουμε ότι ο χρωματικός αριθμός ενός τέτοιου γραφήματος G είναι ίσος με ένα. Κατά συνέπεια, το G δεν έχει ακμές και ισχύει $\chi_G(q) = q^n$. Άρα, τα μόνα ζεύγη είναι αυτά με $m=0$, $n \in \mathbb{N}$.

40. (α) Έστω ότι υπάρχει αναδιάταξη (v_1, v_2, \dots, v_n) του V με την ιδιότητα στην εμφάνιση. Θα δείξουμε ότι το G είναι χορδικό. Έστω U ένα υποσύνολο του V με τουλάχιστον τέσσερα στοιχεία, έστω G_U το επαγόμενο υπογράφημα του G στο σύνολο κορυφών U και έστω v_k το στοιχείο του U με το μέγιστο δείκτη k . Αν το v_k συνδέεται με ακμή στο G με το πολύ ένα στοιχείο του U , τότε το G_U δεν είναι κύκλος. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν το v_k συνδέεται με ακμή στο G με δύο στοιχεία v_i, v_j του U , οπότε $1 \leq i, j < k$ και $\{v_i, v_j\} \in E$ και συνεπώς το G_U περιέχει κύκλο μήκους 3 ως υπογράφημα. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το G είναι χορδικό. Για το αντίστροφο δείτε το άρθρο των D.R. Fulkerson και O.A. Gross [Pacific J. Math. 15 (1965), 835–855].

(β) Έστω αναδιάταξη (v_1, v_2, \dots, v_n) του V όπως στο (α). Για $1 \leq j \leq n$ θέτουμε $e_j = \#\{1 \leq i < j : \{v_i, v_j\} \in E\}$, ώστε $e_1 = 0$. Μια απλή εφαρμογή της πολλαπλασιαστικής αρχής δίνει $\chi_G(q) = (q-e_1)(q-e_2) \cdots (q-e_n)$.

41. Το (α) προκύπτει με τη μέθοδο της διαγραφής - συστολής και επαγωγή στο n , όπως στη δεύτερη απόδειξη του Πορίσματος 3.5.1. Με τον ίδιο τρόπο δείχνει κανείς ότι $(-1)^{n-1}a_{n-1} \geq 1$ για κάθε συνεκτικό γράφημα G , αφού η συστολή G/e είναι επίσης συνεκτικό γράφημα για τυχαία ακμή e του G . Για την αντίστροφη κατεύθυνση του (β), υποθέτουμε ότι το G δεν είναι συνεκτικό. Αν G_1 είναι μια από τις συνεκτικές συνιστώσες του G και G_2 είναι η ένωση των υπολοίπων συνιστωσών, τότε έχουμε $\chi_G(q) = \chi_{G_1}(q)\chi_{G_2}(q)$. Από το Πόρισμα 3.5.1 γνωρίζουμε ότι τα πολυώνυμα $\chi_{G_1}(q)$ και $\chi_{G_2}(q)$ διαιρούνται με το q και συνεπώς το γινόμενό τους $\chi_G(q)$ διαιρείται με το

q^2 , οπότε $a_{n-1} = 0$. Μια απάντηση στο (γ) δίνεται από το λεγόμενο Broken Circuit Theorem του H. Whitney [*A logical expansion in mathematics*, Bull. Amer. Math. Soc. **38** (1932), 572–579].

42. Παρατηρούμε ότι το γράφημα του Petersen (βλέπε Σχήμα 3.19) δεν περιέχει κύκλους μήκους μικρότερου από 5. Προσαρμόζοντας κατάλληλα τις αποδείξεις των Προτάσεων 3.6.1 και 3.6.2 αποδεικνύουμε ότι αν G είναι απλό συνεκτικό επιπεδικό γράφημα με τουλάχιστον τέσσερις κορυφές το οποίο δεν περιέχει κύκλο μήκους 3 ή 4 ως υπογράφημα, τότε $3q(G) \leq 5p(G) - 10$. Αφού το γράφημα του Petersen ικανοποιεί τις παραπάνω υποθέσεις και έχει $p(G) = 10$ κορυφές και $q(G) = 15$ ακμές, συμπεραίνουμε ότι το γράφημα αυτό δεν είναι επιπεδικό.
43. Προσθέτοντας ακμές αν χρειάζεται, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το δοσμένο γράφημα, έστω G , είναι συνεκτικό. Υποθέτουμε ότι το πολύ μία κορυφή του G έχει βαθμό μικρότερο του έξι. Αν $p \geq 3$ και q είναι το πλήθος των κορυφών και των ακμών του G , αντίστοιχα, τότε το άθροισμα των βαθμών των κορυφών του G είναι μεγαλύτερο ή ίσο από $6(p - 1)$. Από την Πρόταση 3.1.1 γνωρίζουμε ότι το άθροισμα αυτό είναι ίσο με $2q$ και συνεπώς ισχύει $2q \geq 6(p - 1)$. Το συμπέρασμα αυτό έρχεται σε αντίθεση με την ανισότητα $q \leq 3p - 6$ της Πρότασης 3.6.1. Συνεπώς το G έχει τη ζητούμενη ιδιότητα.
44. (α) Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο πλήθος n των κορυφών του G . Το ζητούμενο είναι φανερό για $n \leq 4$ και συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n \geq 5$. Έστω v τυχαία κορυφή του G . Από την υπόθεση της επαγωγής, η διαγραφή $G \setminus v$ της v από το G μπορεί να χρωματιστεί γνήσια με τέσσερα χρώματα. Αν η v έχει το πολύ τρεις γειτονικές κορυφές στο G , ή έχει τέσσερις γειτονικές κορυφές, δύο από τις οποίες έχουν το ίδιο χρώμα ως προς το χρωματισμό του $G \setminus v$, τότε η v μπορεί να χρωματιστεί με το τέταρτο διαθέσιμο χρώμα ώστε να προκύψει γνήσιος χρωματισμός του G . Διαφορετικά, η v έχει τέσσερις γειτονικές κορυφές οι οποίες ανά δύο έχουν διαφορετικά χρώματα ως προς το χρωματισμό του $G \setminus v$. Έστω v_1, v_2, v_3, v_4 οι κορυφές αυτές, με την κυκλική σειρά με την οποία είναι διατεταγμένες στο επίπεδο γύρω από τη v , και έστω ότι η κορυφή v_i έχει χρώμα i στο χρωματισμό του $G \setminus v$ για $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Συμβολίζουμε με G_{ij} το επαγόμενο υπογράφημα του $G \setminus v$ στο σύνολο των κορυφών που έχουν χρώμα i ή j . Παρατηρούμε ότι λόγω της επιπεδικότητας, δεν είναι δυνατόν οι κορυφές v_1, v_3 να συνδέονται με περίπατο στο G_{13} και ταυτόχρονα, οι v_2, v_4 να συνδέονται με περίπατο στο G_{24} . Υποθέτουμε λοιπόν ότι οι v_1 και v_3 ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του G_{13} . Ανταλλάσσοντας τα χρώματα 1 και 3 στη συνεκτική συνιστώσα του G_{13} που περιέχει το v_1 προκύπτει γνήσιος χρωματισμός του $G \setminus v$ στον οποίο οι γειτονικές κορυφές της v στο G έχουν χρωματιστεί μόνο με τα χρώματα 2, 3 και 4. Ο χρωματισμός αυτός επεκτείνεται σε γνήσιο χρωματισμό του G με τέσσερα χρώματα, δίνοντας το χρώμα 1 στην κορυφή v_1 . Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα και συνεπώς την απόδειξη.
- (β) Το πλήρες γράφημα σε 5 κορυφές είναι αντιπαράδειγμα, αφού κάθε κορυφή του έχει βαθμό 4 αλλά ο χρωματικός του αριθμός είναι ίσος με 5.

Κεφάλαιο 4

Γεννήτριες Συναρτήσεις

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε σύντομα ένα ισχυρό υπολογιστικό εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων απαρίθμησης, τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων. Θα περιοριστούμε σε απλές εφαρμογές και παραδείγματα, προερχόμενα κυρίως από προβλήματα απαρίθμησης συνθέσεων ακεραίων, διαμερίσεων ακεραίων και διαμερίσεων συνόλων.

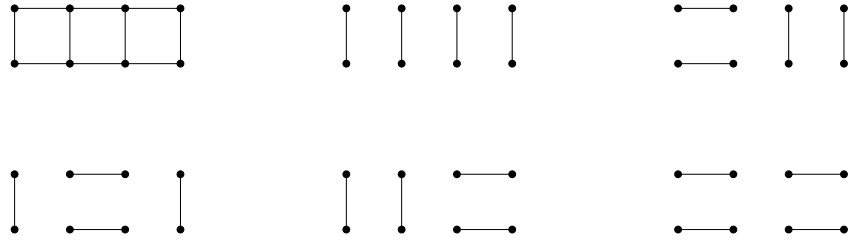
4.1 Ορισμοί και παραδείγματα

4.1.1 Οι αριθμοί Fibonacci

Για να εισάγουμε τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων, θα χρησιμοποιήσουμε το εξής συγκεκριμένο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.1.1 Συμβολίζουμε με G_n το $n \times 2$ γράφημα Μανχάταν και με a_n το πλήθος των τέλειων ταιριασμάτων του G_n . Για παράδειγμα, έχουμε $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$ και $a_5 = 8$. Στο Σχήμα 4.1 απεικονίζεται το γράφημα G_n και τα τέλεια ταιριάσματα αυτού για $n = 4$. Θα υπολογίσουμε το a_n , ως συνάρτηση του n , για $n \in \mathbb{N}$.

Έστω ότι $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$ είναι οι κορυφές του γραφήματος G_n , αριθμημένες έτσι ώστε οι ακμές του G_n να είναι τα ζεύγη $\{u_i, v_i\}$ για $1 \leq i \leq n$, και $\{u_i, u_{i+1}\}$, $\{v_i, v_{i+1}\}$ για $1 \leq i \leq n-1$. Για να υπολογίσουμε το a_n σκεφτόμαστε ως εξής. Ένα τέλειο ταιριασμα του G_n πρέπει να περιέχει ακριβώς μία από τις ακμές $\{u_n, v_n\}$ και $\{u_{n-1}, u_n\}$. Το πλήθος των τέλειων ταιριασμάτων του G_n που περιέχουν την $\{u_n, v_n\}$ είναι εμφανώς ίσο με a_{n-1} . Το πλήθος εκείνων που περιέχουν την $\{u_{n-1}, u_n\}$ είναι ίσο με a_{n-2} , αφού κάθε τέτοιο ταιριασμα περιέχει υποχρεωτικά και την ακμή $\{v_{n-1}, v_n\}$.



Σχήμα 4.1: Τέλεια ταιριάσματα του 4×2 γραφήματος Μανχάταν.

Συμπεραίνουμε ότι ισχύει ο αναγωγικός τύπος

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (4.1)$$

για $n \geq 2$, όπου έχουμε θέσει $a_0 = 1$ (επομένως, η (a_n) είναι η ακολουθία του Fibonacci που μελετήσαμε στην Άσκηση 17 του Κεφαλαίου 1). Το επόμενο βήμα αποτελεί τη βασική ιδέα της μεθόδου των γεννητριών συναρτήσεων: θεωρούμε τη δυναμοσειρά

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (4.2)$$

και επιχειρούμε να την υπολογίσουμε. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 + x + \sum_{n \geq 2} a_n x^n = 1 + x + \sum_{n \geq 2} (a_{n-1} + a_{n-2}) x^n \\ &= 1 + x + x \sum_{n \geq 2} a_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n \geq 2} a_{n-2} x^{n-2} = 1 + x + x(F(x) - 1) \\ &\quad + x^2 F(x) = 1 + (x + x^2) F(x) \end{aligned}$$

και συμπεραίνουμε ότι

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}. \quad (4.3)$$

Μπορούμε τώρα να αναπτύξουμε το δεξιό μέλος της (4.3) ως δυναμοσειρά του x με διάφορους τρόπους και να καταλήξουμε σε αντίστοιχους τύπους για το a_n . Για παράδειγμα, αναπτύσσοντάς το ως γεωμετρική σειρά και εφαρμόζοντας το Διωνυμικό Θεώρημα, βρίσκουμε ότι

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = F(x) = \sum_{k \geq 0} (x + x^2)^k = \sum_{k \geq 0} x^k (1 + x)^k = \sum_{k \geq 0} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^{k+i}.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του x^n στα δύο ακραία μέλη της παραπάνω σειράς ισοτήτων προκύπτει ο τύπος

$$a_n = \sum_{k+i=n} \binom{k}{i} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i}. \quad (4.4)$$

Επίσης, γράφοντας

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{(1-\tau x)(1-\bar{\tau} x)} = \frac{1}{x\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\tau x} - \frac{1}{1-\bar{\tau} x} \right),$$

όπου $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ και $\bar{\tau} = (1 - \sqrt{5})/2$, και αναπτύσσοντας τις συναρτήσεις $(1 - \tau x)^{-1}$ και $(1 - \bar{\tau} x)^{-1}$ ως γεωμετρικές σειρές, βρίσκουμε ότι

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \frac{1}{x\sqrt{5}} \sum_{n \geq 0} (\tau^n - \bar{\tau}^n) x^n.$$

Από την ισότητα αυτή προκύπτει, όπως προηγουμένως, ότι

$$a_n = (\tau^{n+1} - \bar{\tau}^{n+1}) / \sqrt{5} \quad (4.5)$$

για $n \in \mathbb{N}$. Άλλες συνδυαστικές ερμηνείες για το a_n δίνονται στην Άσκηση 17 του Κεφαλαίου 1 και στο Παράδειγμα 4.1.7. \square

4.1.2 Τυπικές δυναμοσειρές

Όπως φάνηκε στο Παράδειγμα 4.1.1, έχουμε τον εξής βασικό ορισμό.

Ορισμός 4.1.1 Έστω ακολουθία μιγαδικών αριθμών (a_n) , για $n \in \mathbb{N}$. Η τυπική δυναμοσειρά

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

λέγεται (συνήθως) γεννήτρια συνάρτηση της (a_n) .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Αν a_n είναι το πλήθος των υποσυνόλων του $[n]$, τότε $a_n = 2^n$ για $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}.$$

\square

Με τον όρο «τυπική δυναμοσειρά», που χρησιμοποιήσαμε στον Ορισμό 4.1.1, εννοούμε ότι αντιλαμβανόμαστε τις δυναμοσειρές και τις πράξεις τους με αλγεβρικό τρόπο. Πιο συγκεκριμένα, γράφουμε

$$\mathbb{C}[[x]] = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n x^n : a_n \in \mathbb{C} \right\} \quad (4.6)$$

για το σύνολο όλων των δυναμοσειρών στο x με συντελεστές από το \mathbb{C} . Για στοιχεία $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ και $G(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ του $\mathbb{C}[[x]]$, έχουμε $F(x) = G(x)$ αν και μόνο αν $a_n = b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Στο $\mathbb{C}[[x]]$ ορίζουμε τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού θέτοντας

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) + \left(\sum_{n \geq 0} b_n x^n \right) = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n \quad (4.7)$$

και

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n x^n \right) &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 \\ &\quad + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) x^3 + \dots \\ &= \sum_{n \geq 0} c_n x^n, \end{aligned} \quad (4.8)$$

όπου

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}. \quad (4.9)$$

Για τις πράξεις αυτές ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες (μεταθετική, προσεταιριστική, επιμεριστική, κ.ο.κ.) που ισχύουν για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Αν

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n \geq 0} x^n, \\ G(x) &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n, \\ H(x) &= 1 + x^2 + x^4 + \dots = \sum_{n \geq 0} x^{2n}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

τότε

$$\begin{aligned} F(x) + G(x) &= 2 + 0 \cdot x + 2 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \dots = 2H(x), \\ F(x)G(x) &= 1 + (-1+1)x + (1-1+1)x^2 + (-1+1-1+1)x^3 + \dots \\ &= 1 + x^2 + x^4 + \dots = H(x). \end{aligned}$$

Ο λογισμός των τυπικών δυναμοσειρών έχει αρκετές ομοιότητες με αυτόν των πολυωνύμων και αυτόν των δυναμοσειρών του απειροστικού λογισμού (χωρίς να μας απασχολεί το θέμα της σύγκλισης). Για παράδειγμα, κάτω από ήπιους περιορισμούς, μπορούμε να διαιρούμε τυπικές δυναμοσειρές και να χειριζόμαστε τα αντίστοιχα πηλίκα όπως τις ρητές συναρτήσεις, ή να παραγωγίζουμε τυπικές δυναμοσειρές και να χρησιμοποιούμε τους συνήθεις κανόνες παραγωγίσης. Στις σημειώσεις αυτές θα περιοριστούμε στους παρακάτω λιγιστούς ορισμούς και παραδείγματα, όσον αφορά το λογισμό των τυπικών δυναμοσειρών. Για μια πιο εκτενή συζήτηση παραπέμπουμε στο πρώτο κεφάλαιο του [2].

Μια τυπική δυναμοσειρά $G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ λέγεται *αντιστρέψιμη* αν υπάρχει $G_0(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ έτσι ώστε να ισχύει $G(x)G_0(x) = 1 := 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$ στο $\mathbb{C}[[x]]$. Για στοιχεία $F(x), G(x), H(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ γράφουμε $F(x)/G(x) = H(x)$ αν η $G(x)$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του $\mathbb{C}[[x]]$ και ισχύει $G(x)H(x) = F(x)$ στο $\mathbb{C}[[x]]$. Για $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ ορίζεται η *παράγωγος* $F'(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ ως $F'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$. Για $F(x), H(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ ισχύουν οι γνωστοί κανόνες παραγωγίσης $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x)$, $(F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$, κ.ο.κ.

Παράδειγμα 4.1.2 Έστω $\alpha \in \mathbb{C}$. Σύμφωνα με τον ορισμό (4.8), έχουμε

$$(1 - \alpha x) \cdot (1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \dots) = 1 + (\alpha - \alpha)x + (\alpha^2 - \alpha \cdot \alpha)x^2 + \dots = 1$$

και συνεπώς

$$\sum_{n \geq 0} \alpha^n x^n := 1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \dots = \frac{1}{1 - \alpha x}. \quad (4.11)$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$\sum_{n \geq 0} x^{kn} := 1 + x^k + x^{2k} + \dots = \frac{1}{1 - x^k} \quad (4.12)$$

για κάθε θετικό ακέραιο k . □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Έστω ότι οι $F(x), G(x), H(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ είναι όπως στην (4.10). Θέτοντας $\alpha = 1$ και $\alpha = -1$ στην (4.11) βρίσκουμε ότι $F(x) = 1/(1 - x)$ και $G(x) = 1/(1 + x)$, αντίστοιχα. Προσθέτοντας και πολλαπλασιάζοντας τις δύο αυτές

ρητές συναρτήσεις με το γνωστό τρόπο, και χρησιμοποιώντας την (4.12) για $k = 2$, επαληθεύουμε ότι

$$\begin{aligned} F(x) + G(x) &= 1/(1-x) + 1/(1+x) = 2/(1-x^2) \\ &= 2(1+x^2+x^4+\dots) = 2H(x), \\ F(x)G(x) &= 1/(1-x)(1+x) = 1/(1-x^2) = 1+x^2+x^4+\dots = H(x). \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας την $F(x) = 1+x+x^2+\dots$ σύμφωνα με τον ορισμό, βρίσκουμε ότι $F'(x) = \sum_{n \geq 1} nx^{n-1} = 1+2x+3x^2+\dots$. Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει από την $F(x) = 1/(1-x)$, χρησιμοποιώντας τους γνωστούς κανόνες παραγωγίσισης:

$$\begin{aligned} F'(x) &= 1/(1-x)^2 = (1/(1-x))^2 = (1+x+x^2+\dots)(1+x+x^2+\dots) \\ &= 1+2x+3x^2+\dots. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.1.3 Θέτοντας $\alpha = 1$ στην (4.11), παίρνουμε

$$\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}. \quad (4.13)$$

Παραγωγίζοντας k φορές ως προς x , παίρνουμε

$$\sum_{n \geq k} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Αντικαθιστώντας το n από το $n+k$ και διαιρώντας με $k!$ προκύπτει η ταυτότητα

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}. \quad (4.14)$$

για $k \in \mathbb{N}$. □

Στα ακόλουθα παραδείγματα δίνουμε ενδεικτικά δύο εφαρμογές της θεωρίας μας.

Παράδειγμα 4.1.4 Δίνεται η ακολουθία (a_n) με $a_0 = 0$ και $a_{n+1} = 2a_n + (-1)^n$ για $n \geq 0$. Για παράδειγμα, έχουμε $a_n = 0, 1, 1, 3, 5, 11$ για $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, αντίστοιχα. Για να υπολογίσουμε το a_n για τυχαίο $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε τη γεννήτρια συνάρτηση $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση $a_{n+1} = 2a_n + (-1)^n$ με x^{n+1} και αθροίζοντας για $n \geq 0$, παίρνουμε

$$\sum_{n \geq 0} a_{n+1} x^{n+1} = 2x \sum_{n \geq 0} a_n x^n + x \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n = 2x F(x) + \frac{x}{1+x}.$$

Παρατηρώντας ότι $\sum_{n \geq 0} a_{n+1}x^{n+1} = F(x) - a_0 = F(x)$, οδηγούμαστε στην εξίσωση $F(x) = 2xF(x) + x/(1+x)$. Λύνοντας ως προς $F(x)$, προκύπτει ότι

$$F(x) = \frac{x}{(1+x)(1-2x)}.$$

Εργαζόμενοι όπως στο Παράδειγμα 4.1.1, βρίσκουμε ότι

$$F(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1+x} \right) = \frac{1}{3} \left(\sum_{n \geq 0} 2^n x^n - \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n \right)$$

και συνεπώς ότι $a_n = (2^n + (-1)^{n-1})/3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. \square

Παράδειγμα 4.1.5 Δίνονται οι ακολουθίες (a_n) και (b_n) με $a_0 = 3$, $b_0 = 5$ και $a_n = 5a_{n-1} - 2b_{n-1}$, $b_n = 6a_{n-1} - 2b_{n-1}$, για $n \geq 1$. Για παράδειγμα, έχουμε $a_n = 3, 5, 9, 17$ και $b_n = 5, 8, 14, 26$ για $n = 0, 1, 2, 3$, αντίστοιχα. Για να υπολογίσουμε τα a_n και b_n για τυχαίο $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε τις γεννήτριες συναρτήσεις $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ και $G(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$. Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση $a_n = 5a_{n-1} - 2b_{n-1}$ με x^n και αθροίζοντας για $n \geq 1$, παίρνουμε

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = 5x \sum_{n \geq 1} a_{n-1} x^{n-1} - 2x \sum_{n \geq 1} b_{n-1} x^{n-1} = 5x F(x) - 2x G(x).$$

Παρατηρώντας ότι $\sum_{n \geq 1} a_n x^n = F(x) - a_0 = F(x) - 3$, οδηγούμαστε στην εξίσωση

$$(1 - 5x) F(x) + 2x G(x) = 3. \quad (4.15)$$

Με παρόμοιο τρόπο, από τη σχέση $b_n = 6a_{n-1} - 2b_{n-1}$ προκύπτει ότι

$$6x F(x) - (1 + 2x) G(x) = -5. \quad (4.16)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (4.15) και (4.16) ως προς $F(x)$ και $G(x)$, παίρνουμε

$$F(x) = \frac{3 - 4x}{1 - 3x + 2x^2}, \quad G(x) = \frac{5 - 7x}{1 - 3x + 2x^2}.$$

Εργαζόμενοι με τη γνωστή διαδικασία, συνάγουμε ότι

$$F(x) = (3 - 4x) \left(\frac{2}{1 - 2x} - \frac{1}{1 - x} \right) = (3 - 4x) \sum_{n \geq 0} (2^{n+1} - 1)x^n$$

και

$$G(x) = (5 - 7x) \left(\frac{2}{1 - 2x} - \frac{1}{1 - x} \right) = (5 - 7x) \sum_{n \geq 0} (2^{n+1} - 1)x^n.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του x^n στα δύο μέλη των παραπάνω εξισώσεων, βρίσκουμε ότι $a_n = 3(2^{n+1} - 1) - 4(2^n - 1)$ και $b_n = 5(2^{n+1} - 1) - 7(2^n - 1)$, δηλαδή ότι $a_n = 2^{n+1} + 1$ και $b_n = 3 \cdot 2^n + 2$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. \square

4.1.3 Συνθέσεις ακεραίων

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε κάποιες απλές εφαρμογές της μεθόδου των γεννητριών συναρτήσεων σε προβλήματα απαρίθμησης συνθέσεων ακεραίων.

Ασθενής σύνθεση (ή ασθενής διατεταγμένη διαμέριση) ενός ακεραίου n θα λέγεται μια ακολουθία $\rho = (r_1, r_2, \dots, r_k)$ με στοιχεία μη αρνητικούς ακεραίους που έχουν άθροισμα n . Όπως και στην περίπτωση των συνθέσεων (όπου τα στοιχεία της ακολουθίας είναι θετικοί ακεραίοι), οι r_i λέγονται *μέρη* της ρ .

Πρόταση 4.1.1 Αν $a_k(n)$ (αντίστοιχα, $b_k(n)$) είναι το πλήθος των ασθενών συνθέσεων (αντίστοιχα, συνθέσεων) του n με k μέρη, τότε

$$\sum_{n \geq 0} a_k(n)x^n = \frac{1}{(1-x)^k}, \quad (4.17)$$

$$\sum_{n \geq 0} b_k(n)x^n = \frac{x^k}{(1-x)^k}. \quad (4.18)$$

Αν $b(n)$ είναι το πλήθος όλων των συνθέσεων του n , τότε

$$\sum_{n \geq 0} b(n)x^n = \frac{x}{1-2x}. \quad (4.19)$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι το $a_k(n)$ ορίζεται ισοδύναμα από την ισότητα

$$\sum_{n \geq 0} a_k(n)x^n = \sum_{r_i \geq 0} x^{r_1+r_2+\dots+r_k}, \quad (4.20)$$

όπου το άθροισμα στο δεξιό μέλος διατρέχει όλες τις ακολουθίες $(r_1, r_2, \dots, r_k) \in \mathbb{N}^k$. Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο συντελεστής του x^n στο άθροισμα αυτό είναι ίσος με το πλήθος των ακολουθιών $(r_1, r_2, \dots, r_k) \in \mathbb{N}^k$ για τις οποίες ισχύει $r_1+r_2+\dots+r_k = n$, δηλαδή με $a_k(n)$. Παραγοντοποιώντας τώρα το δεξιό μέλος της (4.20), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a_k(n)x^n &= \left(\sum_{r_1 \geq 0} x^{r_1} \right) \left(\sum_{r_2 \geq 0} x^{r_2} \right) \cdots \left(\sum_{r_k \geq 0} x^{r_k} \right) \\ &= (1+x+x^2+\dots)^k = \frac{1}{(1-x)^k}, \end{aligned}$$

δηλαδή την (4.17). Με ανάλογο τρόπο προκύπτει και η (4.18):

$$\sum_{n \geq 0} b_k(n)x^n = \sum_{r_i \geq 1} x^{r_1+r_2+\dots+r_k}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{r_1 \geq 1} x^{r_1} \right) \left(\sum_{r_2 \geq 1} x^{r_2} \right) \cdots \left(\sum_{r_k \geq 1} x^{r_k} \right) \\
&= (x + x^2 + x^3 + \cdots)^k = \frac{x^k}{(1-x)^k}.
\end{aligned}$$

Τέλος, αθροίζοντας την (4.18) για $k \geq 1$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι $b(n) = \sum_{k \geq 1} b_k(n)$ για $n \geq 1$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} b(n)x^n &= \sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{(1-x)^k} = -1 + \sum_{k \geq 0} \left(\frac{x}{1-x} \right)^k \\
&= -1 + \frac{1}{1-x/(1-x)} = \frac{x}{1-2x},
\end{aligned}$$

δηλαδή την (4.19). □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Από τον τύπο (4.19) προκύπτει ότι

$$\sum_{n \geq 0} b(n)x^n = x \sum_{n \geq 0} 2^n x^n = \sum_{n \geq 0} 2^n x^{n+1} = \sum_{n \geq 1} 2^{n-1} x^n$$

και συνεπώς ότι $b(n) = 2^{n-1}$ για κάθε θετικό ακέραιο n . Άρα, έχουμε δώσει μια απόδειξη της πρώτου ισχυρισμού της Πρότασης 1.3.6 με τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων. Με ανάλογο τρόπο, χρησιμοποιώντας την (4.14), αποδεικνύεται ότι οι σχέσεις (4.17) και (4.18) είναι ισοδύναμες με τους τύπους $a_k(n) = \binom{n+k-1}{k-1}$ και $b_k(n) = \binom{n-1}{k-1}$, αντίστοιχα (βλέπε Προτάσεις 1.3.7 και 1.3.6). □

Η μέθοδος της απόδειξης της Πρότασης 4.1.1 μπορεί να εφαρμοστεί σε γενικότερα προβλήματα απαρίθμησης συνθέσεων ακεραίων, με περιορισμούς στα μέρη τους.

Παράδειγμα 4.1.6 Έστω a_n το πλήθος των ασθενών συνθέσεων (r_1, r_2, r_3, r_4) του n για τις οποίες ισχύουν τα εξής: το r_1 είναι άρτιος ακέραιος, το είναι r_2 ακέραιο πολλαπλάσιο του 3, $r_3 \in \{0, 1\}$ και $r_4 \in \{0, 2, 4\}$. Για παράδειγμα έχουμε $a_4 = 4$, αφού οι αντίστοιχες ασθενείς συνθέσεις του $n = 4$ είναι οι $(0, 0, 0, 4)$, $(0, 3, 1, 0)$, $(2, 0, 0, 2)$ και $(4, 0, 0, 0)$.

Ας συμβολίσουμε με \mathcal{R} το σύνολο των τετράδων $(r_1, r_2, r_3, r_4) \in \mathbb{N}^4$ με τις παραπάνω ιδιότητες και με \mathcal{M} το σύνολο των τετράδων $(m_1, m_2, m_3, m_4) \in \mathbb{N}^4$ με $m_3 \in \{0, 1\}$ και $m_4 \in \{0, 2, 4\}$. Υπολογίζοντας τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας (a_n) όπως στην απόδειξη της Πρότασης 4.1.1, βρίσκουμε ότι

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{(r_1, r_2, r_3, r_4) \in \mathcal{R}} x^{r_1+r_2+r_3+r_4} = \sum_{(m_1, m_2, m_3, m_4) \in \mathcal{M}} x^{2m_1+3m_2+m_3+m_4}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{m_1 \geq 0} x^{2m_1} \right) \left(\sum_{m_2 \geq 0} x^{3m_2} \right) \left(\sum_{m_3 \in \{0,1\}} x^{m_3} \right) \left(\sum_{m_4 \in \{0,2,4\}} x^{m_4} \right) \\
&= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot (1+x) \cdot (1+x^2+x^4) = \frac{1-x+x^2}{(1-x)^2} \\
&= 1 + \frac{x}{(1-x)^2} = 1 + \sum_{n \geq 1} nx^n
\end{aligned}$$

και συμπεραίνουμε ότι $a_0 = 1$ και ότι $a_n = n$ για κάθε $n \geq 1$. \square

Παράδειγμα 4.1.7 Συμβολίζουμε με $c(n)$ το πλήθος των συνθέσεων του n με μέρη περιττούς ακεραίους. Έχουμε $c(n) = 0, 1, 1, 2, 3$ για $n = 0, 1, 2, 3, 4$, αντίστοιχα. Για παράδειγμα, οι συνθέσεις του $n = 4$ με περιττά μέρη είναι οι $(3, 1)$, $(1, 3)$ και $(1, 1, 1, 1)$. Θα υπολογίσουμε το $c(n)$ για τυχαίο $n \in \mathbb{N}$.

Έστω $c_k(n)$ το πλήθος των συνθέσεων του n με k μέρη, καθένα από τα οποία είναι περιττός ακέραιος. Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 4.1.1, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} c_k(n)x^n &= \sum_{r_i \in \{1,3,5,\dots\}} x^{r_1+r_2+\dots+r_k} \\
&= \left(\sum_{r_1 \in \{1,3,5,\dots\}} x^{r_1} \right) \left(\sum_{r_2 \in \{1,3,5,\dots\}} x^{r_2} \right) \cdots \left(\sum_{r_k \in \{1,3,5,\dots\}} x^{r_k} \right) \\
&= (x + x^3 + x^5 + \dots)^k = x^k(1 + x^2 + x^4 + \dots)^k \\
&= \frac{x^k}{(1-x^2)^k}.
\end{aligned}$$

Αθροίζοντας για $k \geq 1$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι $c(0) = 0$ και ότι $c(n) = \sum_{k \geq 1} c_k(n)$ για $n \geq 1$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} c(n)x^n &= \sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{(1-x^2)^k} = -1 + \sum_{k \geq 0} \left(\frac{x}{1-x^2} \right)^k \\
&= -1 + \frac{1}{1-x/(1-x^2)} = \frac{x}{1-x-x^2}.
\end{aligned}$$

Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα αυτό με τις (4.2) και (4.3) προκύπτει ότι οι αριθμοί $c(n)$ είναι οι όροι της ακολουθίας του Fibonacci. Συγκεκριμένα, έχουμε

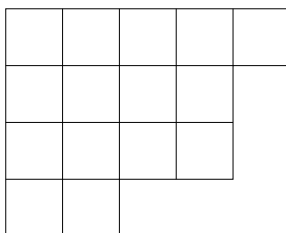
$$\sum_{n \geq 0} c(n)x^n = x \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} a_{n-1} x^n,$$

όπου το a_n ορίζεται όπως στο Παράδειγμα 4.1.1. Άρα, το $c(n)$ είναι ίσο με το πλήθος a_{n-1} των τέλειων ταιριασμάτων του $(n-1) \times 2$ γράφηματος Μανχάταν, για κάθε $n \geq 1$. \square

4.2 Διαμερίσεις ακεραίων

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με προβλήματα απαρίθμησης διαμερίσεων ακεραίων. Διαμέριση του θετικού ακεραίου n λέγεται μια ακολουθία $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ με στοιχεία θετικούς ακεραίους $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$ που έχουν άθροισμα n . Οι ακεραίοι λ_i λέγονται *μέρη* της λ . Θα γράφουμε $|\lambda| = n$ για το άθροισμά τους.

Για παράδειγμα, η $(5, 4, 4, 2)$ είναι διαμέριση του $n = 15$ με τέσσερα μέρη. Στο Σχήμα 4.2 απεικονίζεται το *διάγραμμα Young* για τη διαμέριση αυτή, ένας από τους κύριους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να παραστήσουμε σχηματικά διαμερίσεις ακεραίων. Το διάγραμμα Young της $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ αποτελείται από $n = |\lambda|$ μοναδιαία τετράγωνα παραταγμένα σε r σειρές. Η σειρά i περιέχει λ_i τετράγωνα και οι r σειρές αρχίζουν από αριστερά από την ίδια κατακόρυφο, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σχήμα 4.2: Το διάγραμμα Young της διαμερίσης $(5, 4, 4, 2)$.

Συμβολίζουμε με $p(n)$ το πλήθος των διαμερίσεων του n . Έτσι, έχουμε $p(n) = 1, 2, 3, 5, 7$ για $n = 1, 2, 3, 4, 5$, αντίστοιχα. Για παράδειγμα, οι πέντε διαμερίσεις του $n = 4$ είναι οι $(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1)$ και $(1, 1, 1, 1)$. Ενώ υπάρχουν μόνο εξαιρετικά περίπλοκοι τύποι για το $p(n)$ (βλέπε, για παράδειγμα, [4, Κεφάλαιο 5]), η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση δίνεται από την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.2.1 *Θέτοντας $p(0) = 1$, έχουμε*

$$\sum_{n \geq 0} p(n)x^n = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1-x^i} := \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots}. \quad (4.21)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Για να έχει νόημα η (4.21) ως ταυτότητα στο $\mathbb{C}[[x]]$, πρέπει να εξηγήσουμε το πώς ορίζεται το άπειρο γινόμενο που εμφανίζεται εκεί ως τυπική δυναμοσειρά, δηλαδή πώς ορίζεται ο συντελεστής του x^n στο γινόμενο αυτό, για $n \in \mathbb{N}$. Για το λόγο αυτό, θεωρούμε ότι οι όροι $(1 - x^i)^{-1}$ του γινομένου με $i \geq n + 1$ δε συνεισφέρουν στο συντελεστή του x^n . Ο συντελεστής αυτός ορίζεται ως ο συντελεστής του x^n στο πεπερασμένο γινόμενο

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)}.$$

Έτσι, οι συντελεστές των $1, x, x^2, x^3, x^4$ υπολογίζονται ως

$$\begin{aligned} \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1-x^i} &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^4} \cdots = (1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots) \\ &\quad (1+x^2+x^4+x^6+\cdots) (1+x^3+x^6+\cdots) (1+x^4+x^8+\cdots) \cdots \\ &= 1+x+2x^2+3x^3+5x^4+\cdots \end{aligned}$$

Απόδειξη της Πρότασης 4.2.1. Συμβολίζουμε με Λ_k το σύνολο των διαμερίσεων $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ (συμπεριλαμβανομένης και της μοναδικής διαμέρισης χωρίς μέρη) με $\lambda_i \leq k$ για κάθε i και έστω $p_k(n)$ το πλήθος των διαμερίσεων του n που ανήκουν στο Λ_k . Σύμφωνα με την παρατήρηση που προηγήθηκε, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{n \geq 0} p_k(n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)} \quad (4.22)$$

για κάθε θετικό ακέραιο k , όπου $p_k(0) = 1$. Για τυχαία διαμέριση λ , έστω m_i το πλήθος των μερών της λ που είναι ίσα με i . Για παράδειγμα, για $\lambda = (5, 4, 4, 2)$ έχουμε $m_2 = m_5 = 1$, $m_4 = 2$ και $m_i = 0$ για τις υπόλοιπες τιμές του i . Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $\varphi_k : \Lambda_k \rightarrow \mathbb{N}^k$ με $\varphi_k(\lambda) = (m_1, m_2, \dots, m_k)$ για $\lambda \in \Lambda_k$ είναι αμφιμονοσήμαντη και ότι $|\lambda| = m_1 + 2m_2 + \cdots + km_k$ για κάθε $\lambda \in \Lambda_k$. Προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} p_k(n)x^n &= \sum_{\lambda \in \Lambda_k} x^{|\lambda|} = \sum_{m_i \geq 0} x^{m_1+2m_2+\cdots+km_k} = \prod_{i=1}^k \left(\sum_{m_i \geq 0} x^{im_i} \right) \\ &= \prod_{i=1}^k \frac{1}{1-x^i}, \end{aligned}$$

δηλαδή ότι ισχύει η (4.22). □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Σύμφωνα με την (4.22), για το πλήθος $p_2(n)$ των διαμερίσεων του n με μέρη 1 ή 2 έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 0} p_2(n)x^n &= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = (1+x+x^2+\dots)(1+x^2+x^4+\dots) \\ &= 1+x+2x^2+2x^3+3x^4+3x^5+\dots,\end{aligned}$$

δηλαδή $p_2(n) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. \square

Το σκεπτικό της προηγούμενης απόδειξης μπορεί να εφαρμοσθεί σε προβλήματα απαρίθμησης διαμερίσεων ακεραίων, όταν επιβάλλονται περιορισμοί στους ακεραίους m_i .

Παράδειγμα 4.2.1 Έστω $o(n)$ το πλήθος των διαμερίσεων του n με μέρη περιττούς ακεραίους και $q(n)$ το πλήθος των διαμερίσεων του n με μέρη ακεραίους διαφορετικούς ανά δύο. Έτσι, έχουμε $o(1) = q(1) = 1$, $o(2) = q(2) = 1$, $o(3) = q(3) = 2$, $o(4) = q(4) = 2$, $o(5) = q(5) = 3$ κ.ο.κ. Για παράδειγμα, οι τρεις διαμερίσεις του $n = 5$ με μέρη περιττούς ακεραίους είναι οι (5) , $(3, 1, 1)$ και $(1, 1, 1, 1, 1)$ και εκείνες με διακεκριμένα μέρη είναι οι (5) , $(4, 1)$ και $(3, 2)$. Θα υπολογίσουμε τις γεννήτριες συναρτήσεις των $o(n)$ και $q(n)$ και θα δείξουμε ότι ισχύει $o(n) = q(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για τυχαία διαμέριση λ , έστω m_i το πλήθος των μερών της λ που είναι ίσα με i , όπως στην απόδειξη της Πρότασης 4.2.1, και έστω Γ (αντίστοιχα, Δ) το σύνολο των διαμερίσεων με μέρη περιττούς (αντίστοιχα, διαφορετικούς ανά δύο) ακεραίους. Έτσι, έχουμε $\lambda \in \Gamma$ αν και μόνο αν $m_i = 0$ για κάθε άρτιο i , ενώ $\lambda \in \Delta$ αν και μόνο αν $m_i \in \{0, 1\}$ για κάθε i , και συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 0} o(n)x^n &= \sum_{\lambda \in \Gamma} x^{|\lambda|} = \sum_{m_i \geq 0} x^{m_1+3m_3+5m_5+\dots} \\ &= \left(\sum_{m_1 \geq 0} x^{m_1} \right) \left(\sum_{m_3 \geq 0} x^{3m_3} \right) \dots = \prod_{j \geq 1} \frac{1}{1-x^{2j-1}},\end{aligned}$$

και ότι

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 0} q(n)x^n &= \sum_{\lambda \in \Delta} x^{|\lambda|} = \sum_{m_i \in \{0,1\}} x^{m_1+2m_2+3m_3+\dots} \\ &= \left(\sum_{m_1 \in \{0,1\}} x^{m_1} \right) \left(\sum_{m_2 \in \{0,1\}} x^{2m_2} \right) \dots = \prod_{i \geq 1} (1+x^i),\end{aligned}$$

όπου $o(0) = q(0) = 1$ κατά σύμβαση. \square

Πόρισμα 4.2.1 Ισχύει $o(n) = q(n)$ για κάθε n .

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} q(n)x^n &= \prod_{i \geq 1} (1 + x^i) = \prod_{i \geq 1} \frac{1 - x^{2i}}{1 - x^i} = \frac{(1 - x^2)(1 - x^4)(1 - x^6) \dots}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3) \dots} \\ &= \frac{1}{(1 - x)(1 - x^3)(1 - x^5) \dots} = \sum_{n \geq 0} o(n)x^n \end{aligned}$$

και συνεπώς $q(n) = o(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

4.3 Εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε σύντομα στις εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις και σε εφαρμογές τους σε προβλήματα απαρίθμησης ακολουθιών και διαμερίσεων συνόλων. Για μια πιο ολοκληρωμένη προσέγγιση παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο Κεφάλαιο 3 του [2].

Ορισμός 4.3.1 Έστω ακολουθία μιγαδικών αριθμών (a_n) , για $n \in \mathbb{N}$. Η τυπική δυναμοσειρά

$$\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \dots$$

λέγεται εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της (a_n) .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Αν a_n είναι το πλήθος των υποσυνόλων του $[n]$, τότε $a_n = 2^n$ για $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της (a_n) είναι η

$$\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} 2^n \frac{x^n}{n!} = e^{2x}.$$

Αν b_n είναι το πλήθος των αναδιατάξεων του $[n]$, τότε $b_n = n!$ για $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς η αντίστοιχη εκθετική γεννήτρια συνάρτηση είναι η

$$\sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1 - x}.$$

□

Από τον ορισμό της πρόσθεσης (4.7) και του πολλαπλασιασμού (4.8) - (4.9) στο $\mathbb{C}[[x]]$ έχουμε

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} \right) + \left(\sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) \frac{x^n}{n!} \quad (4.23)$$

και

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n \geq 0} c_n \frac{x^n}{n!} \quad (4.24)$$

όπου

$$\frac{c_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} \cdot \frac{b_{n-k}}{(n-k)!},$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \\ &= a_0 b_n + \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Κύριος στόχος μας είναι να δώσουμε μια συνδυαστική ερμηνεία στο γινόμενο εκθετικών γεννητριών συναρτήσεων. Για το λόγο αυτό, θεωρούμε μια οικογένεια \mathcal{A} πεπερασμένων ακολουθιών με όρους από ένα συγκεκριμένο αλφάβητο, τέτοιο ώστε το πλήθος των στοιχείων της \mathcal{A} μήκους n να είναι πεπερασμένο για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση που αντιστοιχεί στην \mathcal{A} ως την τυπική δυναμοσειρά

$$E_{\mathcal{A}}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}, \quad (4.26)$$

όπου a_n είναι το πλήθος των στοιχείων της \mathcal{A} μήκους n . Ειδικότερα, έχουμε $a_0 = 1$, αν η \mathcal{A} περιέχει τη μοναδική ακολουθία μήκους μηδέν (κενή ακολουθία) και $a_0 = 0$, διαφορετικά.

Παράδειγμα 4.3.1 Θεωρούμε το αλφάβητο $\{1, 2\}$. Έστω \mathcal{A} (αντίστοιχα, \mathcal{B}) η οικογένεια όλων των πεπερασμένων ακολουθιών με όρους ίσους με 1 (αντίστοιχα, των μη κενών πεπερασμένων ακολουθιών με όρους ίσους με 2). Αν a_n (αντίστοιχα, b_n) είναι το πλήθος των στοιχείων της \mathcal{A} (αντίστοιχα, της \mathcal{B}) μήκους n , τότε έχουμε $a_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (αντίστοιχα, $b_0 = 0$ και $b_n = 1$ για $n \geq 1$) και συνεπώς

$$E_{\mathcal{A}}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

και

$$E_{\mathcal{B}}(x) = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1.$$

Έστω \mathcal{C} η οικογένεια όλων των πεπερασμένων ακολουθιών με όρους από το σύνολο $\{1, 2\}$, τουλάχιστον ένας από τους οποίους είναι ίσος με 2. Αν c_n είναι το πλήθος των στοιχείων της \mathcal{C} μήκους n , τότε έχουμε $c_n = 2^n - 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς

$$E_{\mathcal{C}}(x) = \sum_{n \geq 0} c_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} (2^n - 1) \frac{x^n}{n!} = e^{2x} - e^x.$$

□

Θεωρούμε τώρα δύο οικογένειες ακολουθιών \mathcal{A} και \mathcal{B} , όπως προηγουμένως. Ονομάζουμε *ανακάτεμα* των $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathcal{A}$ και $(y_1, y_2, \dots, y_{n-k}) \in \mathcal{B}$ μια ακολουθία (z_1, z_2, \dots, z_n) για την οποία υπάρχει ασθενής διαμέριση του $[n]$ με μέρη $\{i_1 < i_2 < \dots < i_k\}$ και $\{j_1 < j_2 < \dots < j_{n-k}\}$, τέτοια ώστε να ισχύει $z_{i_r} = x_r$ για $1 \leq r \leq k$ και $z_{j_r} = y_r$ για $1 \leq r \leq n - k$. Για παράδειγμα, τα ανακατέματα των ακολουθιών $(1, 2)$ και $(3, 4)$ είναι οι ακολουθίες $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 3, 2, 4)$, $(1, 3, 4, 2)$, $(3, 1, 2, 4)$, $(3, 1, 4, 2)$ και $(3, 4, 1, 2)$.

Στο Παράδειγμα 4.3.1, η οικογένεια \mathcal{C} αποτελείται ακριβώς από όλα τα ανακατέματα των στοιχείων της \mathcal{A} με εκείνα της \mathcal{B} και ισχύει $E_{\mathcal{C}}(x) = E_{\mathcal{A}}(x)E_{\mathcal{B}}(x)$. Το γεγονός αυτό εξηγείται από την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.3.1 Έστω οικογένειες πεπερασμένων ακολουθιών \mathcal{A} και \mathcal{B} , οι όροι των οποίων ανήκουν σε δύο ξένα μεταξύ τους αλφάβητα, και έστω ότι το πλήθος των στοιχείων μήκους n της καθεμιάς είναι πεπερασμένο για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν \mathcal{C} είναι η οικογένεια που αποτελείται από όλα τα ανακατέματα των στοιχείων της \mathcal{A} με εκείνα της \mathcal{B} , τότε $E_{\mathcal{C}}(x) = E_{\mathcal{A}}(x)E_{\mathcal{B}}(x)$.

Απόδειξη. Έστω a_n (αντίστοιχα, b_n και c_n) το πλήθος των στοιχείων της \mathcal{A}_n (αντίστοιχα, \mathcal{B}_n και \mathcal{C}_n) μήκους n . Κάθε ακολουθία $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathcal{C}_n$ μήκους n προκύπτει (με μοναδικό τρόπο) ως το ανακάτεμα δύο ακολουθιών $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathcal{A}$ και $(y_1, y_2, \dots, y_{n-k}) \in \mathcal{B}$. Για δοσμένο k , υπάρχουν $a_k b_{n-k}$ τρόποι να επιλεγούν οι δύο αυτές ακολουθίες και $\binom{n}{k}$ τρόποι να επιλεγεί ένα ανακάτεμά τους (όσες είναι οι ασθενείς διαμερίσεις του $[n]$ με δύο μέρη, ένα με k στοιχεία και ένα με $n - k$). Συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν συνολικά

$$c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$$

στοιχεία μήκους n της \mathcal{C}_n , δηλαδή ότι ισχύει η (4.25) για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, ισχύει και η ισοδύναμη σχέση (4.24), δηλαδή το ζητούμενο. □

Παράδειγμα 4.3.2 Θα υπολογίσουμε το πλήθος των πεπερασμένων ακολουθιών μήκους n με όρους από το σύνολο $\{1, 2, 3\}$, οι οποίες έχουν άρτιο πλήθος όρων ίσων με 3.

Έστω \mathcal{C} η οικογένεια των ακολουθιών αυτών και έστω c_n το ζητούμενο πλήθος των στοιχείων της \mathcal{C} μήκους n . Παρατηρούμε ότι η \mathcal{C} αποτελείται ακριβώς από τα ανακατάματα των στοιχείων των εξής δύο οικογενειών: της οικογένειας \mathcal{A} όλων των πεπερασμένων ακολουθιών με όρους από το σύνολο $\{1, 2\}$ και της οικογένειας \mathcal{B} όλων των πεπερασμένων ακολουθιών άρτιου μήκους με όρους ίσους με 3. Παρατηρούμε ότι $E_{\mathcal{A}}(x) = e^{2x}$ και ότι

$$E_{\mathcal{B}}(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Από τα προηγούμενα και την Πρόταση 4.3.1 προκύπτει ότι

$$\sum_{n \geq 0} c_n \frac{x^n}{n!} = E_{\mathcal{C}}(x) = E_{\mathcal{A}}(x) E_{\mathcal{B}}(x) = \frac{e^{3x} + e^x}{2} = \sum_{n \geq 0} \frac{(3^n + 1)x^n}{2 \cdot n!}$$

και συνεπώς ότι $c_n = (3^n + 1)/2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

4.4 Ασκήσεις

1. Έστω a_n το πλήθος των υποσυνόλων του $[2n]$ τα οποία περιέχουν τουλάχιστον ένα ακεραίο μεγαλύτερο του n (οπότε $a_0 = 0$). Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.
2. Υπολογίστε τις εξής τυπικές δυναμοσειρές, ως ρητές συναρτήσεις του x .
 - (α) $\sum_{n \geq 0} n x^n$.
 - (β) $\sum_{n \geq 0} n^2 x^n$.
 - (γ) $\sum_{n \geq 0} n^3 x^n$.
 - (δ) $\sum_{n \geq 0} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) x^n$.
 - (ε) $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, όπου $a_0 = 1$, $a_1 = -2$ και $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ για $n \geq 2$.

Στην περίπτωση του (ε), συνάγετε έναν απλό τύπο για το a_n .

3. Έστω a_n το πλήθος των αναδιατάξεων $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ του συνόλου $[n]$ για τις οποίες ισχύει $|\sigma_i - i| \leq 1$ για $1 \leq i \leq n$. Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$.
4. Δίνεται η ακολουθία (a_n) με $a_0 = 1$ και $a_{n+1} = 2a_n + n$ για $n \geq 0$.

(α) Δείξτε ότι

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \frac{1 - 2x + 2x^2}{(1-x)^2(1-2x)}.$$

(β) Βρείτε έναν απλό τύπο για το a_n .

5. Έστω $a_{n,k}$ το πλήθος των διανυσμάτων $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 0, 1\}^n$ τα οποία έχουν ακριβώς k συντεταγμένες ίσες με μηδέν.

(α) Βρείτε έναν απλό τύπο για τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{k=0}^n a_{n,k} x^k$.

(β) Βρείτε έναν απλό τύπο για τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{k=0}^{n/2} a_{n,2k} x^{2k}$.

(γ) Πόσα διανύσματα $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 0, 1\}^n$ έχουν άρτιο πλήθος συντεταγμένων ίσων με μηδέν;

6. Θέτουμε

$$a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} (-4)^{-k}$$

για $n \in \mathbb{N}$.

(α) Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

(β) Συνάγετε έναν απλό τύπο για το a_n .

7. Βρείτε έναν απλό τύπο για το άθροισμα

$$s_n = \sum_{k=0}^n 2^k \binom{2n-k}{k}$$

(α) Υπολογίζοντας τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 0} s_n x^{2n}$.

(β) Ερμηνεύοντας το s_n ως το συντελεστή του x^{2n} σε κατάλληλη τυπική δυναμοσειρά.

8. Χρωματίζουμε καθέναν από τους ακεραίους $1, 2, \dots, n$ με ένα από τα χρώματα μπλε, πράσινο και κόκκινο. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό έτσι ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα τα εξής: (α) δεν υπάρχουν δύο διαδοχικοί ακεραίοι με μπλε χρώμα, και (β) δεν υπάρχουν δύο διαδοχικοί ακεραίοι με πράσινο χρώμα;

9. Καθένα από δέκα κουτιά περιέχει δύο μπάλλες (θεωρούμε δύο από τις μπάλλες αυτές όμοιες μόνο αν περιέχονται στο ίδιο κουτί). Έστω a_n το πλήθος των τρόπων να επιλέξουμε n μπάλλες από τα κουτιά. Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ και το a_n για $n = 5$.

10. Έστω a_n το πλήθος των ασθενών συνθέσεων (r_1, r_2, r_3) του n για τις οποίες τα r_2 και r_3 είναι άρτιοι αριθμοί.

(α) Δείξτε ότι

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)^2}.$$

(β) Συνάγετε έναν απλό τύπο για το a_n .

11. Για $n \in \mathbb{N}$, υπολογίστε το πλήθος των διαμερίσεων του n , κάθε μέρος των οποίων ανήκει στο σύνολο $\{1, 2, 4\}$.

12. Έστω $\sigma(n)$ το πλήθος των διαμερίσεων του n κανένα μέρος των οποίων δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 3 και έστω $\tau(n)$ το πλήθος των διαμερίσεων του n κανένα μέρος των οποίων δεν είναι μεγαλύτερο του 2. Δείξτε ότι $\sigma(n) = \tau(n)$ για κάθε θετικό ακέραιο n .

13. Υπολογίστε το πλήθος των ακολουθιών μήκους n με όρους από το σύνολο $\{0, 1, 2\}$, οι οποίες έχουν την εξής ιδιότητα:

(α) Το πλήθος των όρων ίσων με 0 είναι άρτιος αριθμός και εκείνων ίσων με 1 είναι περιττός.

(β) Τα πλήθη των όρων ίσων με 0, με 1 και με 2 είναι και οι τρεις άρτιοι, ή και οι τρεις περιττοί αριθμοί.

14. Δείξτε ότι

$$\sum_{n \geq 0} D_n \frac{x^n}{n!} = \frac{e^{-x}}{1-x}, \quad (4.27)$$

όπου D_n είναι το πλήθος των αναδιατάξεων του $[n]$ χωρίς σταθερά σημεία.

15. Δείξτε ότι

$$\sum_{n \geq k} S(n, k) x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x) \cdots (1-kx)}, \quad (4.28)$$

όπου $S(n, k)$ είναι το πλήθος των διαμερίσεων του συνόλου $[n]$ με k μέρη (βλέπε Άσκηση 12 του Κεφαλαίου 2).

16. Έστω a_n το πλήθος των παραγόντων δένδρων του $n \times 2$ γραφήματος Μανχάταν, με $a_0 = 0$.

(α) Δείξτε ότι $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$ για $n \geq 2$.

(β) Συνάγετε ότι

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \frac{x}{1 - 4x + x^2} \quad (4.29)$$

και ότι

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left((2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n \right) \quad (4.30)$$

για $n \in \mathbb{N}$.

17. Ορίζουμε τους ακεραίους $a_{m,k}$ από την ισότητα

$$(1 - x + x^2)^m = \sum_{k=0}^{2m} a_{m,k} x^k$$

και θέτουμε $b_n = \sum_{k=0}^{\lfloor 2n/3 \rfloor} a_{n-k,k}$ για $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι

$$\sum_{n \geq 0} b_n x^n = \frac{1}{1 - x + x^2 - x^3}.$$

(β) Συνάγετε ότι $b_n \in \{-1, 0, 1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υποδείξεις - Λύσεις

1. Έχουμε $a_n = 4^n - 2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} 4^n x^n - \sum_{n \geq 0} 2^n x^n = \frac{1}{1-4x} - \frac{1}{1-2x} = \frac{2x}{(1-2x)(1-4x)}.$$

2. Για το (ε), εργαζόμενοι όπως στο Παράδειγμα 4.1.1, βρίσκουμε ότι $\sum_{n \geq 0} a_n x^n = (1-7x)/(1-2x)(1-3x)$ και $a_n = 5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για τα (α) - (γ), ξεκινάμε από την ταυτότητα (4.13). Παραγωγίζοντας και πολλαπλασιάζοντας το αποτέλεσμα επί x , παίρνουμε

$$\sum_{n \geq 0} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Παραγωγίζοντας εκ νέου την προηγούμενη ταυτότητα και πολλαπλασιάζοντας επί x , παίρνουμε

$$\sum_{n \geq 0} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Πράττοντας το ίδιο με την προηγούμενη ταυτότητα, παίρνουμε

$$\sum_{n \geq 0} n^3 x^n = \frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}.$$

Για το (δ), παρατηρούμε ότι

$$\sum_{n \geq 0} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) x^n = \left(\sum_{n \geq 0} x^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} n^2 x^n \right) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4}.$$

3. Παρατηρούμε ότι για μια αναδιάταξη $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ με τη δοσμένη ιδιότητα έχουμε είτε $\sigma_n = n$, είτε $\sigma_n = n-1$. Προφανώς, υπάρχουν ακριβώς a_{n-1} τέτοιες αναδιάταξεις με $\sigma_n = n$. Ας υποθέσουμε ότι $\sigma_n = n-1$. Τότε, για το μοναδικό δείκτη $1 \leq i \leq n$ με $\sigma_i = n$, έχουμε $i < n$. Από αυτό και την υπόθεση $|\sigma_i - i| \leq 1$ προκύπτει ότι $i = n-1$, οπότε $\sigma_{n-1} = n$. Συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν ακριβώς a_{n-2} αναδιάταξεις σ με τη δοσμένη ιδιότητα για τις οποίες ισχύει $\sigma_n = n-1$ και επομένως ότι ισχύει ο αναγωγικός τύπος $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ για $n \geq 3$. Αφού $a_1 = 1$ και $a_2 = 2$, έπεται ότι η ακολουθία (a_n) συμπίπτει με εκείνη του Παραδείγματος 4.1.1 και συνεπώς ότι $\sum_{n \geq 1} a_n x^n = 1/(1-x-x^2) - 1 = (x+x^2)/(1-x-x^2)$.
4. Θέτουμε $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση $a_{n+1} = 2a_n + n$ με x^n και αθροίζοντας για $n \in \mathbb{N}$, βρίσκουμε ότι

$$\frac{F(x)-1}{x} = 2F(x) + \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Το (α) προκύπτει λύνοντας ως προς $F(x)$. Για το (β), γράφουμε την ισότητα του (α) στη μορφή

$$F(x) = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{(1-x)^2}$$

και συμπεραίνουμε ότι $a_n = 2^{n+1} - n - 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

5. (α) Υπάρχουν $\binom{n}{k}$ τρόποι να επιλέξουμε τους δείκτες i με $\varepsilon_i = 0$ και 2^{n-k} τρόποι να επιλέξουμε τις τιμές $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$ των συντεταγμένων για τους υπόλοιπους δείκτες j . Κατά συνέπεια, έχουμε $a_{n,k} = 2^{n-k} \binom{n}{k}$ και

$$\sum_{k=0}^n a_{n,k} x^k = \sum_{k=0}^n 2^{n-k} \binom{n}{k} x^k = (x+2)^n.$$

(β) Θέτοντας $F(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} x^k$, έχουμε

$$F(x) + F(-x) = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{n,2k} x^{2k}.$$

Από την ισότητα αυτή και το (α) προκύπτει ότι

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{n,2k} x^{2k} = ((x+2)^n + (-x+2)^n) / 2.$$

(γ) Ζητάμε να υπολογίσουμε το άθροισμα $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{n,2k}$. Παρατηρούμε ότι αυτό προκύπτει θέτοντας $x = 1$ στη γεννήτρια συνάρτηση του (β) και συνεπώς ισούται με $(3^n + 1)/2$ (μια λύση στο ερώτημα αυτό με χρήση εκθετικών γεννητριών συναρτήσεων δόθηκε στο Παράδειγμα 4.3.2).

6. (α) Χρησιμοποιώντας την (4.14), υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a_n x^n &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} (-1/4)^k x^n = \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 2k} (-1/4)^k \binom{n-k}{k} x^n \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{m \geq 0} (-1/4)^k \binom{m+k}{k} x^{m+2k} = \sum_{k \geq 0} (-x^2/4)^k \sum_{m \geq 0} \binom{m+k}{k} x^m \\ &= \sum_{k \geq 0} (-x^2/4)^k \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \frac{1}{1-x} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{-x^2}{4(1-x)} \right)^k \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x^2/4(1-x)} = \frac{1}{1-x+x^2/4}. \end{aligned}$$

(β) Από το (α) παίρνουμε

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \frac{1}{(1-x/2)^2} = \sum_{n \geq 0} (n+1) \left(\frac{x}{2} \right)^n$$

και συμπεραίνουμε ότι $a_n = (n+1)/2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

7. (α) Υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} s_n x^{2n} &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n 2^k \binom{2n-k}{k} x^{2n} = \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq k} 2^k \binom{2n-k}{k} x^{2n} \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{m \geq 0} 2^k \binom{2m+k}{k} x^{2m+2k} = \sum_{k \geq 0} (2x^2)^k \sum_{m \geq 0} \binom{2m+k}{k} x^{2m}. \end{aligned}$$

Από την (4.14) προκύπτει ότι

$$\sum_{m \geq 0} \binom{2m+k}{k} x^{2m} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-x)^{k+1}} + \frac{1}{(1+x)^{k+1}} \right).$$

Μετά από τη σχετική αντικατάσταση και τον υπολογισμό των γεωμετρικών σειρών που προκύπτουν, καταλήγουμε στην ισότητα

$$\sum_{n \geq 0} s_n x^{2n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x-2x^2} + \frac{1}{1+x-2x^2} \right).$$

Γράφοντας

$$\frac{1}{1-x-2x^2} + \frac{1}{1+x-2x^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{1-2x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+2x} + \frac{1}{1-x} \right)$$

και χρησιμοποιώντας την (4.11) προκύπτει με τη γνωστή διαδικασία ο τύπος $s_n = (2^{2n+1} + 1)/3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Θεωρούμε την τυπική δυναμοσειρά

$$F(x) = \sum_{m \geq 0} x^m (1+2x)^m = \frac{1}{1-x(1+2x)}.$$

Ο συντελεστής του x^{2n} στην $F(x)$ είναι ίσος με

$$\sum_{m=n}^{2n} \binom{m}{2n-m} 2^{2n-m} = \sum_{k=0}^n 2^k \binom{2n-k}{k} = s_n.$$

Γράφοντας

$$F(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-2x} \right) = \sum_{m \geq 0} \frac{2^{m+1} + (-1)^m}{3} x^m$$

προκύπτει ο τύπος $s_n = (2^{2n+1} + 1)/3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

8. Έστω a_n το ζητούμενο πλήθος και έστω b_n το πλήθος των χρωματισμών με τις επιθυμητές ιδιότητες για τους οποίους το n έχει μπλε (ισοδύναμα, πράσινο) χρώμα. Θεωρώντας τις τρεις πιθανές περιπτώσεις για το χρώμα του n , βρίσκουμε ότι $a_n =$

$a_{n-1} + 2b_n$ και ότι $b_n = a_{n-2} + b_{n-1}$. Από αυτές προκύπτει η αναγωγική σχέση $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$. Με τη γνωστή διαδικασία, και λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές τιμές $a_0 = 1$ και $a_1 = 3$, καταλήγουμε στον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2} \left((1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1} \right).$$

9. Συμβολίζοντας με r_i το πλήθος από τις μπάλλες που επιλέγονται από το κουτί i , βρίσκουμε ότι το a_n είναι ίσο με το πλήθος των ασθενών συνθέσεων $(r_1, r_2, \dots, r_{10})$ του n με μέρη $r_i \in \{0, 1, 2\}$. Επομένως

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a_n x^n &= \sum_{r_i \in \{0, 1, 2\}} x^{r_1 + r_2 + \dots + r_{10}} = \prod_{i=1}^{10} \left(\sum_{r_i \in \{0, 1, 2\}} x^{r_i} \right) \\ &= (1 + x + x^2)^{10}. \end{aligned}$$

Γράφοντας

$$\begin{aligned} (1 + x + x^2)^{10} &= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^{2k} (1+x)^{10-k} = (1+x)^{10} + 10x^2(1+x)^9 + \\ &\quad \binom{10}{2} x^4(1+x)^8 + \binom{10}{3} x^6(1+x)^7 + \dots, \end{aligned}$$

υπολογίζουμε ότι

$$a_5 = \binom{10}{5} + 10 \binom{9}{3} + \binom{10}{2} \binom{8}{1} = 1452.$$

10. (α) Θέτοντας $r_1 = m_1$, $r_2 = 2m_2$ και $r_3 = 2m_3$, υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a_n x^n &= \sum_{m_i \geq 0} x^{r_1 + r_2 + r_3} = \sum_{m_i \geq 0} x^{m_1 + 2m_2 + 2m_3} \\ &= \left(\sum_{m_1 \geq 0} x^{m_1} \right) \left(\sum_{m_2 \geq 0} x^{2m_2} \right) \left(\sum_{m_3 \geq 0} x^{2m_3} \right) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)^2}. \end{aligned}$$

(β) Χρησιμοποιώντας την (4.14) για $k = 2$, συνάγουμε από το (α) ότι

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \frac{1+x}{(1-x^2)^3} = (1+x) \sum_{m \geq 0} \binom{m+2}{2} x^{2m},$$

οπότε $a_n = \binom{n/2+2}{2}$, αν ο n είναι άρτιος, και $a_n = \binom{(n+3)/2}{2}$, αν ο n είναι περιττός.

11. Το ζητούμενο πλήθος, έστω a_n , των διαμερίσεων του n ισούται με το πλήθος των τριάδων $(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{N}^3$ για τις οποίες ισχύει $m_1 + 2m_2 + 4m_3 = n$. Επομένως

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{m_i \geq 0} x^{m_1 + 2m_2 + 4m_3} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^4)}.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a_n x^n &= \frac{(1+x+x^2+x^3)(1+x^2)}{(1-x^4)^3} \\ &= (1+x+2x^2+2x^3+x^4+x^5) \sum_{m \geq 0} \binom{m+2}{2} x^{4m} \end{aligned}$$

και επομένως ότι $a_{4m} = a_{4m+1} = \binom{m+1}{2} + \binom{m+2}{2}$ και $a_{4m+2} = a_{4m+3} = 2\binom{m+2}{2}$, για $m \in \mathbb{N}$.

12. Εργαζόμενοι όπως στο Παράδειγμα 4.2.1 και θέτοντας $\sigma(0) = \tau(0) = 1$, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \sigma(n) x^n &= \sum_{m_i \geq 0} x^{m_1 + 2m_2 + 4m_4 + 5m_5 + \dots} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^5)\dots} \\ &= \frac{(1-x^3)(1-x^6)(1-x^9)\dots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots} \end{aligned}$$

και ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \tau(n) x^n &= \sum_{m_i \in \{0,1,2\}} x^{m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots} = \prod_{i \geq 1} (1+x^i+x^{2i}) \\ &= \prod_{i \geq 1} \frac{1-x^{3i}}{1-x^i} = \sum_{n \geq 0} \sigma(n) x^n \end{aligned}$$

και συμπεραίνουμε ότι $\sigma(n) = \tau(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

13. Στην περίπτωση (α) ζητάμε να απαριθμήσουμε τις ακολουθίες μήκους n που προκύπτουν ανακατεύοντας ακολουθίες από τρεις οικογένειες πεπερασμένων ακολουθιών, η μία με όρους από το σύνολο $\{0\}$, η δεύτερη από το $\{1\}$ και η τρίτη από το $\{2\}$. Εργαζόμενοι όπως στο Παράδειγμα 4.3.2 και χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.3.1, βρίσκουμε ότι η αντίστοιχη εκθετική γεννήτρια συνάρτηση είναι ίση με

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot e^x = \frac{e^{3x} - e^{-x}}{4} = \sum_{n \geq 0} \frac{(3^n + (-1)^{n-1}) x^n}{4 \cdot n!}$$

και καταλήγουμε στην απάντηση $(3^n + (-1)^{n-1})/4$, για $n \in \mathbb{N}$. Ομοίως, για το (β) βρίσκουμε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^3 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^3 = \frac{2e^{3x} + 6e^{-x}}{8} = \sum_{n \geq 0} \frac{(3^n + 3(-1)^n) x^n}{4 \cdot n!}$$

και καταλήγουμε στην απάντηση $(3^n + 3(-1)^n)/4$, για $n \in \mathbb{N}$.

14. Από τον τύπο

$$D_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)!$$

της Πρότασης 1.4.2 προκύπτει ότι ισχύει η (4.25) για $c_n = D_n$, $a_n = (-1)^n$ και $b_n = n!$. Συνεπώς, από την (4.24) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} D_n \frac{x^n}{n!} &= \left(\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!} \right) = \left(\sum_{n \geq 0} \frac{(-x)^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \geq 0} n! \frac{x^n}{n!} \right) \\ &= \frac{e^{-x}}{1-x}. \end{aligned}$$

Μια διαφορετική λύση μπορεί να προκύψει από τον αναγωγικό τύπο $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ της Άσκησης 22 (α) του Κεφαλαίου 1. Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας αυτή την ισότητα με $x^n/n!$ και αθροίζοντας για $n \geq 1$ παίρνουμε $F(x) - 1 = xF(x) + (e^{-x} - 1)$, όπου $F(x) = \sum_{n \geq 0} D_n x^n/n!$, δηλαδή την (4.27). Μια ακόμη λύση μπορεί να δοθεί γράφοντας την (4.27) στη μορφή

$$\left(\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \geq 0} D_n \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n \geq 0} n! \frac{x^n}{n!}$$

και εφαρμόζοντας κατάλληλα την Πρόταση 4.3.1 (εξηγήστε πώς).

15. Συμβολίζουμε με $F_k(x)$ το αριστερό μέλος της (4.28). Δείξαμε στην Άσκηση 12 του Κεφαλαίου 2 ότι ισχύει η αναγωγική σχέση $S(n, k) = kS(n-1, k) + S(n-1, k-1)$. Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση αυτή με x^n και αθροίζοντας για $n \geq k$, βρίσκουμε ότι $F_k(x) = kx F_k(x) + x F_{k-1}(x)$, δηλαδή ότι $F_k(x) = x F_{k-1}(x)/(1-kx)$. Το ζητούμενο προκύπτει από τη σχέση αυτή με επαγωγή στο k .
16. (α) Χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς του Παραδείγματος 4.1.1 για το $n \times 2$ γράφημα Μανχάταν και τις κορυφές του και σκεφτόμαστε ως εξής. Αφού τα παράγοντα δένδρα του G_n δεν περιέχουν κύκλους, κάθε τέτοιο δένδρο δεν περιέχει τουλάχιστον μία από τις ακμές $\{u_{n-1}, u_n\}$, $\{u_n, v_n\}$, $\{v_{n-1}, v_n\}$ και $\{u_{n-1}, v_{n-1}\}$. Τα παράγοντα δένδρα του G_n που δεν περιέχουν την ακμή $\{u_{n-1}, u_n\}$ περιέχουν αναγκαστικά τις $\{u_n, v_n\}$ και $\{v_{n-1}, v_n\}$ και βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχία (εξηγήστε) με τα παράγοντα δένδρα του G_{n-1} . Το ίδιο συμβαίνει με εκείνα που δεν περιέχουν την ακμή $\{u_n, v_n\}$, ή την $\{v_{n-1}, v_n\}$. Άρα, υπάρχουν ακριβώς $3a_{n-1}$ παράγοντα δένδρα του G_n που δεν περιέχουν μία από τις ακμές $\{u_{n-1}, u_n\}$, $\{u_n, v_n\}$ και $\{v_{n-1}, v_n\}$. Τα υπόλοιπα περιέχουν τις τρεις αυτές ακμές αλλά όχι την $\{u_{n-1}, v_{n-1}\}$. Τα δένδρα αυτά βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχία με τα παράγοντα δένδρα του G_{n-1} που περιέχουν την ακμή $\{u_{n-1}, v_{n-1}\}$. Σκεπτόμενοι όπως προηγουμένως, βρίσκουμε ότι υπάρχουν ακριβώς $a_{n-1} - a_{n-2}$ τέτοια δένδρα. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $a_n = 3a_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-2}) = 4a_{n-1} - a_{n-2}$ για $n \geq 2$.
- (β) Προκύπτει από το (α) όπως στο Παράδειγμα 4.1.1.

17. (α) Έχουμε

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \geq 0} b_n x^n &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{\lfloor 2n/3 \rfloor} a_{n-k,k} x^n = \sum_{m \geq 0} \sum_{k=0}^{2m} a_{m,k} x^{m+k} \\
 &= \sum_{m \geq 0} x^m \sum_{k=0}^{2m} a_{m,k} x^k = \sum_{m \geq 0} x^m (1-x+x^2)^m \\
 &= \sum_{m \geq 0} (x-x^2+x^3)^m = \frac{1}{1-x+x^2-x^3}.
 \end{aligned}$$

(β) Από το αποτέλεσμα του (α) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \geq 0} b_n x^n &= \frac{1+x}{1+x^4} = (1+x)(1-x^4+x^8-x^{12}+\dots) \\
 &= 1+x-x^4-x^5+x^8+x^9-x^{12}-x^{13}+\dots
 \end{aligned}$$

και συνεπώς το ζητούμενο.

Κεφάλαιο 5

Παράρτημα

Υπενθυμίζουμε την αρχή του ελαχίστου για τους φυσικούς αριθμούς και την ισοδύναμη αρχή της πεπερασμένης μαθηματικής επαγωγής, σε δύο της μορφές.

Πρόταση 5.0.1 Έστω $S \subseteq \mathbb{N}$.

(α) (Αρχή του Ελαχίστου) Αν $S \neq \emptyset$, τότε το S έχει ελάχιστο στοιχείο, δηλαδή υπάρχει $a \in S$ τέτοιο ώστε να ισχύει $a \leq x$ για κάθε $x \in S$.

(β) (Αρχή της Πεπερασμένης Επαγωγής, πρώτη μορφή) Αν ισχύουν

- $0 \in S$ και
- $k \in S \Rightarrow k + 1 \in S$,

τότε $S = \mathbb{N}$.

(γ) (Αρχή της Πεπερασμένης Επαγωγής, δεύτερη μορφή) Αν ισχύουν

- $0 \in S$ και
- $0, 1, \dots, k \in S \Rightarrow k + 1 \in S$,

τότε $S = \mathbb{N}$.

Για περισσότερες λεπτομέρειες και παραδείγματα παραπέμπουμε στην Παράγραφο 1.1 του [5]. Θεωρούμε την ακόλουθη πρόταση γνωστή (βλέπε π.χ. [5, Θεώρημα 1.2.3]).

Πρόταση 5.0.2 (Ευκλείδεια Διαίρεση) Δοσμένων ακεραίων $n \in \mathbb{Z}$ και $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, υπάρχουν μοναδικοί ακεραίοι q, r τέτοιοι ώστε $n = qm + r$ και $0 \leq r < m$.

Οι ακέραιοι q και r λέγονται *πηλίκo και υπόλοιπο* της Ευκλείδειας διαίρεσης του n με το m , αντίστοιχα. Στην περίπτωση $r = 0$, δηλαδή όταν υπάρχει $q \in \mathbb{Z}$ με $n = qm$, λέμε ότι ο ακέραιος n *διαιρείται* με το m και ότι ο n είναι *ακέραιο πολλαπλάσιο* του m . Η σχέση (5.1) στην πρόταση που ακολουθεί λέγεται *m -αδική αναπαράσταση* του n . Οι ακέραιοι a_i είναι τα *ψηφία* του n με βάση το m .

Πρόταση 5.0.3 Έστω $m, k \in \mathbb{N}$, με $m \geq 2$. Κάθε φυσικός αριθμός $n < m^{k+1}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$n = a_0 + a_1m + a_2m^2 + \dots + a_k m^k, \quad (5.1)$$

όπου a_0, a_1, \dots, a_k είναι ακέραιοι με $0 \leq a_i \leq m - 1$ για $i \in \{0, 1, \dots, k\}$.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής στη μορφή της Πρότασης 5.0.1 (β). Το ζητούμενο είναι τετριμμένο για $k = 0$. Έστω ότι $k \geq 1$ και ότι το ζητούμενο ισχύει για τον $k - 1$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τον k . Έστω ακέραιος $0 \leq n < m^{k+1}$. Από την Πρόταση 5.0.2, υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι q και r τέτοιοι ώστε

$$n = r + qm \quad (5.2)$$

και $0 \leq r < m$. Από την υπόθεση $n \geq 0$ συμπεραίνουμε ότι $q \geq 0$. Έχουμε επίσης $qm \leq qm + r = n < m^{k+1}$, οπότε $0 \leq q < m^k$. Επομένως, από την υπόθεση της επαγωγής, ο q αναπαρίσταται στη μορφή

$$q = a_1 + a_2m + \dots + a_k m^{k-1} \quad (5.3)$$

για μοναδικούς ακεραίους a_i με $0 \leq a_i \leq m - 1$ για $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Θέτοντας $r = a_0$, από τις (5.2) και (5.3) προκύπτει ότι ο n αναπαρίσταται στη μορφή (5.1). Για τη μοναδικότητα, έστω ότι η

$$n = b_0 + b_1m + b_2m^2 + \dots + b_k m^k$$

είναι επίσης m -αδική αναπαράσταση του n . Μπορούμε να γράψουμε $n = b_0 + tm$, όπου b_0 και

$$t = b_1 + b_2m + \dots + b_k m^{k-1} \quad (5.4)$$

είναι ακέραιοι με $0 \leq b_0 \leq m - 1$. Από την (5.2) και τη μοναδικότητα στην Πρόταση 5.0.2 συμπεραίνουμε ότι $b_0 = r = a_0$ και $t = q$. Από την τελευταία ισότητα και τη μοναδικότητα της αναπαράστασης (5.3) προκύπτει επίσης ότι $b_i = a_i$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Αυτό ολοκληρώνει την επαγωγή και συνεπώς την απόδειξη της πρότασης. \square

Βιβλιογραφία

- [1] Χρήστος Α. Αθανασιάδης, Εισαγωγή στη Συνδυαστική Θεωρία των Μερικώς Διατεταγμένων Συνόλων, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2006, σημειώσεις διαθέσιμες στο <http://www.math.uoa.gr/~caath>.
- [2] Χρήστος Α. Αθανασιάδης, Αλγεβρική και Απαριθμητική Συνδυαστική, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2012, σημειώσεις διαθέσιμες στο <http://www.math.uoa.gr/~caath>.
- [3] Ian Anderson, Combinatorics of Finite Sets, Oxford Science Publications, Oxford University Press, New York, 1987.
- [4] George Andrews, The Theory of Partitions, Addison-Wesley, 1976; δεύτερη εκτύπωση, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, 1984.
- [5] Δημήτριος Α. Βάρσος, Δημήτριος Ι. Δεριζιώτης, Ιωάννης Π. Εμμανουήλ, Μιχαήλ Π. Μαλιάκας και Ολυμπία Ταλέλλη, Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα, δεύτερη έκδοση, Σοφία, 2005, διαθέσιμο στο <http://www.math.uoa.gr/~algebra>.
- [6] C.L Liu, Στοιχεία Διακριτών Μαθηματικών, δεύτερη έκδοση, McGraw-Hill, 1985, μετάφραση από τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.
- [7] László Lovász, József Pelikan and Katalin Vesztergombi, Discrete Mathematics: Elementary and Beyond, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2003.
- [8] David Lubell, *A short proof of Sperner's theorem*, J. Combin. Theory **1** (1966), 299.
- [9] James R. Munkres, Topology: A First Course, Prentice Hall, 1974.
- [10] Richard P. Stanley, Enumerative Combinatorics, vol. 1, Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 1986; δεύτερη εκτύπωση, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **49**, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

- [11] Richard P. Stanley, *Some applications of algebra to combinatorics*, Discrete Appl. Math. **34** (1991), 241–277.
- [12] Richard P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, vol. 2, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **62**, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [13] Χαράλαμπος Α. Χαραλαμπίδης, *Συνδυαστική, Τεύχος 1, δεύτερη έκδοση*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2000.
- [14] Χαράλαμπος Α. Χαραλαμπίδης, *Συνδυαστική, Τεύχος 2, Εκδόσεις Συμμετρία*, Αθήνα 1996.
- [15] Günter M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Graduate Texts in Mathematics **152**, Springer-Verlag, New York, 1995.