24

Μάθημα 9ο

$$T_N = \sum_{K=1}^{N} T_{K-1} \cdot T_{N-K} \quad (1), \quad N>0. \quad T_0 = 1.$$

Θέλω να υπολογίσω το $\sum_{N=0}^{\infty} T_N x^N = T(x)$

$$(1) \overset{\cdot x^N}{\Rightarrow} T_N x^N = \sum_{K=1}^{N} T_{K-1} T_{N-K} \, x^N \Rightarrow$$

$$\sum_{N=1}^{\infty} T_N x^N = \sum_{N=1}^{\infty}\sum_{K=1}^{N} T_{K-1} T_{N-K} x^N \Rightarrow T(x) - 1 = x \sum_{n=1}\sum_{K=1} T_{K-1} T_{N-K} x^N$$

$$= x T^2(x) \Rightarrow x T^2(x) - T(x) + 1 = 0 \Rightarrow x \cdot T(x) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4x}\right)$$

επιλύοντας την δευτεροβάθμια ως προς $T(x)$.

Τελικά:

$x T(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)$ (2) κρατάμε το "$-$" για να έχουμε ισότητα για $x=0$.

$$(2) \quad x T(x) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{N}(-4x)^N$$

Άρα $T_N = [x^N] T(x)$

$$T_N = \left(-\frac{1}{2}\right)\binom{1/2}{N+1}(-4)^{N+1}$$

Με πράξεις $\boxed{T_N = \frac{1}{N+1}\binom{2N}{N}}$

Η αρχή των πράξεων. $T_N = \left(-\frac{1}{2}\right)\binom{1/2}{N+1}(-4)^{N+1}$

$$\binom{1/2}{N+1} = \frac{1/2(1/2-1)\cdots\cdots(1/2-(N+1)+1)}{(N+1)!}$$

$$= \frac{1/2\left(\frac{1-2\cdot1}{2}\right)\left(\frac{1-2\cdot2}{2}\right)\cdots\left(\frac{1-2N}{3}\right)}{(N+1)!}$$

$$= 1/2(-1)^N \frac{1\cdot3\cdots(2N-1)}{2^N(N+1)!}$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^N \frac{1}{2^N}\frac{1\cdots\cdots(2N)}{2(2\cdot2)\cdots(2N)\,(N+1)!}$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^N\frac{1}{2^N}\frac{2N!}{2^N N!(N+1)!} = \frac{1}{2}(-1)^N\frac{1}{2^N}\frac{1}{2^N}\frac{1}{N+1}\binom{2N}{N}$$

$= \ldots\ldots$

Μέθοδος Εγκλεισμού Αποκλεισμού

Έστω σύνολο με N στοιχεία. Έστω $C_1, \dots, C_t \subseteq A$ όπου $|A| = N$

Θέλουμε το $N(\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_t) = \underbrace{N - N(C_1) - N(C_2) - \dots - N(C_t)}_{\text{λάθος}}$

number

Το σωστό: $N(\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_t) = N - N(C_1) - N(C_2) - \dots - N(C_t)$

$$+ \underbrace{N(C_1 C_2) + N(C_1 C_3) + \dots + N(C_{t-1} C_t)}_{\sum_{1 \le t_1 \le t_2 \le t} N(C_{t_1} C_{t_2})}$$

$$- N(C_1 C_2 C_3) - \dots - N(C_{t-2} C_{t-1} C_t)$$

$$(-1)^3 \sum_{1 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le t} N(C_{t_1} C_{t_2} C_{t_3}) \dots (-1)^t N(C_1 \dots C_t)$$

$$N(\bar{C}_1 \dots \bar{C}_t) = N - \underbrace{\sum_{1 \le t_1 \le t} N(C_{t_1})}_{\text{όροι } t} + \underbrace{\sum_{1 \le t_1 < t_2 \le t} N(C_{t_1} C_{t_2})}_{\binom{t}{2}} + \dots + (-1)^t \underbrace{N(C_1 \dots C_t)}_{\binom{t}{t}}$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ.</u>

Έστω x τυχόν στοιχείο του συνόλου

$1^η$ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ. x δεν ανήκει σε κανένα από τα $C_1, \dots, C_t$
το x μετριέται μια φορά στα αριστερά του τύπου και μία στα δεξιά.

$2^η$ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ. x ανήκει σε ένα ακριβώς από τα $C_1, \dots C_t$
μετριέται 0 φορές δεξιά και αριστερά

$r^η$ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ x ανήκει σε r ακριβώς από τα $C_1, \dots C_t$
Αριστερά μετρά 0 φορές, δεξιά μετρά $1 - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} \dots (-1)^r \binom{r}{r} = (1-1)^r$
δηλαδή 0 φορές.

Πόσα στοιχεία είναι "έξω" από τα $C_1, \dots, C_5$

Αριθμός των "έξω" $= N - C_1 - C_2 - \dots - C_5 + N(C_1 C_2) + \dots + N(C_4 C_5)$
$- N(C_1 C_2 C_3) - N(C_1 C_2 C_4) - \dots - N(C_3 C_4 C_5) \dots$

Ασκήσεις

1) Ν.δ.ο. καθε θετικός ακέραιος γραφεται μοναδικά σαν αθροισμα διαφορετικών δυνάμεων του 2

Πχ $202 = 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^1 \xrightarrow{\text{δυαδικό σύστημα}} 11001010$

Γεννήτρια $a_r = |\{$τροποι να γραφει το r ως αθροισμα διαφορετικών δυνάμεων του $2\}|$

$g(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^k})$
x^r

Θελουμε $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + \dots = \frac{1}{1-x}$

$\Leftrightarrow g(x)(1-x) = 1 \Leftrightarrow \underbrace{(1-x)(1+x)}(1+x^2)(1+x^4)\dots = 1$

$\Leftrightarrow (1-\underbrace{x^2)(1+x^2}_{1-x^4})(1+x^4)\dots = 1$