Διακριτά Μαθηματικά

Μάθημα 1ο

Εισαγωγή

Θα μάθουμε 1. Να μετράμε
2. Να προσθέτουμε

Μέγα αμάρτημα: Διπλομέτρηση

→ Ακολουθίες (πεπερασμένων (αριθμών) όρων) από 0,1,2. Τρεις το πλήθος οι ακολουθίες.
Πόσες περιέχουν κ τα 3 ψηφία 0,1,2;
Έστω ότι έχουν n όρους.

$\cancel{3!\binom{n}{3}\cdot 3^{n-3}}$ ← λάθος

Απάντηση:
Διπλομετρήσαμε!
Όλες οι ακολουθίες $3^n - 2^n - 2^n - 2^n$ ← δεν έχουν 2
δεν έχουν 0 — δεν έχουν 1

Πάλι λάθος.

$$3^n - 2^n - 2^n - 2^n + 1 + 1 + 1$$

Πριν διπλομέτρησα αυτές που έχουν μόνο ένα ψηφίο.

Μέθοδος Εγκλεισμού - Αποκλεισμού
Γεννήτριες Συναρτήσεις

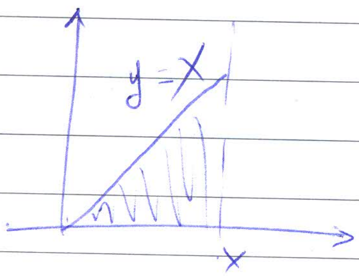
Άλλα σημεία που πρέπει να προσέχουμε:
(A) Μετράει ή όχι η σειρά;

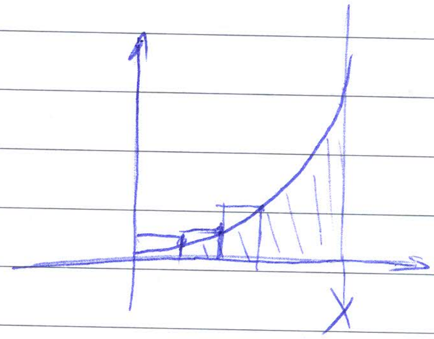
Συνδυασμός
Διάταξη ή Μετάθεση

(B) Τα βασικά αντικείμενα είναι διακεκριμένα ή όχι.
n διακεκριμένα άτομα – m χαρτάκια. Με πόσους τρόπους μπορώ να κατανείμω m αντικείμενα σε n υποδοχές;
1η Περίπτωση m διακεκ. αντικείμενα
n^m τρόπους.

2η Περίπτωση Αν τα αντικείμενα δεν είναι διακεκριμένα
Άλλη απάντηση.

- $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $1^2+2^2+\cdots+n^2 = ;$
- $\int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$, • $\int_0^x x^2 dt = x^3/3$





- $1+x+\cdots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \implies \sum_{k=0}^{n} k x^{k-1} = \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)' \quad (1)$$

Για $x=1$ έχουμε βρεί το $1+2+3+\cdots+n$.

$$(1) \implies \sum_{k=0}^{n} k x^k = x\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)'$$

$$\implies \sum_{k=0}^{n} k^2 x^{k-1} = \left[x\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)'\right]'$$

Για $x=1$ $1^2+2^2+\cdots+n^2$.

Διατάξεις κ Συνδυασμοί

n-αντικείμενα.

Επιλογές m αντικειμένων χωρίς επανάληψη κ με διάταξη $P(n,m) = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$

$$C(n,m) = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$ διωνυμικοί συντελεστές

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$ ← Τύπος του Newton

Αποδ: $$\underbrace{(1+x)\cdots(1+x)}_{n \text{ φορές}} = \sum_{k=0}^{n} \bigcirc \, x^k$$

Ιδιότητες:

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} \qquad n, m \geq 1$$

Άσκηση: Νδο

$$\binom{n+r+1}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k}$$

Απόδειξη

$$\binom{n+r+1}{r} = \binom{n+r}{r} + \binom{n+r}{r-1} = \binom{n+r}{r} + \binom{n+r-1}{r-1} + \binom{n+r-1}{r-2}$$

$$= \cdots = \binom{n+r}{r} + \cdots + \binom{n}{0} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k}.$$

Άσκηση

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r}$$

Απόδειξη $$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n+1}{n-r} = \binom{r+(n-r)+1}{n-r}$$

Με εφαρμογή του $\binom{n+r+1}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k}$

έχουμε $$\sum_{k=0}^{n-r} \binom{r+k}{k} = \sum_{k=0}^{n-r} \binom{r+k}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} \qquad \blacksquare$$

$\rightarrow$ $$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^{k}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad |x|<1$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

Άσκηση: Να υπολογιστεί το $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ως άθροισμα δυνάμεων του x

Απόδειξη:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \binom{-1/2}{k} x^{k}$$

$$= \binom{-1/2}{k} = \frac{(-1/2)(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-1/2-(k-1))}{k!} =$$

$$= \frac{(-1)^{k} \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdots\frac{2k-1}{2}}{k!} = \frac{(-1)^{k}}{2^{k}} \frac{1\cdot 3\cdots 2(k-\frac{1}{2})}{k!} =$$

$$= \frac{(-1)^{k}(2k)!}{(2)^{k}\cdot(2^{k})(k!)^{2}} = \frac{(-1)^{k}}{2^{k}} \frac{(2k)!}{2^{k-1}(k!)^{2}} = (-1)^{k}\cdot 2^{-2k}\binom{2k}{k}$$

Μάθημα 2ο

n-αντικείμενα, t-ομάδες, $q_1, q_2, \dots q_t$
διακεκριμένα σε κάθε ομάδα.

Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε τα αντικείμενα;

$$\frac{n!}{q_1! \cdots q_t!}.$$

Εφαρμογή: Να αποδειχθεί ότι $(k!)!$ διαιρείται ακριβώς από το $(k!)^{(k-1)!}$

Απόδειξη: $\frac{(k!)!}{(k!)^{(k-1)!}}$ Θεωρούμε $k!$ αντικείμενα κ τα χωρίζουμε σε $(k-1)!$ ομάδες, k στοιχείων.

Πλήθος διατάξεων $\frac{(k!)!}{(k!)^{(k-1)!}}$.

→ Υποσύνολα: n στοιχεία → έχουν 2^n υποσύνολα.

Πολυ-υποσύνολα n στοιχεία →
Το i στοιχείο εμφανίζεται το πολύ — $\prod_{i=1}^{n}(q_i+1)$
q_i φορές.

Μεταθέσεις κ συνδυασμοί με επανάληψη

n στοιχεία

- Διατάξεις r στοιχείων με επανάληψη : n^r.
- Συνδυασμοί " " " " : $\frac{n^r}{r!}$ ← ΟΧΙ!

$x_1 \leq \dots \leq x_n \iff x_1 < x_2+1 < \dots < x_r + r-1$

γνησίως αύξουσες στο $\{1, \dots n+r-1\}$

Τελικά $\binom{n+r-1}{r}$. ■

$\sqcup \ \sqcup \ \cdots \ \sqcup$

n - υποδοχές διακεκριμένες. r - μπάλες διακεκριμένες.

Οι μπάλες έχουν n^r επιλογές να τοποθετηθούν

Αν οι μπάλες τοποθετούνται η μία πάνω στην άλλη έχω $n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)$