Κεφάλαιο 2

Θεώρημα John – Λήμμα Dvoretzky-Rogers

2.1 Ελλειψοειδές μέγιστου όγκου ενός κυρτού σώματος

Ορισμός 2.1.1. *Ελλειψοειδές* στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα κυρτό σώμα της μορφής

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, v_i\rangle^2}{\alpha_i^2} \leq 1 \right\}, \tag{2.1.1}$$

όπου $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ και $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί (οι διευθύνσεις και τα μήκη των ημιαξόνων του E αντίστοιχα).

Πρόταση 2.1.2. *Ένα κυρτό σώμα E στον $\mathbb{R}^n$ είναι ελλειψοειδές αν και μόνο αν υπάρχει αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός T ($T \in GL(n)$) ώστε $E = T(B_2^n)$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το E είναι ελλειψοειδές, δηλαδή ορίζεται από την (2.1.1) για κάποια ορθοκανονική βάση $\{v_1, \ldots, v_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ και κάποιους $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$. Έστω T ο γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται από τις $T(v_i) = \alpha_i v_i$, $i = 1, \ldots, n$. Ο T είναι προφανώς αντιστρέψιμος, και $x \in T(B_2^n)$ αν και μόνο αν υπάρχει $y = \sum_{j=1}^{n} t_j v_j \in B_2^n$ με $x = Ty$. Τότε όμως, η ισότητα

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, v_i\rangle^2}{\alpha_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \sum_{j=1}^{n} t_j \alpha_j v_j, v_i\rangle^2}{\alpha_i^2} = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \tag{2.1.2}$$

δείχνει ότι $x \in T(B_2^n)$ αν και μόνο αν $x \in E$, δηλαδή $E = T(B_2^n)$.
Αντίστροφα, έστω $T \in GL(n)$ και $E = T(B_2^n)$. Αν γράψουμε $S = T^{-1}$, έχουμε

$$\|x\|_E^2 = \|x\|_{S^{-1}(B_2^n)}^2 = \|Sx\|_2^2 = \langle Sx, Sx\rangle = \langle S^* Sx, x\rangle. \tag{2.1.3}$$

Ο S^*S είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, άρα γράφεται στη μορφή U^*DU όπου D διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία $\alpha_1^{-2},\ldots,\alpha_n^{-2}$ (όπου α_i θετικοί πραγματικοί αριθμοί) και ο U είναι ορθογώνιος πίνακας. Θεωρούμε το διαγώνιο πίνακα $D_1=\sqrt{D}$ με διαγώνια στοιχεία τα $\alpha_1^{-1},\ldots,\alpha_n^{-1}$. Αφού ο U είναι ορθογώνιος, έχουμε $S^*S=A^2$, όπου $A=U^*D_1U$. Δηλαδή,

$$\|x\|_E^2=\langle A^2x,x\rangle=\|Ax\|_2^2=\|D_1Ux\|_2^2=\sum_{i=1}^n\frac{\langle Ux,e_i\rangle^2}{\alpha_i^2}=\sum_{i=1}^n\frac{\langle x,v_i\rangle^2}{\alpha_i^2},\tag{2.1.4}$$

όπου τα $v_i=U^*e_i$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Έπεται ότι $x\in E$ αν και μόνο αν ικανοποιείται η (2.1.1) για τα συγκεκριμένα v_i και α_i, δηλαδή το E είναι ελλειψοειδές. □

Παρατήρηση. Από την απόδειξη είναι φανερό ότι ο όγκος του E ισούται με

$$|E|=|B_2^n|\prod_{i=1}^n\alpha_i.\tag{2.1.5}$$

Θεωρούμε τώρα ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και την οικογένεια $\mathcal{E}(K)$ όλων των *ελλειψοειδών* που περιέχονται στο K. Ο F. John (1948) έδειξε ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές E που περιέχεται στο K και έχει τον μέγιστο δυνατό όγκο. Θα λέμε ότι το E είναι το **ελλειψοειδές μέγιστου όγκου** του K. Θα δούμε ταυτόχρονα ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές E που περιέχει το K και έχει ελάχιστο όγκο:

Θεώρημα 2.1.3. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές $E\supseteq K$ με ελάχιστο όγκο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{F}(K)$ όλων των ελλειψοειδών που περιέχουν το K και ορίζουμε

$$V=\inf\{|E|:\ E\in\mathcal{F}(K)\}>0.\tag{2.1.6}$$

Υπάρχει ακολουθία $T_m\in GL(n)$ για την οποία έχουμε $E_m=T_m^{-1}(B_2^n)\supseteq K$ και

$$|E_m|=\frac{|B_2^n|}{|\det(T_m)|}\to V.\tag{2.1.7}$$

Αφού $\|T_m:X_K\to\ell_2^n\|\leq 1$ για κάθε $m\in\mathbb{N}$, μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $\{T_{k_m}\}$ και $S\in L(\mathbb{R}^n)$ με $T_{k_m}\to S$. Τότε,

$$|\det(S)|=|B_2^n|/V>0,\tag{2.1.8}$$

άρα $S\in GL(n)$. Ορίζουμε $E=S^{-1}(B_2^n)$. Τότε,

$$\|S:X_K\to\ell_2^n\|=\lim_{m\to\infty}\|T_{k_m}:X_K\to\ell_2^n\|\leq 1,\tag{2.1.9}$$

άρα $E \supseteq K$. Αφού $|E| = V$, το E είναι ένα ελλειψοειδές που περιέχει το K και έχει τον ελάχιστο δυνατό όγκο.

Δείχνουμε τώρα ότι υπάρχει ένα μόνο ελλειψοειδές με αυτή την ιδιότητα. Έστω ότι τα E_1 και E_2 περιέχουν το K και έχουν ελάχιστο όγκο. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $E_1 = B_2^n$ είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, και

$$E_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \langle x, v_i\rangle^2/\alpha_i^2 \leq 1 \right\}. \tag{2.1.10}$$

Θεωρούμε ένα τρίτο ελλειψοειδές, το

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(1+\alpha_i^{-2})\langle x, v_i\rangle^2 \leq 1 \right\}. \tag{2.1.11}$$

Αφού $F \supseteq E_1 \cap E_2 \supseteq K$, έχουμε

$$|F| \geq |E_1| = |E_2| = |B_2^n|, \tag{2.1.12}$$

άρα $\alpha_1 \cdots \alpha_n = 1$. Παίρνοντας υπόψιν την (2.1.5), γράφουμε την (2.1.12) στη μορφή

$$\begin{aligned} 1 = \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 &\leq \prod_{i=1}^n \frac{2}{1+\alpha_i^{-2}} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{2\alpha_i^2}{1+\alpha_i^2} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{2\alpha_i}{1+\alpha_i^2}. \end{aligned}$$

Όμως, $2\alpha_i \leq 1+\alpha_i^2$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ με ισότητα μόνο αν $\alpha_i = 1$. Άρα, $\alpha_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Έπεται ότι $E_1 = E_2$. $\square$

Το Θεώρημα 2.1.3 και ένα απλό επιχείρημα δυϊσμού εξασφαλίζουν την ύπαρξη και τη μοναδικότητα του ελλειψοειδούς μέγιστου όγκου του K.

Θεώρημα 2.1.4. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές $E \in \mathcal{E}(K)$ με μέγιστο όγκο.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.1.3 υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές F ελάχιστου όγκου του K°. Θεωρούμε το $E = F^\circ$. Τότε $E \subseteq K$, το E είναι ελλειψοειδές (άσκηση) και αν E_1 είναι ένα άλλο ελλειψοειδές με $E_1 \subseteq K$, τότε $E_1^\circ \supseteq K^\circ$, άρα $|E_1^\circ| \geq |F|$. Τότε,

$$|E_1| = \frac{|B_2^n|^2}{|E_1^\circ|} \leq \frac{|B_2^n|^2}{|F|} = |E|. \tag{2.1.13}$$

Ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο αν $E_1^\circ = F$, δηλαδή $E_1 = E$. Άρα, το E είναι το μοναδικό ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. $\square$

2.2 Το θεώρημα του John: στοιχειώδης απόδειξη

Ο F. John (1948) έδειξε ότι αν η μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, τότε $B_2^n \subseteq \sqrt{n}K$. Άμεση συνέπεια αυτού του ισχυρισμού είναι ένα άνω φράγμα για την απόσταση Banach-Mazur τυχόντος n-διάστατου χώρου με νόρμα από τον ℓ_2^n.

Θεώρημα 2.2.1. *Για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X έχουμε $d(X, \ell_2^n) \leq \sqrt{n}$.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Θεωρούμε τη μοναδιαία μπάλα B_X του X και το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου E της B_X. Υπάρχει $T \in GL(n)$ ώστε $E = T^{-1}(B_2^n)$. Τότε, $T(B_X) \subseteq B_2^n$ και η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του $T(B_X)$. Αν δεχτούμε το θεώρημα του John, τότε

$$\frac{1}{\sqrt{n}} B_2^n \subseteq T(B_X) \subseteq B_2^n. \tag{2.2.1}$$

Έπεται ότι

$$\|T : X \to \ell_2^n\| \cdot \|T^{-1} : \ell_2^n \to X\| \leq 1 \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n}, \tag{2.2.2}$$

άρα, $d(X, \ell_2^n) \leq \sqrt{n}$. □

Το Θεώρημα 2.2.1 και η πολλαπλασιαστική τριγωνική ανισότητα για την d μας δίνουν ένα άνω φράγμα για τη διάμετρο του Banach-Mazur compactum.

Θεώρημα 2.2.2. *Αν X και Y είναι δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα, τότε $d(X, Y) \leq n$.* □

Δίνουμε τώρα μια στοιχειώδη απόδειξη του Θεωρήματος του John:

Θεώρημα 2.2.3. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το K. Τότε,*

$$B_2^n \subseteq \sqrt{n}K. \tag{2.2.3}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει. Τότε, υπάρχει x στο σύνορο του K το οποίο είναι εσωτερικό σημείο της $(1/\sqrt{n})B_2^n$. Αλλάζοντας συντεταγμένες αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο του K στο x είναι παράλληλο με το $\{x : x_1 = 0\}$. Δηλαδή,

$$K \subset P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x_1| \leq \frac{1}{c} \right\}, \tag{2.2.4}$$

όπου $c > \sqrt{n}$. Για κάθε $a, b > 0$ ορίζουμε το ελλειψοειδές

$$E_{a,b} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : a^2 x_1^2 + b^2 \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\}. \tag{2.2.5}$$

Ισχυρισμός. Αν $\frac{a^2-b^2}{c^2}+b^2\leq 1$, τότε $K\subseteq E_{a,b}$.

Πράγματι: αν $y\in K$, τότε $y\in P\cap B_2^n$. Άρα,

$$|y_1|\leq \frac{1}{c}\quad \text{και}\quad \sum_{i=1}^n y_i^2\leq 1. \tag{2.2.6}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} a^2y_1^2+b^2\sum_{i=2}^n y_i^2 &= (a^2-b^2)y_1^2+b^2\sum_{i=1}^n y_i^2\\ &\leq \frac{a^2-b^2}{c^2}+b^2\\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Δηλαδή, $y\in E_{a,b}$. □

Ο όγκος του $E_{a,b}$ ισούται με $|E_{a,b}|=|B_2^n|/(ab^{n-1})$. Αν λοιπόν $ab^{n-1}>1$, τότε $|E_{a,b}|<|B_2^n|$. Με την υπόθεση ότι $c>\sqrt{n}$, θα δείξουμε ότι υπάρχουν $a,b>0$ που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις

$$ab^{n-1}>1\quad \text{και}\quad \frac{a^2-b^2}{c^2}+b^2\leq 1. \tag{2.2.7}$$

Αυτό είναι άτοπο, γιατί θα έχουμε βρεί ελλειψοειδές που περιέχει το K και έχει όγκο γνήσια μικρότερο από τον όγκο της B_2^n.

Για κάθε $\varepsilon\in(0,1/2)$, θέτουμε $b_\varepsilon=1-\varepsilon$ και $a_\varepsilon=(1+\varepsilon+2\varepsilon^2)^{n-1}$. Τότε,

$$a_\varepsilon b_\varepsilon^{n-1}=[(1-\varepsilon)(1+\varepsilon+2\varepsilon^2)]^{n-1}=(1+\varepsilon^2-2\varepsilon^3)^{n-1}>1. \tag{2.2.8}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \frac{a_\varepsilon^2-b_\varepsilon^2}{c^2}+b_\varepsilon^2 &= \frac{(1+\varepsilon+2\varepsilon^2)^{2(n-1)}}{c^2}+\left(1-\frac{1}{c^2}\right)(1-\varepsilon)^2\\ &= \frac{1}{c^2}[1+2(n-1)\varepsilon+O(\varepsilon^2)]+\left(1-\frac{1}{c^2}\right)(1-2\varepsilon+\varepsilon^2)\\ &= 1+2\varepsilon\left(\frac{n}{c^2}-1\right)+O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Αφού $(n/c^2)-1<0$, είναι φανερό ότι η ποσότητα αυτή γίνεται μικρότερη από 1 αν αφήσουμε το $\varepsilon\to 0^+$. Για μικρό λοιπόν $\varepsilon>0$, το ελλειψοειδές $E_{a_\varepsilon,b_\varepsilon}$ μας οδηγεί σε άτοπο. □

2.3 Σημεία επαφής και η αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης

Υποθέτουμε ότι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K είναι η B_2^n. Το $u \in \mathbb{R}^n$ λέγεται *σημείο επαφής* των K και B_2^n αν $\|u\|_2 = \|u\|_K = 1$, δηλαδή αν $x \in \mathrm{bd}(K) \cap \mathrm{bd}(B_2^n)$. Η «πλήρης έκδοση» του θεωρήματος του John περιγράφει την κατανομή των σημείων επαφής πάνω στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}.

Θεώρημα 2.3.1. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$ και σημεία επαφής $u_1, \dots, u_m$ των K και B_2^n ώστε*

$$x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle x, u_j \rangle u_j \tag{2.3.1}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Παρατηρήσεις. Το Θεώρημα 2.3.1 λέει ότι η ταυτοτική απεικόνιση I του $\mathbb{R}^n$ αναπαρίσταται στη μορφή

$$I = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j \otimes u_j, \tag{2.3.2}$$

όπου $u_j \otimes u_j$ είναι η προβολή στην διεύθυνση του u_j: $(u_j \otimes u_j)(x) = \langle x, u_j \rangle u_j$.

Από την (2.3.1) έπεται ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle x, u_j \rangle^2. \tag{2.3.3}$$

Επίσης, παίρνοντας $x = e_i$, $i = 1, \dots, n$, όπου $\{e_1, \dots, e_n\}$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle e_i, u_j \rangle^2 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, u_j \rangle^2 \\ &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \|u_j\|_2^2 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = n. \tag{$*$}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος. Από την $(*)$, αν υπάρχει η ζητούμενη αναπαράσταση θα πρέπει να ισχύει $\sum(\lambda_j/n) = 1$. Αυτό λοιπόν που χρειάζεται να δείξουμε είναι ότι ο I/n γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός προβολών της μορφής $u \otimes u$, όπου u σημείο επαφής των K και B_2^n. Ορίζουμε

$$(**) \qquad T = \{u \otimes u : \|u\|_2 = \|u\|_K = 1\},$$

και θα δείξουμε ότι $I/n \in \mathrm{conv}(T)$. Παρατηρήστε ότι το $\mathrm{conv}(T)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n^2}$ και ότι $T \neq \emptyset$: αν η B_2^n δεν ακουμπούσε το σύνορο του K, θα μπορούσαμε να βρούμε $r > 1$ ώστε $rB_2^n \subseteq K$, οπότε η B_2^n δεν θα ήταν το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K.

Έστω ότι $I/n \notin \mathrm{conv}(T)$. Από διαχωριστικό θεώρημα, μπορούμε να βρούμε $\phi \in \mathbb{R}^{n^2}$ και $r \in \mathbb{R}$ ώστε

$$(2.3.6) \qquad \langle \phi, I/n \rangle < r \leq \langle \phi, A \rangle$$

για κάθε $A \in \mathrm{conv}(T)$. Ειδικότερα, για κάθε σημείο επαφής u των K και B_2^n έχουμε

$$(2.3.7) \qquad \langle \phi, I/n \rangle < r \leq \langle \phi, u \otimes u \rangle.$$

Οι πίνακες I/n και $u \otimes u$ είναι συμμετρικοί, οπότε παίρνοντας τον $\psi = (\phi + \phi^*)/2$ αντί του ϕ έχουμε ότι ο ψ είναι συμμετρικός και εξακολουθεί να ικανοποιεί την

$$(2.3.8) \qquad \langle \psi, I/n \rangle < r \leq \langle \psi, u \otimes u \rangle$$

για κάθε $u \otimes u \in T$. Έστω $\beta = \mathrm{tr}(\psi)/n$. Αφού $\mathrm{tr}(I/n) = 1$ και $\mathrm{tr}(u \otimes u) = \sum u_i^2 = 1$, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \langle \psi - \beta I, I/n \rangle &= \langle \psi, I/n \rangle - \beta \\ &= 0 < r - \beta \\ &\leq \langle \psi - \beta I, u \otimes u \rangle \end{aligned}$$

για κάθε $u \otimes u \in T$. Παίρνοντας $B = \psi - \beta I$ και $s = r - \beta$, έχουμε:

Λήμμα 2.3.2. *Αν $I/n \notin \mathrm{conv}(T)$, τότε υπάρχουν $s > 0$ και B συμμετρικός με $\mathrm{tr}(B) = 0$ με την ιδιότητα*

$$(2.3.9) \qquad \langle B, u \otimes u \rangle \geq s$$

για κάθε $u \otimes u \in T$. □

Για $\delta > 0$ αρκετά μικρό, θεωρούμε το ελλειψοειδές

$$(2.3.10) \qquad E_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle (I + \delta B)x, x \rangle \leq 1\}.$$

[Παρατηρήστε ότι αν $M = \max\{|\langle Bx, y \rangle| : \|x\|_2 = \|y\|_2 = 1\}$ και $0 < \delta < 1/M$, τότε ο $I + \delta B$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, άρα έχει συμμετρική θετική τετραγωνική ρίζα S_δ. Αφού $E_\delta = S_\delta^{-1}(B_2^n)$, το E_δ είναι ελλειψοειδές.]

Ορισμός 2.3.3 (ακτινική συνάρτηση)**.** *Για κάθε* $\theta \in S^{n-1}$ *θέτουμε*

$$\rho_K(\theta) = \max\{t > 0 : t\theta \in K\}. \tag{2.3.11}$$

Η $\rho_K : S^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ *λέγεται ακτινική συνάρτηση του* K*: «μετράει» την απόσταση του συνόρου του* K *από το* 0 *στη διεύθυνση του* θ*. Αφού* $\rho_K(\theta)\theta \in \mathrm{bd}(K)$*, έχουμε*

$$\rho_K(\theta) \cdot \|\theta\|_K = 1. \tag{2.3.12}$$

Θα δείξουμε ότι $E_\delta \subseteq K$ αν το δ είναι μικρό, δείχνοντας ότι $\rho_{E_\delta}(v) \leq \rho_K(v)$ για κάθε $v \in S^{n-1}$:

1η Περίπτωση: Έστω U το σύνολο των σημείων επαφής των K και B_2^n. Αν $u \in U$ και $v \in S^{n-1}$ με $\|u - v\|_2 < s/2M$, τότε από το Λήμμα 2.3.2,

$$\langle (I + \delta B)u, u\rangle \geq 1 + \delta s, \tag{2.3.13}$$

ενώ

$$\begin{aligned} |\langle v + \delta Bv, v\rangle - \langle u + \delta Bu, u\rangle| &= \delta|\langle Bv, v\rangle - \langle Bu, u\rangle| \\ &\leq \delta|\langle Bv, v - u\rangle| + \delta|\langle Bu, u - v\rangle| \\ &\leq 2M\delta\|u - v\|_2 < \delta s. \end{aligned}$$

Άρα, αν η απόσταση του $v \in S^{n-1}$ από το U είναι μικρότερη από $s/2M$, τότε

$$\langle (I + \delta B)v, v\rangle > 1 + \delta s - \delta s = 1, \tag{2.3.14}$$

δηλαδή $v \notin E_\delta$. Όμως, $v \in B_2^n \subseteq K$ για κάθε $v \in S^{n-1}$. Άρα, σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\rho_{E_\delta}(v) < 1 \leq \rho_K(v). \tag{2.3.15}$$

2η Περίπτωση: Έστω V το σύνολο των $v \in S^{n-1}$ για τα οποία $d(v, U) \geq s/2M$. Τότε, το V είναι συμπαγές και $r = \max\{\|v\|_K : v \in V\} < 1$. Θέτουμε $\lambda = \min\{\langle Bv, v\rangle : v \in V\}$. Αν $0 < \delta < (1 - r^2)/|\lambda|$, τότε

$$\langle (I + \delta B)(v/\|v\|_K), v/\|v\|_K\rangle = \frac{1 + \delta\langle Bv, v\rangle}{\|v\|_K^2} \geq \frac{1 + \delta\lambda}{r^2} > 1, \tag{2.3.16}$$

δηλαδή $v/\|v\|_K \notin E_\delta$. Αυτό σημαίνει ότι $\rho_{E_\delta}(v) \leq \frac{1}{\|v\|_K} = \rho_K(v)$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στο εξής:

Λήμμα 2.3.4. *Υπάρχει* $\delta_0 > 0$ *τέτοιο ώστε* $E_\delta \subseteq K$ *για κάθε* $0 < \delta < \delta_0$*.* □

Μπορούμε τώρα να καταλήξουμε σε άτοπο: Παίρνουμε $\delta > 0$ αρκετά μικρό ώστε ο $I+\delta B$ να είναι θετικά ορισμένος και το ελλειψοειδές E_δ να περιέχεται στο K. Αφού η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, έχουμε $|E_\delta| \leq |B_2^n|$. Όμως,

$$|E_\delta| = |S_\delta^{-1}(B_2^n)| = |B_2^n|/\sqrt{\det(I+\delta B)}. \tag{2.3.17}$$

Άρα, $\det(I+\delta B) \geq 1$. Από την άλλη πλευρά, η ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου μας δίνει

$$[\det(I+\delta B)]^{1/n} \leq \frac{\mathrm{tr}(I+\delta B)}{n} = 1 + \delta\frac{\mathrm{tr}(B)}{n} = 1, \tag{2.3.18}$$

αφού $\mathrm{tr}(B) = 0$. Για να ισχύουν τα παραπάνω, πρέπει να έχουμε ισότητα στην ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Τότε όμως, όλες οι ιδιοτιμές του $I+\delta B$ είναι ίσες, δηλαδή $I+\delta B = \mu I$. Έπεται ότι ο B είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα, και αφού $\mathrm{tr}(B) = 0$ παίρνουμε $B = 0$.

Αυτό είναι άτοπο, γιατί από το Λήμμα 2.3.2 έχουμε $\langle Bu, u\rangle \geq s > 0$, $u \in U$. Συνεπώς, $I/n \in \mathrm{conv}(T)$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Μπορούμε τώρα να δώσουμε μια δεύτερη απόδειξη για το θεώρημα του John:

Πρόταση 2.3.5. *Αν B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε $K \subseteq \sqrt{n}B_2^n$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης

$$x = \sum_{j=1}^m \lambda_j \langle x, u_j\rangle u_j \tag{2.3.19}$$

του Θεωρήματος 2.3.1. Αφού $u_j \in S^{n-1}$, έχουμε

$$1 = \langle u_j, u_j\rangle \leq \|u_j\|_K \|u_j\|_{K^\circ} = \|u_j\|_{K^\circ} \quad \text{για κάθε } j = 1, \ldots, m. \tag{2.3.20}$$

Από την άλλη πλευρά, σε κάθε u_j τα K και B_2^n έχουν το ίδιο εφαπτόμενο υπερεπίπεδο με κάθετο διάνυσμα το u_j (για τη μπάλα, το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο σε κάθε σημείο $u \in S^{n-1}$ έχει κάθετο διάνυσμα το u). Επομένως, για κάθε $x \in K$ έχουμε $\langle x, u_j\rangle \leq 1$, και λόγω συμμετρίας του K,

$$|\langle x, u_j\rangle| \leq 1 \quad \text{για κάθε } x \in K. \tag{2.3.21}$$

Δηλαδή,

$$\|u_j\|_K = \|u_j\|_{K^\circ} = \|u_j\|_2 = 1 \tag{2.3.22}$$

για κάθε $j = 1, \ldots, m$.

Έστω τώρα $x \in K$. Από τις (2.3.3), (∗) και (2.3.21) παίρνουμε

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle x, u_j\rangle^2 \leq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = n. \tag{2.3.23}$$

Δηλαδή, $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}$. Αρα, $B_2^n \subseteq K \subseteq \sqrt{n}B_2^n$. □

Παρατήρηση 2.3.6. Αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του K°. Επίσης, η (2.3.22) δείχνει ότι κάθε σημείο επαφής των K και B_2^n είναι σημείο επαφής των K° και B_2^n. Άρα, αλλάζοντας τους ρόλους των K και K°, βλέπουμε ότι η αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης μέσω σημείων επαφής εξασφαλίζεται και στην περίπτωση του ελλειψοειδούς ελάχιστου όγκου.

2.4 Λήμματα Dvoretzky-Rogers

Σε αυτή την Παράγραφο υποθέτουμε ότι το συμμετρικό κυρτό σώμα K έχει σαν ελλειψοειδές μέγιστου ή ελάχιστου όγκου την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Στην §2.3 αποδείξαμε το θεώρημα του John για την αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης: υπάρχουν σημεία επαφής $u_1, \ldots, u_m$ των K και B_2^n, και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ώστε

$$I = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j \otimes u_j. \tag{2.4.1}$$

Συνέπειες της (2.4.1) είναι οι εξής: για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle x, u_j\rangle^2 \tag{2.4.2}$$

και

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = n. \tag{2.4.3}$$

Χρησιμοποιώντας την (2.4.1) μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχουν πολλά σημεία επαφής ανάμεσα στο K και στην B_2^n.

Πρόταση 2.4.1. *Αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου ή μέγιστου όγκου του K, τότε για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό T του $\mathbb{R}^n$ υπάρχει σημείο επαφής των K και B_2^n με την ιδιότητα:*

$$\langle u, Tu\rangle \geq \frac{\mathrm{tr}T}{n}. \tag{2.4.4}$$

Απόδειξη. Από την (2.4.1) έχουμε

$$\mathrm{tr}T = \langle T, I\rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle T, u_j \otimes u_j\rangle. \tag{2.4.5}$$

Παίρνοντας υπόψιν και την $\sum \lambda_j = n$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $j \leq m$ με την ιδιότητα

$$\langle u_j, Tu_j\rangle = \langle T, u_j \otimes u_j\rangle \geq \frac{\mathrm{tr}T}{n}. \tag{2.4.6}$$

Το συμπέρασμα προκύπτει αν πάρουμε $u = u_j$. □

Οι Dvoretzky και Rogers έδειξαν ακριβή αποτελέσματα γιά την κατανομή των σημείων επαφής του K με την B_2^n. Ολα τους εκφράζουν με τον ένα ή τον άλλο τρόπο την αρχή ότι υπάρχουν πολλές και «αρκετά ορθογώνιες» διευθύνσεις στις οποίες οι δύο νόρμες $\|\cdot\|_K$ και $\|\cdot\|_2$ συγκρίνονται καλά.

Πρόταση 2.4.2. *Αν B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, υπάρχει ορθοκανονική ακολουθία $y_1, \ldots, y_n$ στον $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα*

$$\left(\frac{n-i+1}{n}\right)^{1/2} \leq \|y_i\|_K \leq \|y_i\|_2 = 1 \tag{2.4.7}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

Απόδειξη. Ορίζουμε τα y_i επαγωγικά. Σαν y_1 μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε σημείο επαφής των K και B_2^n. Ας υποθέσουμε ότι έχουν επιλεγεί τα $y_1, \ldots, y_{i-1}$. Θέτουμε $F_i = \mathrm{span}\{y_1, \ldots, y_{i-1}\}$. Τότε, $\mathrm{tr}(P_{F_i^\perp}) = n - i + 1$, και από την Πρόταση 2.4.1 υπάρχει σημείο επαφής u_i ώστε

$$\|P_{F_i^\perp} u_i\|_2^2 = \langle u_i, P_{F_i^\perp} u_i\rangle \geq \frac{n-i+1}{n}. \tag{2.4.8}$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έπεται ότι

$$\|P_{F_i} u_i\|_K \leq \|P_{F_i} u_i\|_2 \leq \sqrt{(i-1)/n}. \tag{2.4.9}$$

Ορίζουμε $y_i = P_{F_i^\perp} u_i / \|P_{F_i^\perp} u_i\|_2$. Τότε,

$$1 = \|y_i\|_2 \geq \|y_i\|_K \geq |\langle u_i, y_i\rangle| = \|P_{F_i^\perp} u_i\|_2 \tag{2.4.10}$$

και το συμπέρασμα προκύπτει από την (2.4.8). □

Πόρισμα 2.4.3. *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. Αν $k = [n/2] + 1$, μπορούμε να βρούμε ορθοκανονικά διανύσματα $y_1, \ldots, y_k$ ώστε*

$$\frac{1}{2} \leq \|y_j\| \leq 1 \tag{2.4.11}$$

για κάθε $j = 1, \ldots, k$. □

Το επόμενο λήμμα «τύπου Dvoretzky-Rogers» αποδείχθηκε από τους Szarek και Talagrand (1988).

Πρόταση 2.4.4. *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του K. Για κάθε $k \leq n$, μπορούμε να βρούμε σημεία επαφής $y_1, \ldots, y_k$ των K και B_2^n, με την εξής ιδιότητα: Αν $j \in \{1, \ldots, k\}$ και $F_j = \mathrm{span}\{y_i : i \neq j\}$, τότε*

$$|P_{F_j^\perp}(y_j)| \geq \sqrt{\frac{n-k+1}{n}} \tag{2.4.12}$$

για κάθε $j = 1, \ldots, k$.

Απόδειξη. Έστω $k \leq n$. Υπάρχουν σημεία επαφής $u_1, \ldots, u_m$ των K και B_2^n, και $\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$ ώστε

$$I = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j \otimes u_j. \tag{2.4.13}$$

Από όλες τις k-άδες που μπορούμε να επιλέξουμε μέσα από το $\{u_1, \ldots, u_m\}$, επιλέγουμε εκείνα τα $y_1 = u_{i_1}, \ldots, y_k = u_{i_k}$ για τα οποία μεγιστοποιείται ο k-διάστατος όγκος $|\mathrm{conv}\{\pm u_{i_1}, \ldots, \pm u_{i_k}\}|$. Αν θέσουμε $F_j = \mathrm{span}\{y_i : i \neq j\}$, τότε

$$\|P_{F_j^\perp}(y_j)\|_2 \geq \|P_{F_j^\perp}(u_i)\|_2 \quad \text{για κάθε } j = 1, \ldots, k \text{ και } i = 1, \ldots, m. \tag{2.4.14}$$

Όμως, από την Πρόταση 2.4.1, υπάρχει $i \leq m$ ώστε

$$\|P_{F_j^\perp}(u_i)\|_2^2 = \langle u_i, P_{F_j^\perp}(u_i) \rangle \geq \frac{\mathrm{tr}(P_{F_j^\perp})}{n} = \frac{n-k+1}{n}. \tag{2.4.15}$$

Άρα,

$$\|P_{F_j^\perp}(y_j)\|_2 = \max_{i \leq m} \|P_{F_j^\perp}(u_i)\|_2 \geq \sqrt{\frac{n-k+1}{n}} \tag{2.4.16}$$

για κάθε $j = 1, \ldots, k$. □