Χαρακτηρισμός ομολογιών και επάρσεων μέσω ιδιοτιμών

Ιωάννα-Μαρία Λυγάτσικα

Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ γραμμικός ισομορφισμός με πίνακα M. Ο f επάγει συγγραμμικότητα $(\phi, \psi) : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ με

$$\begin{aligned}\phi([x,y,z]) &= [f(x,y,z)]\\ \psi(\langle a,b,c\rangle) &= \langle (a,b,c)(M^t)^{-1}\rangle.\end{aligned}$$

Ισχυρισμός 1: Η (ϕ, ψ) είναι κεντρική/ αξονική *ανν* ο f έχει ιδιόχωρο διάστασης 2.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι ο f έχει ιδιόχωρο διάστασης 2, έστω λ η αντίστοιχη ιδιοτιμή. Τότε υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $v = (v_1, v_2, v_3)$ και $u = (u_1, u_2, u_3)$ του f που αντιστοιχούν στην λ, άρα

$$\begin{aligned}\phi([v_1,v_2,v_3]) &= [f(v)] = [\lambda(v_1,v_2,v_3)] = [v_1,v_2,v_3] := P\\ \phi([u_1,u_2,u_3]) &= [f(u)] = [\lambda(u_1,u_2,u_3)] = [u_1,u_2,u_3] := Q.\end{aligned}$$

Δηλαδή τα δύο σημεία P, Q παραμένουν σταθερά. Τα P, Q ορίζουν ευθεία $l = P \vee Q$ διότι $[v_1, v_2, v_3] \neq [u_1, u_2, u_3]$. Αρκεί να δείξουμε ότι l είναι άξονας, δηλαδή για κάθε $R = [x, y, z] \in l$ ισχύει $\phi(R) = R$. Πράγματι, αν $R \in l$ τότε (x, y, z) ανήκει στον υπόχωρο διάστασης 2 του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα u και v, άρα υπάρχουν a, b ώστε $(x, y, z) = av + bu$. Έχουμε $R = [x, y, z] = \zeta(x, y, z)$ για κάποιο ζ άρα

$$R = \zeta(x,y,z) = \zeta(av+bu) = [v_1,v_2,v_3] + [u_1,u_2,u_3].$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\phi(R) &= \phi([v_1,v_2,v_3] + [u_1,u_2,u_3])\\ &= \phi([v_1,v_2,v_3]) + \phi([u_1,u_2,u_3])\\ &= [f(v)] + [f(u)] = [v_1,v_2,v_3] + [u_1,u_2,u_3] = R.\end{aligned}$$

Έτσι δείξαμε ότι η (ϕ, ψ) είναι κεντρική/ αξονική.

Για την άλλη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι η (ϕ, ψ) είναι κεντρική/ αξονική, έστω l ο άξονας. Θεωρούμε τρία διακεκριμένα σημεία $P_i = [x_i, y_i, z_i]$ στον l και έστω $v_i := (x_i, y_i, z_i)$ τα αντίστοιχα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Έχουμε

$$\phi(P_i) = P \Leftrightarrow [f(x_i,y_i,z_i)] = [x_i,y_i,z_i],$$

άρα για κάθε $i = 1, 2, 3$ υπάρχει λ_i ώστε $f(v_i) = \lambda_i v_i$. Αν υποθέσουμε ότι τα λ_i είναι ανα δύο διακεκριμένα, τότε τα v_i είναι ανά δύο γραμμικά ανεξάρτητα. Αυτό είναι άτοπο διότι τα v_1, v_2, v_3 ανήκουν (στο επίπεδο του l, δηλαδή) σε υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 2. Άρα, χωρίς βλάβη της γενικότητας, $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda$. Επομένως, v_1, v_2 ανήκουν στον ιδιόχωρο $V_f(\lambda)$ της ιδιοτιμής λ. Αφού $P_1 \neq P_2$ τότε δεν υπάρχει $\kappa \neq 0$ ώστε $v_1 = \kappa v_2$, άρα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Για να συμπεράνουμε ότι $dim(V_f(\lambda)) = 2$, αρκεί να δείξουμε ότι τα v_1, v_2 παράγουν τον ιδιόχωρο. Πράγματι, έστω $w = (w_1, w_2, w_3)$ τέτοιο ώστε $f(w) = \lambda w$. Τότε αν $R = [w_1, w_2, w_3]$ έχουμε $\phi(R) = [f(w)] = R$, άρα R ανήκει στον άξονα l. Από τη σχέση $l = P_1 \vee P_2$ έπεται ότι το w γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των v_1, v_2. □

Παρατήρηση 1: Στην απόδειξη του Ισχυρισμού 1, είδαμε ότι ο ιδιόχωρος διάστασης 2 του f προσδιορίζει τον άξονα της κεντρικής/ αξονικής συγγραμμικότητας.

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι (ϕ, ψ) είναι κεντρική/ αξονική συγγραμμικότητα.

Ισχυρισμός 2: Η (ϕ, ψ) είναι ομολογία *ανν* ο f έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι ο f έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές, λ_1 και λ_2. Αφού (ϕ, ψ) είναι κεντρική/ αξονική συγγραμμικότητα, τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας, ο ιδιόχωρος $V_f(\lambda_1)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1 έχει διάσταση 2. Από Παρατήρηση 1, αν $P = [x, y, z],\ Q = [x', y', z']$ δύο διακεκριμένα σημεία τέτοια ώστε $(x, y, z), (x', y', z') \in V_f(\lambda_1)$, τότε $P \vee Q = l$ είναι ο άξονας.

Έχουμε ότι $dim(V_f(\lambda_2)) = 1$, έστω $\{(p, q, r)\}$ μία βάση του. Θα δείξουμε ότι $R = [p, q, r]$ είναι το κέντρο της συγγραμμικότητας. Έστω $k = \langle a, b, c \rangle \ni R$. Έχουμε $k \neq l$, διότι διαφορετικά το R ανήκει στον άξονα, άρα (p, q, r) είναι γραμμικός συνδυασμός των $(x, y, z), (x', y', z')$, άρα (p, q, r) είναι ιδιοδιάνυσμα της λ_1, άτοπο επειδή $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Θεωρούμε το σημείο τομής $A = [a_1, a_2, a_3]$ της k και του άξονα l. Τότε η k ορίζεται μονοσήμαντα ως $k = A \vee R$. Η ένωση είναι καλά ορισμένη διότι αν $A = R$ τότε R ανήκει στον άξονα, άτοπο. Επομένως, εξετάζουμε το $\psi(k) = \phi(A) \vee \phi(R)$.

Έχουμε $\phi(A) = A$ διότι το A ανήκει στον άξονα. Επίσης

$$\phi(R) = [f(p, q, r)] = [\lambda_2(p, q, r)] = [p, q, r] = R.$$

Έστω $S = [s_1, s_2, s_3]$ τυχόν σημείο του $k = A \vee R$, τότε το (s_1, s_2, s_3) ανήκει στον υπόχωρο διάστασης 2 του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα $(a_1, a_2, a_3), (p, q, r)$, επομένως υπάρχουν κ, μ τέτοια ώστε $(s_1, s_2, s_3) = \kappa(a_1, a_2, a_3) + \mu(p, q, r)$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}\phi(S) &= \phi([a_1, a_2, a_3] + [p, q, r]) \\ &= \phi(A) + \phi(R) \\ &= A + R = S.\end{aligned}$$

Δείξαμε ότι κάθε σημείο του k παραμένει αναλλοίωτο, επομένως $\psi(k) = k$.

Τώρα, αφού οι ιδιοτιμές λ_i είναι διακεκριμένες, συμπεραίνουμε ότι $(p, q, r) \notin V_f(\lambda_1)$, άρα το κέντρο R δεν ανήκει στον άξονα. Επομένως, (ϕ, ψ) είναι ομολογία.

Για την άλλη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι η (ϕ, ψ) είναι ομολογία. Αφού (ϕ, ψ) είναι κεντρική/ αξονική συγγραμμικότητα, τότε ο f έχει ιδιόχωρο $V_f(\lambda)$ διάστασης 2, όπου λ η αντίστοιχη ιδιοτιμή. Υποθέτουμε ότι f δεν έχει άλλη ιδιοτιμή. Έστω $P = [x, y, z]$ το κέντρο της ομολογίας, τότε $\phi(P) = P$ και P δεν ανήκει στον άξονα. Έχουμε

$$\phi(P) = P \Leftrightarrow [f(x, y, z)] = [x, y, z]$$

άρα υπάρχει μ τέτοιο ώστε $f(x, y, z) = \mu(x, y, z)$. Αν υποθέσουμε ότι $\mu = \lambda$, τότε $(x, y, z) \in V_f(\lambda)$ που είναι άτοπο διότι P δεν ανήκει στον άξονα. $\square$

Παρατήρηση 2: Στην απόδειξη του Ισχυρισμού 2, είδαμε ότι ο ιδιόχωρος διάστασης 1 του f προσδιορίζει το κέντρο της κεντρικής/ αξονικής συγγραμμικότητας.

Ισχυρισμός 3: Η (ϕ, ψ) είναι έπαρση *ανν* ο f έχει όλες τις ιδιοτιμές του ίσες.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι ο f έχει όλες τις ιδιοτιμές του ίσες, έστω λ. Αφού (ϕ, ψ) είναι κεντρική/ αξονική συγγραμμικότητα, τότε ο ιδιόχωρος $V_f(\lambda)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ έχει διάσταση 2. Έστω $P = [x, y, z]$ το κέντρο της συγγραμμικότητας, τότε $\phi(P) = P$, επομένως $f(x, y, z) = \mu(x, y, z)$ για κάποιο μ. Τότε αναγκαστικά $\lambda = \mu$ άρα $(x, y, z) \in V_f(\lambda)$ και από την Παρατήρηση 1 συμπεραίνουμε ότι P ανήκει στον άξονα.

Για την άλλη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι η (ϕ, ψ) είναι έπαρση. Αφού (ϕ, ψ) είναι κεντρική/ αξονική συγγραμμικότητα, τότε ο f έχει ιδιόχωρο $V_f(\lambda)$ διάστασης 2, όπου λ η αντίστοιχη ιδιοτιμή. Έστω $l = P_1 \vee P_2$ ο άξονας, όπου $P_i = [x_i, y_i, z_i]$ δύο διακεκριμένα σημεία και $v_i = (x_i, y_i, z_i)$. Από την Παρατήρηση 1, το σύνολο $\{v_1, v_2\}$ αποτελεί βάση του $V_f(\lambda)$. Υποθέτουμε ότι f έχει άλλη μία ιδιοτιμή $\mu \neq \lambda$, τότε αναγκαστικά $dim(V_f(\mu)) = 1$. Αν $\{w = (w_1, w_2, w_3)\}$ μία βάση του $V_f(\mu)$, τότε από την Παρατήρηση 2, έχουμε ότι $[w_1, w_2, w_3]$ είναι το κέντρο της συγγραμμικότητας. Όμως αυτό είναι άτοπο διότι $w \notin V_f(\lambda)$, άρα w δεν γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των v_1, v_2

που σημαίνει ότι το κέντρο δεν ανήκει στον άξονα. $\square$

Σχόλια:

Ένα αποτέλεσμα που σχετίζεται με αυτά που δείξαμε είναι η Πρόταση 4.5.17 από το

Marcel Berger, Geometry I, Springer 2004

που λέει ότι

Έστω $g = \underline{f} \in GP(E)$ και $m \in P(E)$. Τότε m είναι σταθερό σημείο της g (δηλαδή $m = g(m)$) αν και μόνο αν $p^{-1}(m)$ είναι ιδιόχωρος του f.

(όπου $P(E)$ είναι ο προβολικός χώρος που επάγεται από το E και είναι πεπερασμένης διάστασης, $GP(E)$ είναι η προβολική ομάδα του E.)

Άλλη αντιμετώπιση: με κανονική μορφή *Jordan* και ιδιοτιμές, Παράγραφος 75.1 στο

Dan Pedoe, Geometry A Comprehensive Course, Dover 1988.