ΜΑΘΗΜΑ 8

ΟΡΙΣΜΟΣ. Μια συγγραμμικότητα $(\phi, \psi) \in \mathbb{L}(A, \ell)$ λέγεται ***ομολογία***, αν $A \notin \ell$. Η ομάδα $\mathbb{L}(A, \ell)$ των ομολογιών με κέντρο A και άξονα ℓ (με $A \notin \ell$) συμβολίζεται με

$$\mathbb{H}(A, \ell).$$

Η (ϕ, ψ) λέγεται ***έπαρση***, αν $A \in \ell$, και η αντίστοιχη ομάδα των επάρσεων $\mathbb{L}(A, \ell)$ (με $A \in \ell$) συμβολίζεται με

$$\mathbb{E}(A, \ell).$$

Στο επόμενο βασικό θεώρημα αποδεικνύουμε ότι για τον προσδιορισμό μιας κεντρικής/αξονικής συγγραμμικότητας αρκεί να γνωρίζουμε την εικόνα ενός κατάλληλου σημείου.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω $(\phi, \psi) \in \mathbb{L}(A, \ell)$. Τότε η (ϕ, ψ) προσδιορίζεται πλήρως από κάθε τετράδα της μορφής*

$$(A, \ell, X, \phi(X)),$$

όπου $X \in \mathcal{P}$ με $X \neq A$ και $X \notin \ell$.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι λόγω της Πρότασης 3 του Μαθήματος 7, τα δεδομένα σημεία A, X και $\phi(X)$ πρέπει να είναι συγγραμμικά. Έστω $Y \in \mathcal{P}$ με $Y \neq A$, $Y \notin \ell$ και $Y \neq X$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(1) Υποθέτουμε επιπλέον ότι $Y \notin A \vee X = A \vee \phi(X)$. Για να βρούμε την εικόνα $\phi(Y)$ παρατηρούμε τα εξής:

(*i*) Τα A, Y και $\phi(Y)$ είναι συγγραμμικά (πάλι από την Πρόταση 3 του Μαθήματος 7), άρα η $\phi(Y)$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $A \vee Y$ (που ορίζεται, αφού $Y \neq A$).

(*ii*) $Y \in X \vee Y$ (η ευθεία $X \vee Y$ υπάρχει αφού $Y \neq X$), άρα $\phi(Y) \in \psi(X \vee Y)$. Η εικόνα $\psi(X \vee Y)$ της ευθείας $X \vee Y$ δεν είναι γνωστή, μπορεί όμως να προσδιοριστεί, γιατί γνωρίζουμε δύο σημεία της: (α) Επειδή $X \in X \vee Y$, έχουμε $\phi(X) \in \psi(X \vee Y)$. (β) Οι ευθείες ℓ, $X \vee Y$ και $\psi(X \vee Y)$ συντρέχουν (Πρόταση 3′ του Μαθήματος 7), επομένως η $\psi(X \vee Y)$ περνά από την τομή P της ℓ με την $X \vee Y$. Άρα

$$\psi(X \vee Y) = \phi(X) \vee P = \phi(X) \vee (\ell \wedge (X \vee Y))$$

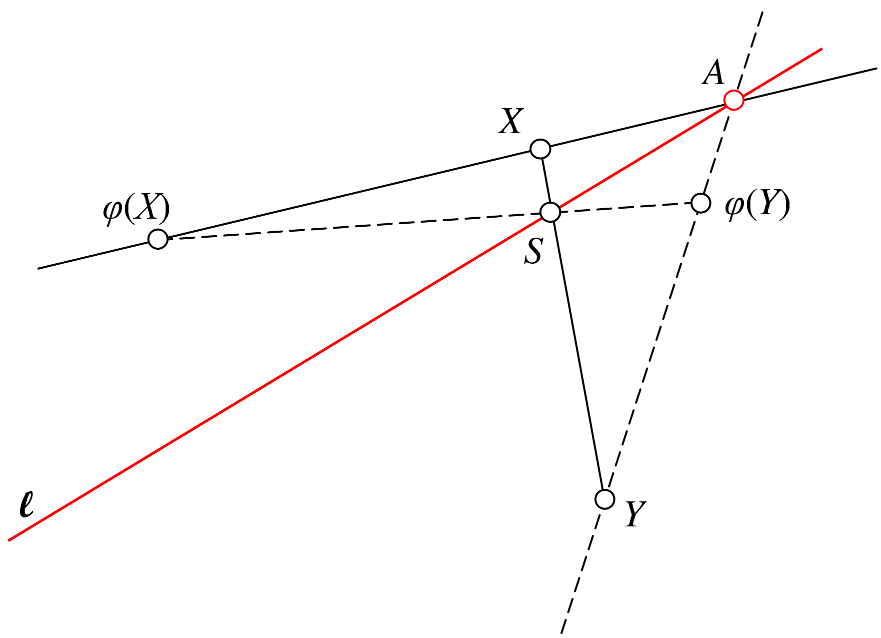
Οι δύο ευθείες $A \vee Y$ και $\phi(X) \vee P$ που περιέχουν το $\phi(Y)$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους, αφού τα A, Y και $\phi(X)$ δεν είναι συγγραμμικά. Άρα το $\phi(Y)$ είναι η τομή τους, δηλ.

$$\phi(Y) = (A \vee Y) \wedge [\phi(X) \vee (\ell \wedge (X \vee Y))].$$

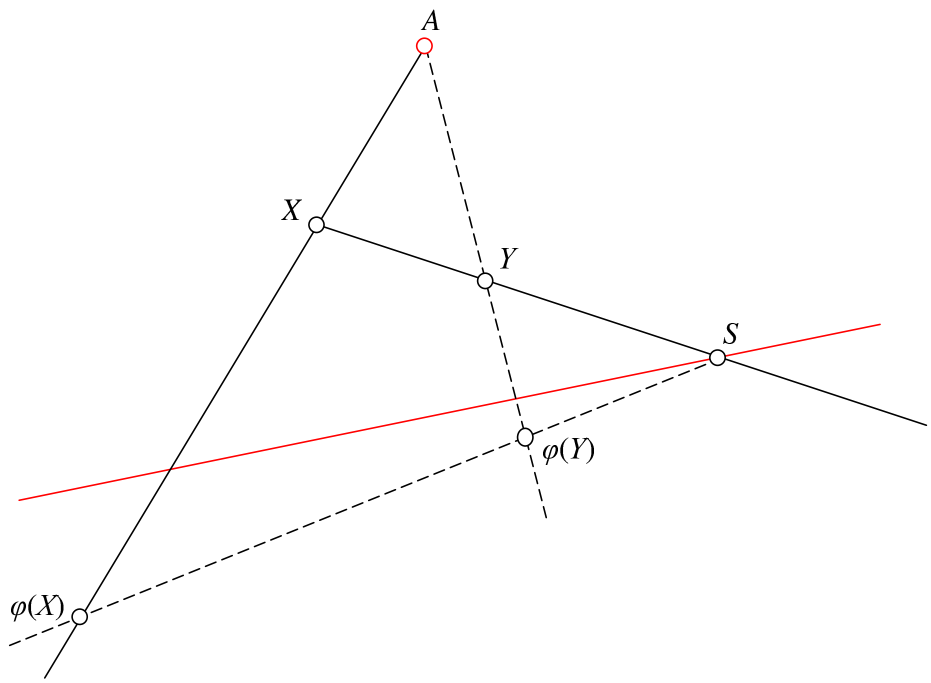
(2) Αν $Y \in A \vee X$, θεωρούμε ένα $Z \notin A \vee X$, (πάλι με $Z \neq A$ και $Z \notin \ell$) βρίσκουμε την εικόνα $\phi(Z)$ και μετά χρησιμοποιούμε την τετράδα $(A, \ell, Z, \phi(Z))$ για να προσδιορίσουμε το $\phi(Y)$.

Στα σχήματα που ακολουθούν απεικονίζεται η καταασκευή του $\phi(Y)$ όταν η (ϕ, ψ) είναι έπαρση ($A \in \ell$) και όταν είναι ομολογία ($A \notin \ell$).

Για έπαρση :



Για ομολογία:



ΠΟΡΙΣΜΑ 1. Έστω $(\phi_i, \psi_i) \in \mathbb{L}(A, \ell)$, $i = 1, 2$, και $X \in \mathcal{P}$ με $X \neq A$ και $X \notin \ell$, για το οποίο ισχύει $\phi_1(X) = \phi_2(X)$. Τότε $(\phi_1, \psi_1) = (\phi_2, \psi_2)$.

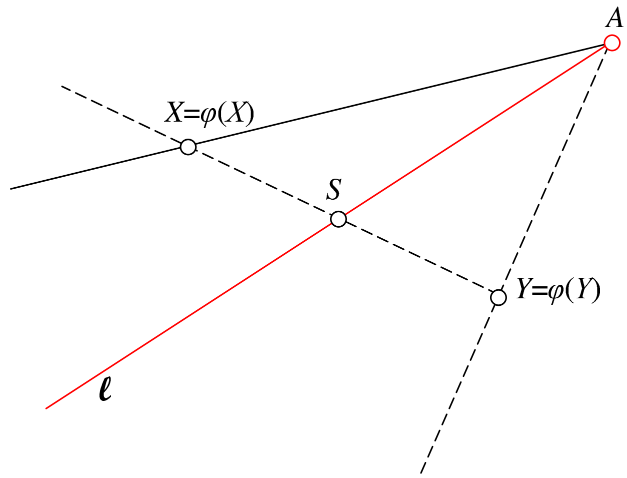
ΠΟΡΙΣΜΑ 2. Έστω $(\phi, \psi) \in \mathbb{L}(A, \ell)$ και έστω ότι υπάρχει $X \in \mathcal{P}$ με $X \neq A$ και $X \notin \ell$, για το οποίο ισχύει $\phi(X) = X$. Τότε $(\phi, \psi) = (id_{\mathcal{P}}, id_{\mathcal{L}})$.

Απόδειξη. Το Πόρισμα 2 είναι προφανής απόρροια του Πορίσματος 1. Για την πληρότητα σημειώνουμε ότι η εικόνα $\phi(Y)$ δίνεται από την ισότητα

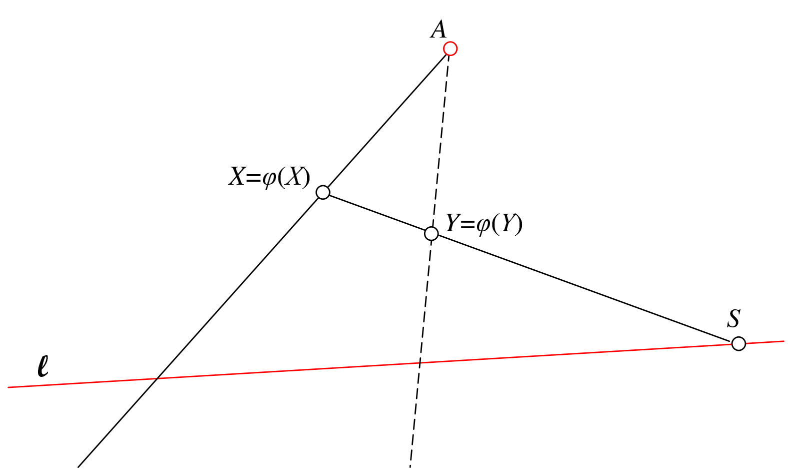
$$\phi(Y) = (A \vee Y) \wedge (X \vee P) = (A \vee Y) \wedge (Y \vee P) = Y$$

και τα αντίστοιχα σχήματα γίνονται:

Για έπαρση:



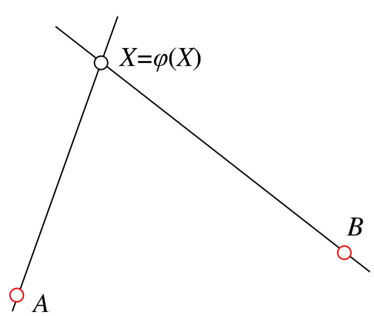
Για ομολογία:



Η ταυτοτική συγγραμμικότητα $(id_{\mathcal{P}}, id_{\mathcal{L}})$ είναι κεντρική/αξονική, και μάλιστα, κάθε $A \in \mathcal{P}$ είναι κέντρο της, και κάθε $\ell \in \mathcal{L}$ είναι άξονας. Για τις μη-ταυτοτικές συγγραμμικότητες, όμως, κέντρο και άξονας (αν υπάρχουν) είναι μονοσήμαντα ορισμένα:

ΠΡΟΤΑΣΗ Κάθε κεντρική/αξονική συγγραμμικότητα $(\phi, \psi) \neq (id_{\mathcal{P}}, id_{\mathcal{L}})$ έχει ακριβώς ένα κέντρο και έναν άξονα.

Απόδειξη. Έστω ότι η $(\phi, \psi) \in \mathcal{A}ut(\mathcal{P})$ είναι κεντρική/αξονική με κέντρα A και B, με $A \neq B$, και κάποιο άξονα ℓ. Θεωρούμε ένα $X \in \mathcal{P}$ με $X \notin \ell$ και $X \notin A \vee B$. Επειδή A, X και $\phi(X)$ είναι συγγραμμικά, η εικόνα $\phi(X)$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $A \vee X$. Ομοίως, επειδή B, X και $\phi(X)$ είναι συγγραμμικά, η $\phi(X)$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $B \vee X$. Επειδή A, B και X δεν είναι συγγραμμικά, $A \vee X \neq B \vee X$. Άρα



$$\phi(X) = (A \vee X) \wedge (B \vee X) = X.$$

Επειδή η τετράδα $(A, \ell, X, \phi(X) = X)$ προσδιορίζει πλήρως την (ϕ, ψ), από το προηγούμενο Πόρισμα 2, $(\phi, \psi) = (id_{\mathcal{P}}, id_{\mathcal{L}})$. Άτοπο, άρα $A = B$. □