ΜΑΘΗΜΑ 7

Παρακάτω θα ταυτίζουμε ένα προβολικό επίπεδο $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ με το αντίστοιχο $(\mathcal{P}, \widetilde{\mathcal{L}}, \in)$, δηλ. θα γράφουμε $P \in \ell$ αντί $P\mathcal{I}\ell$.

Υπενθυμίζουμε ότι στους ισομορφισμούς π.ε. κάθε μια από τις ϕ και ψ καθορίζει την άλλη, δηλ. για κάθε $P \neq Q \in \mathcal{P}$ και $k \neq \ell \in \mathcal{L}$:

$$\phi(k \wedge \ell) = \psi(k) \wedge \psi(\ell) \quad \text{και} \quad \psi(P \vee Q) = \phi(P) \vee \phi(Q).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1. Μία ***συγγραμμικότητα*** ενός προβολικού επιπέδου $\mathcal{P}$ είναι ένας αυτομορφισμός του $\mathcal{P}$, δηλαδή ένας ισομορφισμός

$$(\phi, \psi) : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$

του $\mathcal{P}$ στον εαυτό του.

Το σύνολο των συγγραμμικοτήτων ενός προβολικού επιπέδου $\mathcal{P}$ συμβολίζεται με

$$\mathcal{A}ut(\mathcal{P}).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. *Το σύνολο $\mathcal{A}ut(\mathcal{P})$, εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης, αποτελεί ομάδα.*

Απόδειξη. (i) Η σύνθεση

$$(\phi_2, \psi_2) \circ (\phi_1, \psi_1) := (\phi_2 \circ \phi_1, \psi_2 \circ \psi_1)$$

δύο συγγραμμικοτήτων (ϕ_1, ψ_1) και (ϕ_2, ψ_2) είναι συγγραμμικότητα, άρα η πράξη

$$\circ : \mathcal{A}ut(\mathcal{P}) \times \mathcal{A}ut(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{A}ut(\mathcal{P})$$

είναι καλά ορισμένη.

(ii) Η $\circ$ είναι προσεταιριστική.

(iii) Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο, η συγγραμμικότητα $(id_{\mathcal{P}}, id_{\mathcal{L}})$.

(iv) Για κάθε $(\phi, \psi) \in \mathcal{A}ut(\mathcal{P})$ υπάρχει αντίστροφο στοιχείο, η συγγραμμικότητα $(\phi, \psi)^{-1} := (\phi^{-1}, \psi^{-1}) \in \mathcal{A}ut(\mathcal{P})$. □

Επειδή η ομάδα $\mathcal{A}ut(\mathcal{P})$ είναι πολύ "μεγάλη", θα ορίσουμε κάποιες μικρότερες (και πιό εύχρηστες) υποομάδες της.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2. Μια συγγραμμικότητα $(\phi, \psi) \in \mathcal{A}ut(\mathcal{P})$ λέγεται (α) ***κεντρική***, αν υπάρχει ένα σημείο $A \in \mathcal{P}$, που λέγεται ***κέντρο*** με την ιδιότητα

$$\forall\ k \in J(A)\ :\ \psi(k) = k.$$

(β) ***αξονική***, αν υπάρχει ευθεία $\ell \in \mathcal{L}$, που λέγεται ***άξονας***, έτσι ώστε:

$$\forall\ P \in J(\ell)\ :\ \phi(P) = P.$$

Δηλαδή: σε μία κεντρική συγγραμμικότητα, οι ευθείες που διέρχονται από το κέντρο μένουν σταθερές (αναλλοίωτες), ενώ σε μία αξονική συγγραμμικότητα, τα σημεία του άξονα μένουν σταθερά.

ΛΗΜΜΑ 1. *Αν $(\phi_i, \psi_i) \in \mathcal{A}ut(\mathcal{P})$, $i = 1, 2$, είναι κεντρικές με κέντρο A, τότε η σύνθεση $(\phi_2 \circ \phi_1, \psi_2 \circ \psi_1)$ είναι επίσης κεντρική με το ίδιο κέντρο.*

Απόδειξη. Έστω $\ell \in J(A)$. Από την υπόθεση, $\psi_1(\ell) = \psi_2(\ell) = \ell$. Άρα

$$\psi_2 \circ \psi_1(\ell) = \psi_2(\psi_1(\ell)) = \psi_2(\ell) = \ell,$$

που δείχνει ότι το A είναι κέντρο. □

ΛΗΜΜΑ 1′. (δυϊκό) *Αν $(\phi_i, \psi_i) \in \mathcal{A}ut(\mathcal{P})$, $i = 1, 2$, είναι αξονικές με άξονα ℓ, τότε η σύνθεση $(\phi_2 \circ \phi_1, \psi_2 \circ \psi_1)$ είναι επίσης αξονική με τον ίδιο άξονα.* □

ΛΗΜΜΑ 2. *Αν $(\phi, \psi) \in \mathcal{A}ut(\mathcal{P})$ είναι κεντρική με κέντρο A, τότε η αντίστροφη (ϕ^{-1}, ψ^{-1}) είναι επίσης κεντρική με το ίδιο κέντρο.*

Απόδειξη. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ισχύει η ισοδυναμία

$$\psi(\ell) = \ell\ \Leftrightarrow\ \ell = \psi^{-1}(\ell). \qquad \square$$

ΛΗΜΜΑ 2′. (δυϊκό) *Αν $(\phi, \psi) \in \mathcal{A}ut(\mathcal{P})$ είναι αξονική με άξονα ℓ, τότε η αντίστροφη (ϕ^{-1}, ψ^{-1}) είναι επίσης αξονική με τον ίδιο άξονα.* □

Δείχνουμε τώρα ότι το κέντρο και ο άξονας είναι σταθερά στοιχεία.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. *Αν $(\phi, \psi) \in \mathcal{A}ut(\mathcal{P})$ είναι κεντρική συγγραμμικότητα με κέντρο A, τότε $\phi(A) = A$.*

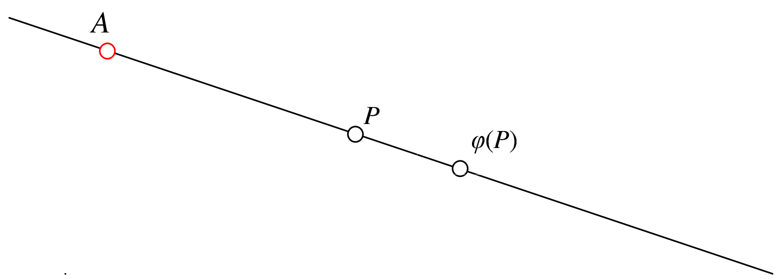
Απόδειξη. Έστω $k \neq m \in J(A)$. Τότε $A = k \wedge m$ και $\psi(k) = k$, $\psi(m) = m$. Άρα

$$\phi(A) = \phi(k \wedge \ell) = \psi(k) \wedge \psi(\ell) = k \wedge \ell = A. \qquad \square$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2′. (δυϊκή) *Αν $(\phi, \psi) \in \mathcal{A}ut(\mathcal{P})$ είναι αξονική συγγραμμικότητα με άξονα ℓ, τότε $\psi(\ell) = \ell$.* □

ΠΡΟΤΑΣΗ 3. *Αν $(\phi, \psi) \in \mathcal{A}ut(\mathcal{P})$ είναι κεντρική με κέντρο A, τότε για κάθε $P \in \mathcal{P}$, τα σημεία A, P και $\phi(P)$ είναι συγγραμμικά.*

Απόδειξη. Αν $P = A$, τότε $P = \phi(P) = A$ και το συμπέρασμα είναι τετριμμένο. Αν $P \neq A$, τότε υπάρχει η ευθεία $A \vee P \in J(A)$ κι επειδή το A είναι κέντρο, $\psi(A \vee P) = A \vee P$.

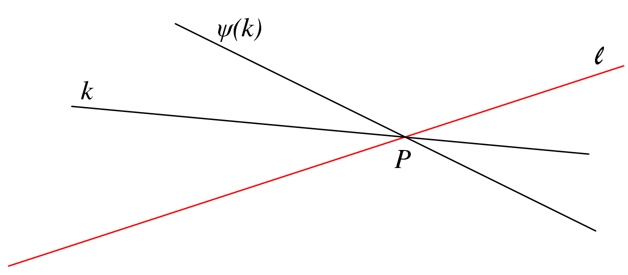


$$P \in A \vee P \Rightarrow \phi(P) \in \psi(A \vee P) = A \vee P$$

άρα A, P και $\phi(P)$ είναι συγγραμμικά. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 3′. (δυϊκή) *Αν $(\phi, \psi) \in \mathcal{A}ut(\mathcal{P})$ είναι αξονική με άξονα ℓ, τότε για κάθε $k \in \mathcal{L}$, οι ευθείες ℓ, k και $\psi(k)$ συντρέχουν.*

Απόδειξη. (αν και είναι πλεονασμός, δίνουμε τους δυϊκούς συλλογισμούς)

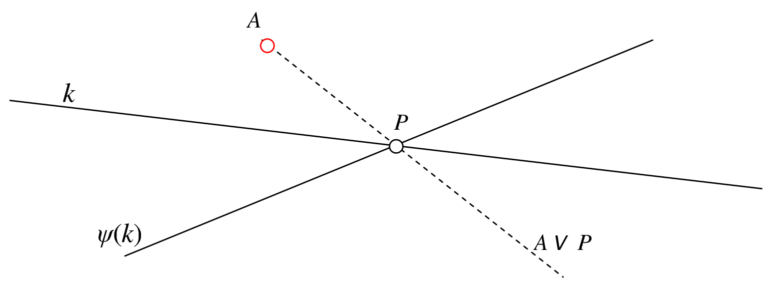


$$P = k \wedge \ell \in \ell \;\Rightarrow\; \phi(P) = P$$
$$P \in k \;\Rightarrow \phi(P) = P \in \psi(k)$$ □

ΛΗΜΜΑ 3. *Αν $(\phi, \psi) \in \mathcal{A}ut(\mathcal{P})$ είναι κεντρική με κέντρο A, και $k \in \mathcal{L}$ με $k \neq \psi(k)$, τότε το σημείο $k \wedge \psi(k)$ είναι αναλλοίωτο, δηλ.*

$$\phi(k \wedge \psi(k)) = k \wedge \psi(k).$$

Απόδειξη. Έστω $k \in \mathcal{L}$ με $\psi(k) \neq k$. Τότε $k, \psi(k) \notin J(A)$, $P := k \wedge \psi(k) \neq A$ και υπάρχει η ευθεία $A \vee P$. Οπότε

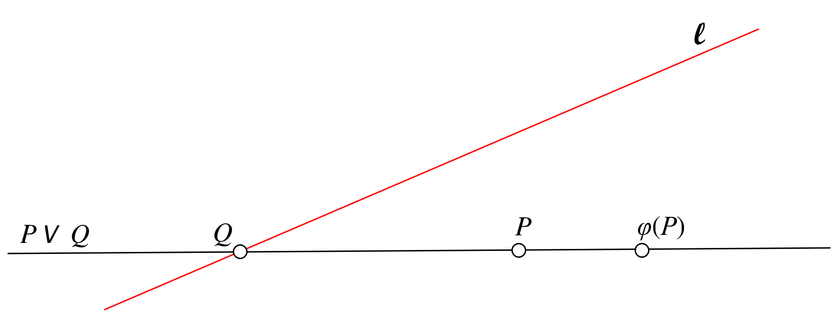


$$\phi(P) = \phi(k \wedge (A \vee P)) = \psi(k) \wedge \psi(A \vee P) = \psi(k) \wedge (A \vee P) = P. \qquad \square$$

ΛΗΜΜΑ 3′. (δυϊκό) *Αν $(\phi, \psi) \in \mathcal{A}ut(\mathcal{P})$ είναι αξονική με άξονα ℓ, και $P \in \mathcal{P}$ με $P \neq \phi(P)$, τότε η ευθεία $P \vee \phi(P)$ είναι αναλλοίωτη, δηλ.*

$$\psi(P \vee \phi(P)) = P \vee \phi(P). \qquad \square$$

Η απόδειξη πάλι είναι περιττή, δίνουμε μόνο το αντίστοιχο σχήμα:

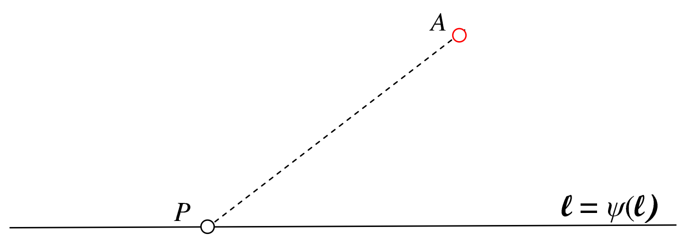


Η διάκριση των συγγραμμικοτήτων σε κεντρικές και αξονικές δεν υφίσταται στην πραγματικότητα, αφού ισχύει το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ. Κάθε κεντρική συγγραμμικότητα είναι αξονική και αντιστρόφως.

Απόδειξη. Έστω (ϕ, ψ) κεντρική με κέντρο A. Θα δείξουμε ότι έχει και άξονα. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(1) Έστω ότι υπάρχει ευθεία $\ell \notin J(A)$, με $\psi(\ell) = \ell$. Θα δείξουμε ότι η ℓ είναι άξονας. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $P \in \ell$ ισχύει $\phi(P) = P$. Έστω $P \in \ell$. Τότε $P \neq A$, $A \vee P \neq \ell$, $\psi(A \vee P) = A \vee P$ και



$$\phi(P) = \phi(\ell \wedge (A \vee P)) = \psi(\ell) \wedge \psi(A \vee P) = \ell \wedge (A \vee P) = P.$$

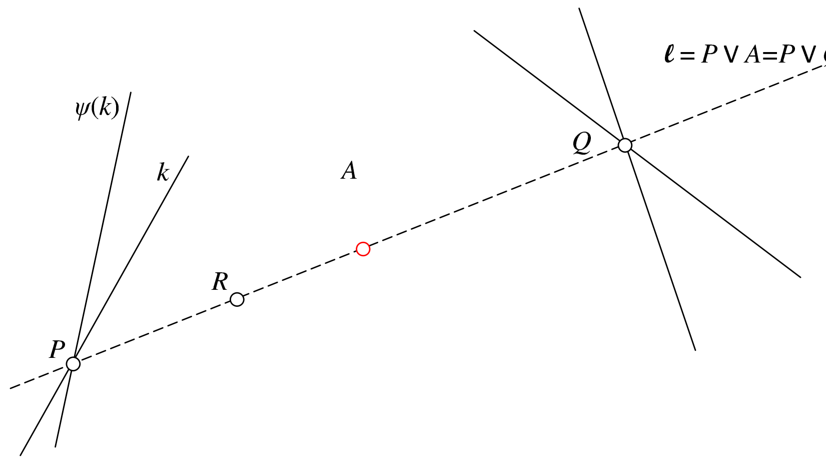
(2) Έστω ότι δεν υπάρχει ευθεία έξω από τη δέσμη ευθειών του A που να μένει αναλλοίωτη. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $k \in \mathcal{L}$ με $k \notin J(A)$, θα είναι $\psi(k) \neq k$. Θεωρούμε μια τέτοια ευθεία $k \in \mathcal{L}$ με $k \notin J(A)$. Τότε $\psi(k) \neq k$, ορίζεται το σημείο $P = k \wedge \psi(k) \neq A$ και η ευθεία $A \vee P$. Από το Λήμμα 3, είναι $\phi(P) = P$. Θεωρούμε τώρα άλλη μια ευθεία $m \in \mathcal{L}$ με $m \notin J(A)$ και $m \notin J(P)$. Όπως προηγουμένως, υπάρχει το σημείο $Q = m \wedge \psi(m)$ και $\phi(Q) = Q \neq P$. Η ευθεία $\ell = P \vee Q$ έχει δύο αναλλοίωτα σημεία, άρα είναι αναλλοίωτη. Πράγματι,

$$\psi(\ell) = \psi(P \vee Q) = \phi(P) \vee \phi(Q) = P \vee Q = \ell.$$

Από την υπόθεση (2), η ℓ πρέπει να ανήκει στην δέσμη του A, δηλ. $A \in \ell$, επομένως

$$P \vee Q = A \vee P = A \vee Q.$$

Ακριβώς όπως η m, και κάθε άλλη ευθεία που δεν ανήκει στην δέσμη $J(A)$, τέμνεται με την εικόνα της πάνω στην ευθεία $\ell = A \vee P$.



Δείχνουμε ότι η $\ell = A \vee P$ είναι άξονας: Πράγματι, αν $R \in J(\ell)$ τυχαίο, από το R περνούν τουλάχιστον τρείς ευθείες, έστω n μια από αυτές με $n \neq \ell$. Τότε $n \notin J(A)$, $n \neq \psi(n)$ και n τέμνεται με την $\psi(n)$ πάνω στην $A \vee P = \ell$ στο σημείο R που (Λήμμα 3) μένει αναλλοίωτο. Άρα η ℓ είναι ο ζητούμενος άξονας.

Το αντίστροφο συμπέρασμα προκύπτει από την αρχή του δυϊσμού. □

Έστω $A \in \mathcal{P}$ και $\ell \in \mathcal{L}$. Συμβολίζουμε με

$$\mathbb{L}(A, \ell)$$

το σύνολο των συγγραμμικοτήτων με κέντρο A και άξονα ℓ.

Συνδυάζοντας τα Λήμματα 1, 1′, 2 και 2′, παίρνουμε την επόμενη

ΠΡΟΤΑΣΗ. Για κάθε $A \in \mathcal{P}$ και $\ell \in \mathcal{L}$, το σύνολο $\mathbb{L}(A, \ell)$ είναι υποομάδα της $\mathcal{A}ut(\mathcal{P})$. □

ΑΣΚΗΣΗ

Διατυπώστε το δυϊκό του Θεωρήματος της σελ. 5 και σχεδιάστε τα δύο αντίστοιχα σχήματα.