ΜΑΘΗΜΑ 5: ΠΛΗΡΩΣΗ – ΑΠΟΠΛΗΡΩΣΗ

Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ένα ΣΕ. Όπως γνωρίζουμε, η παραλληλία είναι σχέση ισοδυναμίας, άρα για κάθε $\ell \in \mathcal{L}$, υπάρχει η κλάση ισοδυναμίας

$$[\ell] = \{k \in \mathcal{L} \mid k /\!/ \ell\}.$$

Θεωρούμε το σύνολο όλων αυτών των κλάσεων ισοδυναμίας

$$\mathcal{E}_\infty = \{[\ell] \mid \ell \in \mathcal{L}\}$$

και θέτουμε

$$\mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \cup \mathcal{E}_\infty,$$

δηλ. βάζουμε μέσα στο $\mathcal{P}$ και άλλα ¨σημεία¨: τις κλάσεις ισοδυναμίας των παράλληλων ευθειών. Προφανώς $\mathcal{P} \cap \mathcal{E}_\infty = \emptyset$.

Ένα στοιχείο P του συνόλου $\mathcal{P}^+$ λέγεται ***πραγματικό σημείο*** αν $P \in \mathcal{P}$, και ***ιδεατό*** ή ***κατ΄ εκδοχήν σημείο*** αν $P \in \mathcal{E}_\infty$.

Για κάθε $\ell \in \mathcal{L}$ θέτουμε τώρα

$$\ell^* = J(\ell) \cup \{[\ell]\},$$

δηλ. στην σημειοσειρά $J(\ell)$ κάθε ευθείας ℓ επισυνάπτουμε ένα ακόμη (ιδεατό) σημείο, την κλάση $[\ell]$. Έτσι κάθε ευθεία $\ell \in \mathcal{L}$ μεγαλώνει κατά ένα σημείο. Θέτουμε

$$\mathcal{L}^+ = \{\ell^* \mid \ell \in \mathcal{L}\} \cup \{\mathcal{E}_\infty\},$$

δηλ. το $\mathcal{L}^*$ αποτελείται από όλες τις ¨μεγαλωμένες¨ ευθείες ℓ^* και μια ακόμη ευθεία, την $\mathcal{E}_\infty$.

Οι ℓ^* λέγονται ***πραγματικές ευθείες*** και η $\mathcal{E}_\infty$ ***ιδεατή*** ή ***κατ΄ εκδοχήν ευθεία***.

Θεωρούμε τώρα την διμελή σχέση $\mathcal{I}^+ \subset \mathcal{P}^+ \times \mathcal{L}^+$ που ορίζεται ως εξής: για ένα ζεύγος $(A^+, k^+) \in \mathcal{P}^+ \times \mathcal{L}^+$ ισχύει $(A^+, k^+) \in \mathcal{I}^+$, αν ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες:

(1) A^+ είναι ένα πραγματικό σημείο $A^+ = A \in \mathcal{P}$, k^+ είναι μια πραγματική ευθεία $k^+ = k^*$, για κάποια $k \in \mathcal{L}$, και $(A, k) \in \mathcal{I}$, δηλ.

$$(A, k) \in \mathcal{I} \;\Rightarrow\; (A, k^*) \in \mathcal{I}^+.$$

(2) A^+ είναι ένα ιδεατό σημείο $A^+ = [a]$, για κάποια $a \in \mathcal{L}$, και $k^+ = \mathcal{E}_\infty$ είναι η ιδεατή ευθεία, δηλ.

$$\forall\ a \in \mathcal{L}\ :\ ([a], \mathcal{E}_\infty) \in \mathcal{I}^+.$$

(3) A^+ είναι ένα ιδεατό σημείο $A^+ = [a]$, για κάποια $a \in \mathcal{L}$, και k^+ είναι πραγματική ευθεία $k^+ = k^*$, για κάποια $k \in \mathcal{L}$, με $k /\!\!/ a$ (οπότε $[k] = [a]$), δηλ.

$$\forall\ k \in \mathcal{L}\ :\ ([k], k^*) \in \mathcal{I}^+.$$

Συνοψίζοντας τις ανωτέρω 3 περιπτώσεις, παίρνουμε

$$\mathcal{I}^+ = \mathcal{I}\ \cup\ \{([k], \mathcal{E}_\infty) \mid k \in \mathcal{L}\}\ \cup\ \{([k], k^*) \mid k \in \mathcal{L}\}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1. Για κάθε ΣΕ $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, η τριάδα $(\mathcal{P}^+, \mathcal{L}^+, \mathcal{I}^+)$ λέγεται ***πλήρωση*** του $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. *Για κάθε ΣΕ $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, η πλήρωση $(\mathcal{P}^+, \mathcal{L}^+, \mathcal{I}^+)$ είναι ΠΕ.*

Απόδειξη. Για το (ΠΕ 1): Έστω $P^+ \neq Q^+ \in \mathcal{P}^+$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(1) Τα P^+ και Q^+ είναι πραγματικά σημεία. Τότε $P^+ = P \in \mathcal{P}$ και $Q^+ = Q \in \mathcal{P}$ με $P \neq Q$. Από το (ΣΕ 1) υπάρχει ακριβώς μία $k \in \mathcal{L}$ με $(P, k) \in \mathcal{I}$ και $(Q, k) \in \mathcal{I}$. Άρα υπάρχει η αντίστοιχη (μεγαλύτερη) $k^* \in \mathcal{L}^+$ με $(P, k^*) \in \mathcal{I}^+$ και $(Q, k^*) \in \mathcal{I}^+$. Η k^* είναι μοναδική: Έστω $\ell^+ \in \mathcal{L}^+$ μια ευθεία με $(P, \ell^+) \in \mathcal{I}^+$ και $(Q, \ell^+) \in \mathcal{I}^+$. Η ℓ^+ δεν είναι η ιδεατή ευθεία $\mathcal{E}_\infty$ γιατί, όπως φαίνεται από τον ορισμό της $\mathcal{I}^+$, η $\mathcal{E}_\infty$ δεν διέρχεται από κανένα πραγματικό σημείο. Άρα η ℓ^+ είναι πραγματική, δηλ. υπάρχει αντίστοιχη $\ell \in \mathcal{L}$ ώστε $\ell^+ = \ell^*$. Τότε $(P, \ell) \in \mathcal{I}$ και $(Q, \ell) \in \mathcal{I}$, οπότε από το μονοσήμαντο του (ΣΕ 1) προκύπτει $k = \ell$, άρα και $k^* = \ell^*$.

(2) Το P^+ είναι πραγματικό, δηλ. $P^+ = P \in \mathcal{P}$ και το Q^+ είναι ιδεατό, δηλ. $Q^+ = [k]$, για κάποια ευθεία $k \in \mathcal{L}$. Μέσα στην κλάση $[k]$ των παραλλήλων προς την k, από το (ΣΕ 2), υπάρχει ακριβώς μία $m /\!\!/ k$ που διέρχεται από το P, δηλ. $(P, m) \in \mathcal{I}$, οπότε $(P, m^*) \in \mathcal{I}^+$. Επίσης, επειδή $k /\!\!/ m$, έχουμε $Q^+ = [k] = [m]$ και $([m], m^*) \in \mathcal{I}^+$. Η m^* είναι η μοναδική με αυτή την ιδιότητα: Έστω $\ell^+ \in \mathcal{L}^+$ που διέρχεται από το $P^+ = P$ και το $Q^+ = [k]$. Επειδή η ℓ^+ διέρχεται από το πραγματικό σημείο P, η ℓ^+ είναι πραγματική, δηλ. $\ell^+ = \ell^*$, για κάποια $\ell \in \mathcal{L}$, για την οποία ισχύει $(P, \ell) \in \mathcal{I}$ και $([k], \ell^*) \in \mathcal{I}^+$. Επειδή το μοναδικό ιδεατό σημείο που ανήκει στην πραγματική ευθεία ℓ^* είναι το $[\ell]$, παίρνουμε $[k] = [\ell]$, δηλ. $\ell /\!\!/ k /\!\!/ m$. Οπότε το P ανήκει στις δύο παράλληλες m και ℓ, απ' όπου προκύπτει $m = \ell$ και $m^* = \ell^*$.

(3) Και τα δύο σημεία είναι ιδεατά, δηλ. υπάρχουν $k, m \in \mathcal{L}$ με $P^+ = [k]$ και $Q^+ = [m]$. Τότε $[k], [m] \in \mathcal{E}_\infty$. Επειδή κάθε πραγματική ευθεία ℓ^* διέρχεται μόνο από ένα ιδεατό σημείο, το αντίστοιχο $[\ell]$, δεν υπάρχει πραγματική ευθεία που να περιέχει δύο διαφορετικά ιδεατά σημεία και η $\mathcal{E}_\infty$ είναι η μοναδική με αυτή την ιδιότητα.

Για το (ΠΕ 2): Έστω $k^+ \neq \ell^+ \in \mathcal{L}^+$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(1) Οι k^+ και ℓ^+ είναι πραγματικές ευθείες. Τότε $k^+ = k^* \in \mathcal{L}^+$ και $\ell^+ = \ell^* \in \mathcal{L}^+$, για κάποιες $k, \ell \in \mathcal{L}$ με $k \neq \ell$. Αν $k /\!/ \ell$, έχουν κοινό σημείο το $[k] = [\ell]$. Αν $k \not\parallel \ell$, τότε έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο $P \in \mathcal{P}$ (βλ. Μάθημα 1, Πόρισμα).

(2) Η k^+ είναι πραγματική, δηλ. $k^+ = k^* \in \mathcal{L}^+$ για κάποια $k \in \mathcal{L}$ και η ℓ^+ είναι ιδεατή, δηλ. $\ell^+ = \mathcal{E}_\infty$. Οι ℓ^* και $\mathcal{E}_\infty$ έχουν κοινό σημείο το $[\ell]$.

Για το (*ΠΕ 3*): Αρκούν τα 4 σημεία του $\mathcal{P}$ που εξασφαλίζονται από το Θεώρημα του Μαθήματος 1. □

Θεωρούμε τώρα ένα ΠΕ $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ και επιλέγουμε μια τυχαία $\ell_o \in \mathcal{L}$. Θέτουμε:

$$\mathcal{P}^- = \mathcal{P} \setminus J(\ell_o),$$

δηλ. από το $\mathcal{P}$ αφαιρούμε τα σημεία μιας ευθείας. Κατόπιν, για κάθε $k \in \mathcal{L}$, με $k \neq \ell_o$ θέτουμε

$$k^- = J(k) \setminus \{k \wedge \ell_o\}$$

δηλ. από την σημειοσειρά κάθε ευθείας $k \neq \ell_o$ αφαιρούμε το κοινό σημείο με την ℓ_o και παίρνουμε

$$\mathcal{L}^- = \{k^- \mid k \in \mathcal{L},\ k \neq \ell_o\}.$$

Τέλος, θεωρούμε την διμελή σχέση $\mathcal{I}^- \subset \mathcal{P}^- \times \mathcal{L}^-$ που ορίζεται από την ισοδυναμία

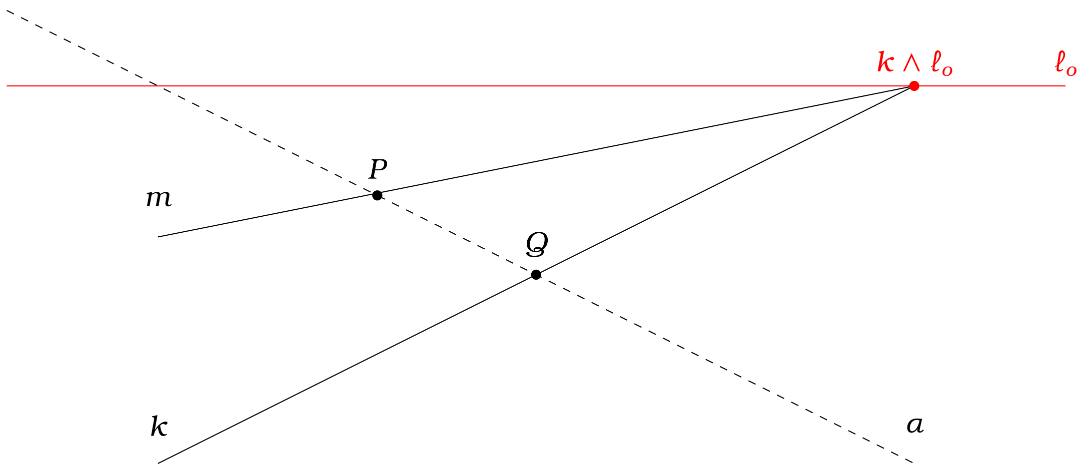
$$(P, k^-) \in \mathcal{I} \ \Leftrightarrow\ P \in J(k) \setminus \{k \wedge \ell_o\}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2. Για κάθε ΠΕ $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, η τριάδα $(\mathcal{P}^-, \mathcal{L}^-, \mathcal{I}^-)$ λέγεται ***αποπλήρωση*** του $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. *Για κάθε ΠΕ $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, η αποπλήρωση $(\mathcal{P}^-, \mathcal{L}^-, \mathcal{I}^-)$ είναι ΣΕ.*

Απόδειξη. *Για το* (*ΣΕ 1*): Έστω $P \neq Q \in \mathcal{P}^- \subseteq \mathcal{P}$, δηλ. τα P, Q είναι διαφορετικά σημεία του αρχικού ΠΕ, που δεν ανήκουν στην ℓ_o. Άρα υπάρχει μοναδική $k \in \mathcal{L}$ με $(P, k), (Q, k) \in \mathcal{I}$, οπότε, από τον ορισμό της $\mathcal{I}^-$, η k^- είναι η μοναδική με $(P, k^-), (Q, k^-) \in \mathcal{I}^-$.

Για το (*ΣΕ 2*): Έστω $P \in \mathcal{P}^-$ και $k^- \in \mathcal{L}^-$ με $(P, k^-) \notin \mathcal{I}^-$. Επειδή $P \in \mathcal{P}^-$, το P δεν ανήκει στην ℓ_o, άρα δεν είναι το σημείο $k \wedge \ell_o$ που αφαιρέθηκε από την k. Επομένως, $P \notin J(k)$ και στο αρχικό $\mathcal{L}$ υπάρχει ακριβώς μία ευθεία $m = P \vee (k \wedge \ell_o)$. Τότε $(P, m) \in \mathcal{I}$, άρα $(P, m^-) \in \mathcal{I}^-$. Επίσης, $J(m) \cap J(k) = \{k \wedge \ell_o = m \wedge \ell_o\}$, άρα $J(m^-) \cap J(k^-) = \emptyset$, δηλ $m^- /\!/ k^-$. Η m^- είναι η μοναδική με αυτή την ιδιότητα: Για κάθε $a^- \in \mathcal{L}^-$ με $(P, a^-) \in \mathcal{I}^-$, η a διέρχεται από το P, άρα $a \neq k$ και οι a και k έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο $Q \in \mathcal{L}$. Αν το Q δεν ανήκει στην ℓ_o, τότε $Q \in \mathcal{L}^-$,



Σχήμα 5.1

και συνεχίζει να είναι κοινό σημείο των k^- και a^-, δηλ $k^- \nparallel a^-$. Αν το Q ανήκει στην ℓ_o, είναι το $k \wedge \ell_o$, άρα $a = P \vee (k \wedge \ell_o) = m$.

Για το (*ΣΕ 3*): Υπάρχει μια ευθεία $k \in \mathcal{L}$, $k \neq \ell_o$, αλλιώς όλα τα σημεία του $\mathcal{P}$ κείναι πάνω στην ℓ_o, δηλ. είναι συγγραμμικά, άτοπο. Πάνω στην k κείνται (τουλάχιστον) 3 σημεία: το $k \wedge \ell_o$, και άλλα δύο, έστω τα $A \neq B$. Έξω από τις k και ℓ_o υπάρχει $P \in \mathcal{P}^-$ (βλ. Μάθημα 2, Πρόταση 3). Τα A, B, P είναι τα ζητούμενα. □

ΑΣΚΗΣΗ

Να βρείτε την πλήρωση του ΣΕ των 4 σημείων και την αποπλήρωση του ΠΕ του Fano.