ΜΑΘΗΜΑ 20

ΟΡΙΣΜΟΣ. Έστω $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ένα σύνολο με δύο πράξεις, μια **πρόσθεση** κι ένα **πολλαπλασιασμό**

$$+ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} : (a, b) \longmapsto a + b,$$
$$\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} : (a, b) \longmapsto a \cdot b.$$

Υποθέτουμε ότι η πρόσθεση ικανοποιεί τις συνθήκες:

(A1) Είναι **μεταθετική**, δηλ.

$$a + b = b + a, \qquad \forall\ a, b \in \mathcal{A}.$$

(A2) Είναι **προσεταιριστική**, δηλ.

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \qquad \forall\ a, b, c \in \mathcal{A}.$$

Αν $a(B) = B'$, θέτουμε $\beta = id$. (A3) Έχει **ουδέτερο** στοιχείο, που ονομάζουμε **μηδέν**, δηλ.

$$\exists\ 0 \in \mathcal{A} \quad : \quad 0 + a = a, \quad \forall\ a \in \mathcal{A}.$$

(A4) Κάθε στοιχείο $a \in \mathcal{A}$ έχει **αντίθετο**, δηλ.

$$\forall\ a \in \mathcal{A} \quad \exists\ (-a) \in \mathcal{A} \quad : \quad a + (-a) = 0.$$

Επίσης υποθέτουμε ότι ο πολλαπλασιασμός ικανοποιεί τις συνθήκες:

(M2) Είναι **προσεταιριστικός**, δηλ.

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \qquad \forall\ a, b, c \in \mathcal{A}.$$

(M3) Έχει μη μηδενικό **ουδέτερο** στοιχείο, που ονομάζουμε **μονάδα**, δηλ.

$$\exists\ 1 \neq 0,\ 1 \in \mathcal{A} \quad : \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \quad \forall\ a \in \mathcal{A}.$$

(M4) Κάθε μη μηδενικό στοιχείο $0 \neq a \in \mathcal{A}$ έχει **αντίστροφο**, δηλ.

$$\forall\ a \in \mathcal{A} \setminus \{0\} \quad \exists\ a^{-1} \in \mathcal{A} \quad : \quad a \cdot a^{-1} = a^{-1} = 1.$$

Τέλος, υποθέτουμε ότι οι δύο πράξεις συνδέονται με την:

(E) **Επιμεριστική** ιδιότητα: για κάθε $a, b, c \in \mathcal{A}$,

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \text{ και}$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Τότε η τριάδα $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ λέγεται **διαιρετικός δακτύλιος**.

Εάν ο πολλαπλασιασμός ικανοποιεί επιπλέον την ιδιότητα:

(M1) Είναι **μεταθετικός**, δηλ.

$$a \cdot b = b \cdot a, \qquad \forall\ a, b \in \mathcal{A},$$

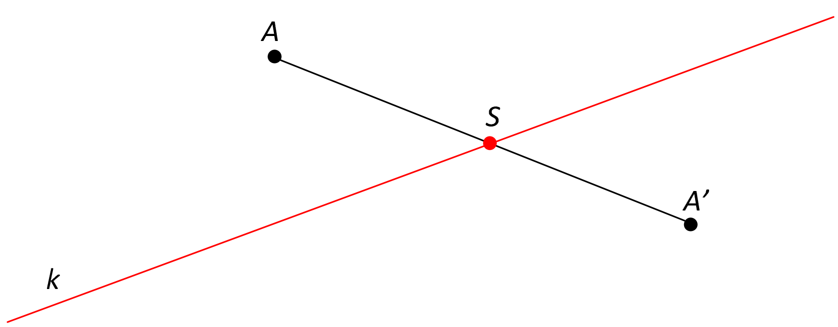
τότε ο διαιρετικός δακτύλιος $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ ονομάζεται **σώμα**.

Στα προηγούμενα μαθήματα θεωρήσαμε ένα προβολικό επίπεδο Desargues, και στο σύνολο των σημείων μιας ευθείας k (μετά την αφαίρεση ενός σημείου S), ορίσαμε δύο πράξεις που ικανοποιούν τις ιδιότητες (A1-4), (M2-4) και (E), δηλ. εφοδιάσαμε το σύνολο $\mathcal{R} = J(k)\setminus\{S\}$ με την αλγεβρική δομή ενός διαιρετικού δακτύλιου. Εύλογα προκύπτει η ερώτηση αν η δομή αυτή εξαρτάται από την (αυθαίρετη) επιλογή της ευθείας k, του σημείου S, της βοηθητικής ευθείας ℓ και των σημείων O και I. Η απάντηση είναι *όχι*. Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού θα χρειαστούμε το επόμενο:

ΛΗΜΜΑ. *Έστω $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ ένα προβολικό επίπεδο Desargues. Έστω δύο τετράδες σημείων (A, B, C, D) και (A', B', C', D'), σε κάθε μια των οποίων τα σημεία ανά τρία είναι μη-συγγραμμικά. Τότε υπάρχει συγγραμμικότητα $\sigma \equiv (\sigma, \tau) \in \mathcal{A}ut(\mathcal{P})$, με*

$$\sigma(X) = X', \qquad \forall\ X = A, B, C, D.$$

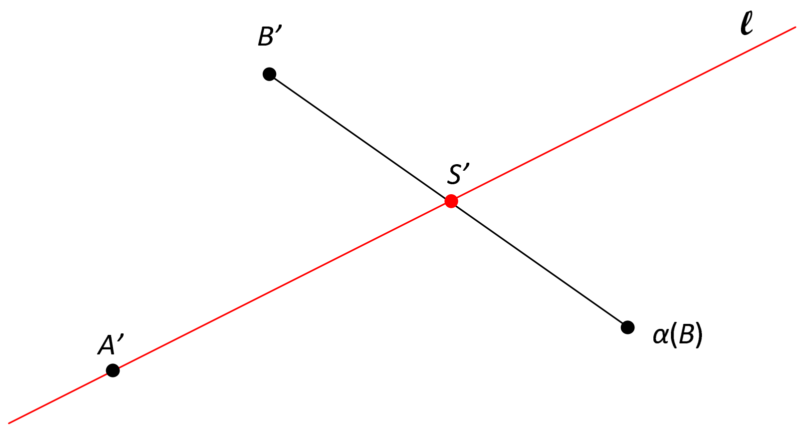
Απόδειξη. 1ο βήμα. Αν $A \neq A'$, παίρνουμε ευθεία $k \in \mathcal{L}$ με $A, A' \notin k$, οπότε $k \neq A \vee A'$. Θέτουμε $S = k \wedge (A \vee A')$. Τότε η (S, k, A, A') είναι προσδιοριστική τετράδα μιας έπαρσης $a \in \mathbb{E}(S, k)$ με $a(A) = A'$.



Αν $A = A'$, θέτουμε $a = id$.

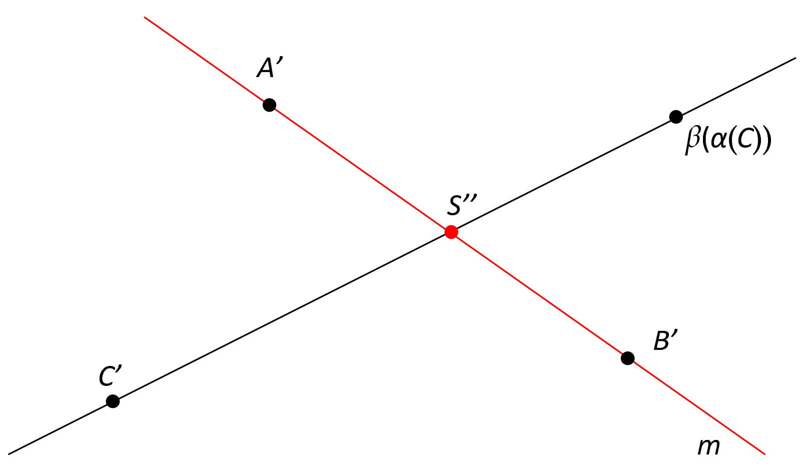
2ο βήμα. Ελέγχουμε την τιμή $\alpha(B)$. Αν $\alpha(B) \neq B'$, παίρνουμε $\ell \in J(A')$ με $\alpha(B), B' \notin \ell$ και θέτουμε $S' = (\alpha(B) \vee B') \wedge \ell$. Τότε η $(S', \ell, \alpha(B), B')$ είναι προσδιοριστική τετράδα μιας έπαρσης $\beta \in \mathbb{E}(S', \ell)$ με

$$\beta(\alpha(A)) = \beta(A') = A',$$
$$\beta(\alpha(B)) = B'.$$



Αν $\alpha(B) = B'$, θέτουμε $\beta = id$.

3ο βήμα. Ελέγχουμε την τιμή $\beta(\alpha(C))$. Αν $\beta(\alpha(C)) \neq C'$, παίρνουμε $m = A' \vee B'$ και $S'' = (C' \vee (\beta(\alpha(C))) \wedge m$. Τότε η $(S'', m, \beta(\alpha(C)), C')$ είναι προσδιοριστική τετράδα

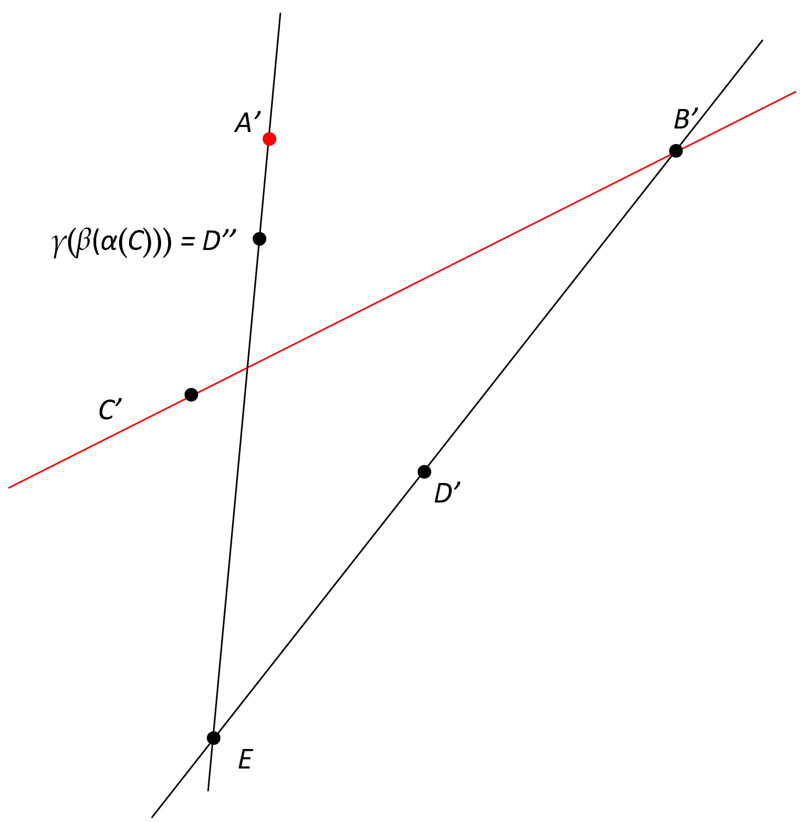


μιας έπαρσης $\gamma \in \mathbb{E}(S'', m)$ με

$$\gamma(\beta(\alpha(A))) = \gamma(A') = A',$$
$$\gamma(\beta(\alpha(B))) = \gamma(B') = B',$$
$$\gamma(\beta(\alpha(C))) = C'.$$

Αν $\beta(\alpha(C)) = C'$, θέτουμε $\gamma = id$.

4ο βήμα. Ελέγχουμε την τιμή $\gamma(\beta(\alpha(D)))$. Αν $\gamma(\beta(\alpha(D))) = D'$, θέτουμε $\sigma = \gamma\circ\beta\circ\alpha$ και η απόδειξη έχει τελειώσει. Αν $\gamma(\beta(\alpha(D))) \neq D'$, θεωρούμε το σημείο A', την ευθεία $B' \vee C'$, θέτουμε $D'' = \gamma(\beta(\alpha(D)))$ και παίρνουμε $E = (A' \vee D'') \wedge (B' \vee D')$. Τότε το E είναι συγγραμμικό με A', D'', άρα $(A', B' \vee C", D'', E)$ είναι προσδιοριστική τετράδα μιας ομολογίας $\delta \in \mathbb{H}(A', B' \vee C')$ με



$$
\begin{aligned}
\delta(\gamma(\beta(\alpha(A)))) &= \delta(A') = A', \\
\delta(\gamma(\beta(\alpha(B)))) &= \delta(B') = B,' \\
\delta(\gamma(\beta(\alpha(C)))) &= \delta(C') = C', \\
\delta(\gamma(\beta(\alpha(D)))) &= \delta(D'') = E.
\end{aligned}
$$

5ο βήμα. Στο προηγούμενο σχήμα, $(B', A' \vee C', E, D')$ είναι προσδιοριστική τετράδα μιας ομολογίας $\varepsilon \in \mathbb{H}(B', A' \vee C')$, με

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(\delta(\gamma(\beta(\alpha(A))))) &= \varepsilon(A') = A', \\
\varepsilon(\delta(\gamma(\beta(\alpha(B))))) &= \varepsilon(B') = B,' \\
\varepsilon(\delta(\gamma(\beta(\alpha(C))))) &= \varepsilon(C') = C', \\
\varepsilon(\delta(\gamma(\beta(\alpha(D))))) &= \varepsilon(E) = D'.
\end{aligned}
$$

Οπότε η $\sigma = \varepsilon \circ \delta \circ \gamma \circ \beta \circ \alpha$ είναι η ζητούμενη συγγραμμικότητα. $\square$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. *Έστω $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ ένα προβολικό επίπεδο Desargues και δύο ζεύγη $(A, \ell), (A', \ell') \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$. Τότε:*

(i) Αν $A \notin \ell$ και $A' \notin \ell'$, οι ομάδες $\mathbb{H}(A, \ell)$ και $\mathbb{H}(A', \ell')$ είναι ισόμορφες.

(ii) Αν $A \in \ell$ και $A' \in \ell'$, οι ομάδες $\mathbb{E}(A, \ell)$ και $\mathbb{E}(A', \ell')$ είναι ισόμορφες.

Απόδειξη. (i) Επιλέγουμε $B, C \in \ell$ και $D \in \mathcal{L}$ έτσι ώστε τα A, B, C, D ανά τρία να είναι μη συγγραμμικά. Παρόμοια, επιλέγουμε $B', C' \in \ell'$ και $D' \in \mathcal{L}$ έτσι ώστε τα A', B', C', D' ανά τρία να είναι μη συγγραμμικά. Θεωρούμε την σ του προηγούμενου λήμματος και θέτουμε

$$h : \mathbb{H}(A, \ell) \longrightarrow \mathbb{H}(A', \ell') : \phi \longmapsto h(\phi) = \sigma \circ \phi \circ \sigma^{-1}.$$

Τότε η h είναι ισομορφισμός ομάδων. Πράγματι, για κάθε $\phi \in \mathbb{H}(A, \ell)$, η $h(\phi)$ είναι συγγραμμικότητα, σαν σύνθεση συγγραμμικοτήτων. Έστω $m' \in J(A')$. Τότε

$$
\begin{aligned}
A' \in m' &\Rightarrow\ \sigma^{-1}(A') = A \in \sigma^{-1}(m') \\
&\Rightarrow\ \phi(\sigma^{-1}(m')) = \sigma^{-1}(m') \\
&\Rightarrow\ \sigma(\phi(\sigma^{-1}(m'))) = \sigma(\sigma^{-1}(m')) = m'
\end{aligned}
$$

και το A' είναι κέντρο της $h(\phi)$. Έστω $P' \in \ell' = B' \vee C'$. Τότε

$$
\begin{aligned}
P' \in \ell' &\Rightarrow\ \sigma^{-1}(P') \in \sigma^{-1}(B' \vee C') = \sigma^{-1}(B') \vee \sigma^{-1}(C') = B \vee C = \ell \\
&\Rightarrow\ \phi(\sigma^{-1}(P')) = \sigma^{-1}(P') \\
&\Rightarrow\ \sigma(\phi(\sigma^{-1}(P'))) = \sigma(\sigma^{-1}(P')) = P'
\end{aligned}
$$

και η ℓ' είναι άξονας της $h(\phi)$. Άρα $h(\phi) \in \mathbb{H}(A', \ell')$. Είναι άμεσο ότι η h είναι 1-1, επί και μορφισμός ομάδων.

(ii) Στη δεύτερη περίπτωση θεωρούμε $B \neq A$, $B \in \ell$ και $C, D \notin \ell$, με τα A, B, C, D ανά τρία μη συγγραμμικά. Ομοίως θεωρούμε $B' \neq A'$, $B' \in \ell'$ και $C', D' \notin \ell'$ με τα A', B', C', D' ανά τρία μη συγγραμμικά, και συνεχίζουμε όπως στο (i). □

Είναι άμεσο πλέον ότι ισχύει το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. *Έστω $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ ένα προβολικό επίπεδο Desargues. Έστω ακόμη $k \neq \ell \in \mathcal{L}$, $S = k \wedge \ell$ και $O, I \in J(k) \setminus \{S\}$ με $O \neq I$. Τότε η δομή διαιρετικού δακτύλιου που ορίζεται στο $\mathcal{R} = J(k) \setminus \{S\}$ από τις ομάδες $\mathbb{E}(S, \ell)$ και $\mathbb{H}(O, \ell)$ είναι ανεξάρτητη της επιλογής των k, S, ℓ, O και I.*