ΜΑΘΗΜΑ 2: ΠΡΟΒΟΛΙΚΑ ΕΠΙΠΕΔΑ

Θεωρούμε πάλι ένα σύνολο σημείων $\mathcal{P}$, ένα σύνολο ευθειών $\mathcal{L}$ και μια σχέση σύμπτωσης $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{L}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Η τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ λέγεται ***προβολικό επίπεδο*** (συντ. ΠΕ), αν ικανοποιούνται τα επόμενα αξιώματα:
(ΠΕ 1) Από δύο διαφορετικά σημεία διέρχεται ακριβώς μία ευθεία, δηλ.

$$\forall\, A, B \in \mathcal{P} \text{ με } A \neq B \;\; \exists\,!\; k \in \mathcal{L} \;:\; (A, k) \in \mathcal{I} \text{ και } (B, k) \in \mathcal{I}.$$

(ΠΕ 2) Κάθε ζεύγος διαφορετικών ευθειών $k \neq \ell$ έχει σημείο τομής, δηλ.

$$\forall\, k, \ell \in \mathcal{L} \text{ με } k \neq \ell \;\; \exists\, A \in \mathcal{P} \text{ με } (A, k) \in \mathcal{I} \text{ και } (A, \ell) \in \mathcal{I}.$$

(ΠΕ 3) Υπάρχουν (τουλάχιστον) τέσσερα διαφορετικά σημεία, τα οποία ανά τρία είναι μη-συγγραμμικά.

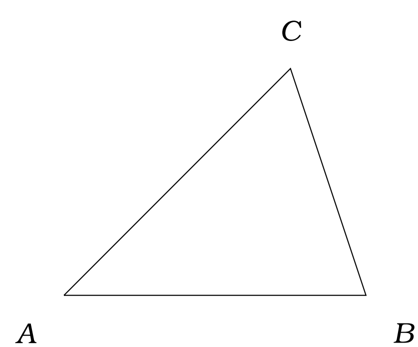
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ. (1) Τα αξιώματα (ΣΕ 1) και (ΠΕ 1) ταυτίζονται.

(2) Το (ΠΕ 2) αίρει το (ΣΕ 2).

(3) Σε ένα συσχετισμένο επίπεδο, η ύπαρξη τριών μη-συγγραμμικών σημείων (αξίωμα (ΣΕ 3)) συνεπάγεται, λόγω της ύπαρξης παραλλήλων (αξίωμα (ΣΕ 2)) την ύπαρξη και τέταρτου σημείου. Αυτό *δεν* συμβαίνει αν το (ΣΕ 2) αντικατασταθεί από το (ΠΕ 2). Πράγματι, αν θεωρήσουμε $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$ με A, B, C τρία μη-συγγραμμικά σημεία του ευκλείδιου επιπέδου, $\mathcal{L} = \{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}\}$ με $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ τα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα και

$$\mathcal{I} = \{(A, \overline{AB}), (B, \overline{AB}), (B, \overline{BC}), (C, \overline{BC}), (A, \overline{AC}), (C, \overline{AC})\}$$

όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα



Σχήμα 2.1

τότε η τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ικανοποιεί τα (ΠΕ 1) και (ΠΕ 2). Το αξίωμα (ΠΕ 3) εισάγεται για να αποκλειστεί η ανωτέρω τετριμμένη περίπτωση.

(4) Το (ΠΕ 1) απαιτεί η ευθεία που διέρχεται από δύο διαφορετικά σημεία να είναι μοναδική. Στο (ΠΕ 2) απαιτείται μόνο η ύπαρξη και όχι η μοναδικότητα του κοινού σημείου δύο διαφορετικών ευθειών. Η μοναδικότητα του όμως εξασφαλίζεται, όπως φαίνεται από την επόμενη

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. *Αν $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ είναι ένα ΠΕ και $k, \ell \in \mathcal{L}$ με $k \neq \ell$, τότε υπάρχει μοναδικό σημείο τομής $A \in \mathcal{P}$, δηλ.*

$$\forall\ k, \ell \in \mathcal{L} \text{ με } k \neq \ell \ \ \exists\,!\ A \in \mathcal{P} \text{ με } (A, k) \in \mathcal{I} \text{ και } (A, \ell) \in \mathcal{I}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε σε ένα ΠΕ $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ δύο ευθείες $k \neq \ell$. Έστω ότι υπάρχουν δύο σημεία $P \neq Q$ για τα οποία ισχύουν

$$P\mathcal{I}k,\ \ P\mathcal{I}\ell,\ \ Q\mathcal{I}k,\ \ Q\mathcal{I}\ell.$$

Τότε οι k, ℓ έχουν δύο κοινά σημεία, άρα από το (ΠΕ 1), $k = \ell$, άτοπο. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Όπως στα συσχετισμένα επίπεδα, έτσι και στα προβολικά, η μοναδική ευθεία $k \in \mathcal{L}$, που διέρχεται από δύο σημεία $P \neq Q$ λέγεται *ένωση* των P και Q και συμβολίζεται με

$$k = P \vee Q.$$

Επίσης, το μοναδικό κοινό σημείο P δύο ευθειών $k \neq \ell$ λέγεται *τομή* των k και ℓ και συμβολίζεται με

$$P = k \wedge \ell.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. (**1**) Θεωρούμε τον τριδιάστατο πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ και θέτουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \{U \leq \mathbb{R}^3 \mid \dim U = 1\}, \\
\mathcal{L} &= \{V \leq \mathbb{R}^3 \mid \dim V = 2\}, \\
\mathcal{I} &\equiv \leq
\end{aligned}$$

δηλ.

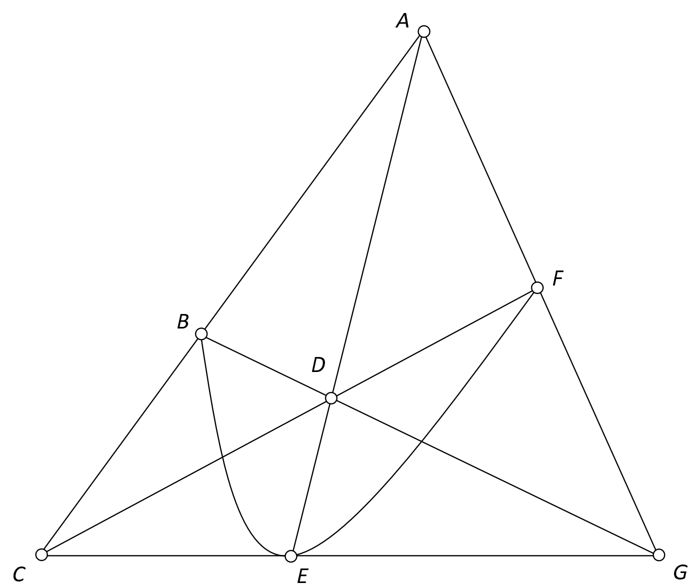
$$(U, V) \in \mathcal{I} \ \Leftrightarrow\ U \leq V.$$

Τότε η τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ είναι ΠΕ.

($\mathbf{2}$) Θεωρούμε την τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, όπου

$$\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$$
$$\mathcal{L} = \{\{A, B, C\}, \{A, D, E\}, \{A, F, G\}, \{C, D, F\}, \{B, D, G\}, \{B, E, F\}, \{C, E, G\}\}$$
$$\mathcal{I} \equiv \in$$

Ελέγχεται αμέσως ότι η $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ είναι συσχετισμένο επίπεδο. Μια αναπαράσταση του βλέπουμε στο Σχήμα 2.2:



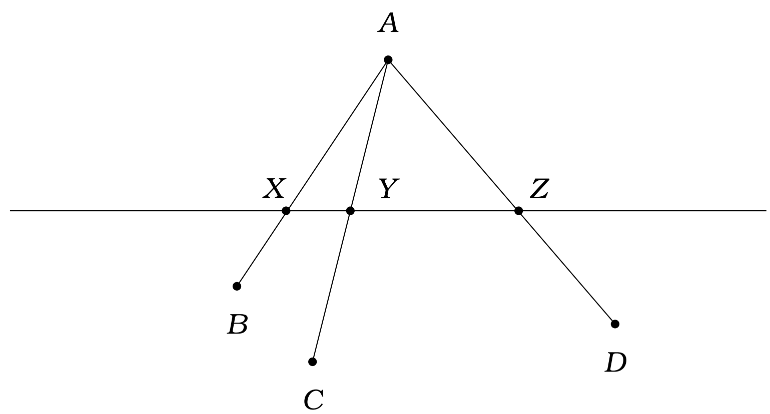
Σχήμα 2.2

Το ανωτέρω επίπεδο λέγεται ***προβολικό επίπεδο των 7 σημείων*** ή ***προβολικό επίπεδο του Fano***. Θα δείξουμε αργότερα ότι είναι το *μικρότερο* ΠΕ που υπάρχει. Χρειαζόμαστε πρώτα την επόμενη

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. *Κάθε ευθεία ενός προβολικού επιπέδου περιέχει τουλάχιστον 3 σημεία.*

Απόδειξη. Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ένα ΠΕ και A, B, C, D τα 4 διαφορετικά σημεία, που είναι ανά 3 μη-συγγραμμικά, και που η ύπαρξη τους εξασφαλίζεται από το αξίωμα (ΠΕ 3). Έστω επίσης και μια ευθεία $\ell \in \mathcal{L}$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(1) Η ℓ δεν διέρχεται από κανένα από τα A, B, C και D.



Σχήμα 2.3

Τότε

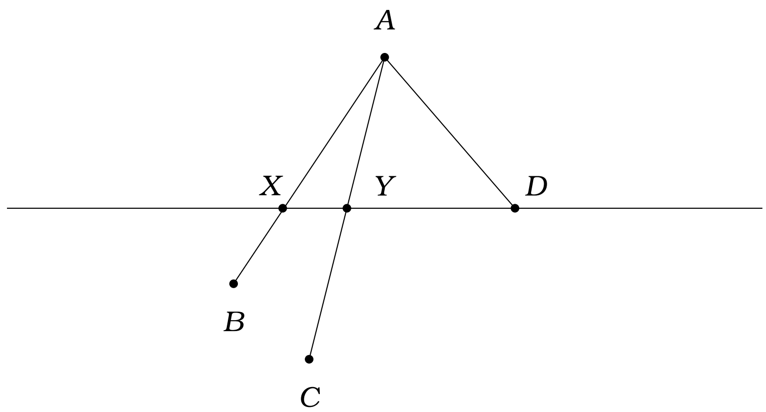
$$\begin{aligned} A, B \notin \ell &\Rightarrow \ \ell \neq A \vee B \Rightarrow \ \exists\,!\ X = (A \vee B) \wedge \ell \neq A, B \\ A, C \notin \ell &\Rightarrow \ \ell \neq A \vee C \Rightarrow \ \exists\,!\ Y = (A \vee C) \wedge \ell \neq A, C \\ A, D \notin \ell &\Rightarrow \ \ell \neq A \vee D \Rightarrow \ \exists\,!\ Z = (A \vee D) \wedge \ell \neq A, D \end{aligned}$$

Τα X, Y, Z ανήκουν στην ℓ και είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Πράγματι, αν $X = Y$, τότε

$$A \vee B = A \vee X = A \vee Y = A \vee C$$

δηλ. A, B και C είναι συγγραμμικά, άτοπο. Ομοίως, $X \neq Z$ και $Y \neq Z$.

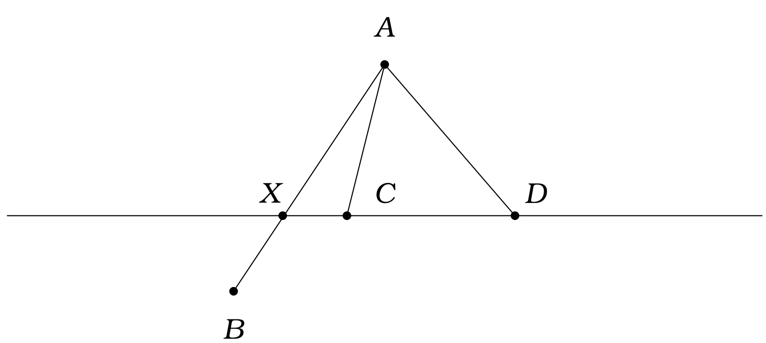
(2) Ένα από τα 4 σημεία, έστω το D ανήκει στην ℓ.



Σχήμα 2.4

Τότε, όπως προηγουμένς, τα $X = (A \vee B) \wedge \ell$, $Y = (A \vee C) \wedge \ell$ και D ανήκουν στην ℓ και είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

(3) Δύο από τα 4 σημεία, έστω τα C και D ανήκουν στην ℓ.



Σχήμα 2.5

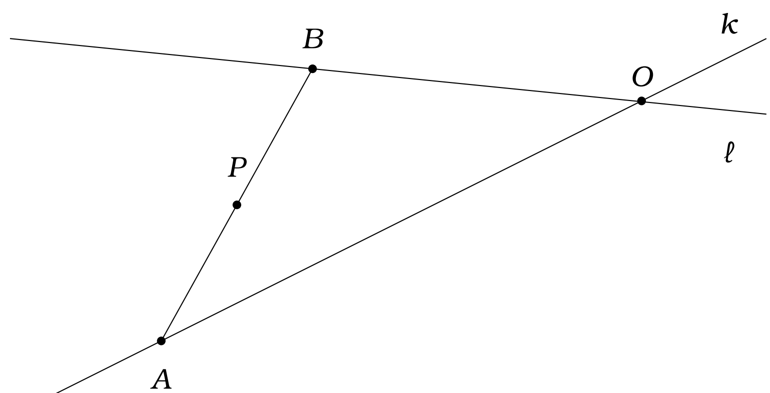
Τότε, όπως προηγουμένως, τα $X = (A \vee B) \wedge \ell$, $Y = (A \vee C) \wedge \ell$ και D ανήκουν στην ℓ και είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

(4) Οι περιπτώσεις τρία (ή και τα τέσσερα) σημεία να ανήκουν στην ℓ δεν μπορούν να ισχύουν, γιατί τα τρία (ή και όλα τα) σημεία θα ήταν συγγραμμικά. □

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Το επίπεδο του Fano είναι το μικρότερο ΠΕ.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 3. *Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ένα ΠΕ. Τότε για κάθε $k, \ell \in \mathcal{L}$ με $k \neq \ell$, υπάρχει $P \in \mathcal{P}$ με $(P, k) \notin \mathcal{I}$ και $(P, \ell) \notin \mathcal{I}$.*

Απόδειξη. Αφού $k \neq \ell$, υπάρχει σημείο τομής $O = k \wedge \ell$. Κάθε μία από τις k και ℓ περιέχει τουλάχιστον 3 σημεία, άρα υπάρχουν $A, B \in \mathcal{P}$ με $A \, \mathcal{I} \, k$, $A \neq O$ και $B \, \mathcal{I} \, \ell$, $B \neq O$. Παρατηρούμε ότι $A \neq B$. Πράγματι, αν $A = B$, τότε οι k και ℓ έχουν δύο κοινά σημεία, το $A = B$ και το O, οπότε $k = \ell$, άτοπο. Άρα υπάρχει και η ευθεία $A \vee B$, που διέρχεται από τουλάχιστον 3 σημεία, δηλ. εκτός από τα A και B διέρχεται και από κάποιο $P \neq A, B$. Τότε $(P, k), (P, \ell) \notin \mathcal{I}$.



Σχήμα 2.6

Πράγματι, έστω $P \, \mathcal{I} \, k$. Τότε

$$k = P \vee A = B \vee A,$$

επομένως $B \in k$. Οπότε $k = B \vee O = \ell$, άτοπο. Ομοίως, αν $P \in \ell$, πάλι καταλήγουμε στο άτοπο $k = \ell$. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εξετάσετε αν το εσωτερικό του δίσκου και η επιφάνεια της σφαίρας (βλ. Ασκήσεις του προηγούμενου Μαθήματος 01) είναι ΠΕ. Ποιά από τα αξιώματα ισχύουν σε κάθε περίπτωση και ποιά όχι;

2. Θεωρούμε την μοναδιαία σφαίρα

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

και θέτουμε

$$\begin{aligned} &\mathcal{P} = \{\, \{a, -a\} \mid a \in S^2 \,\} \\ &\mathcal{L} = \{C \mid C \text{ μέγιστος κύκλος της } S^2 \,\} \\ &\{a, -a\}\, \mathcal{I}\, C \;\Leftrightarrow\; a, -a \in C \end{aligned}$$

Να εξετάσετε αν η τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ είναι ΠΕ.

3. Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ΠΕ και $A, B, C \in \mathcal{P}$ τρία μη συγγραμμικά σημεία. Νδο υπάρχει $D \in \mathcal{P}$, έτσι ώστε τα A, B, C, D να είναι διαφορετικά μεταξύ τους και ανά τρία να είναι μη συγγραμμικά.

4. Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ΠΕ και $A \neq B \in \mathcal{P}$. Νδο υπάρχουν $C, D \in \mathcal{P}$, έτσι ώστε τα A, B, C, D να είναι διαφορετικά μεταξύ τους και ανά τρία να είναι μη συγγραμμικά.

5. Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ένα ΠΕ. Νδο για κάθε $P, Q \in \mathcal{P}$ με $P \neq Q$, υπάρχει $k \in \mathcal{L}$ με $(P, k) \notin \mathcal{I}$ και $(Q, k) \notin \mathcal{I}$.