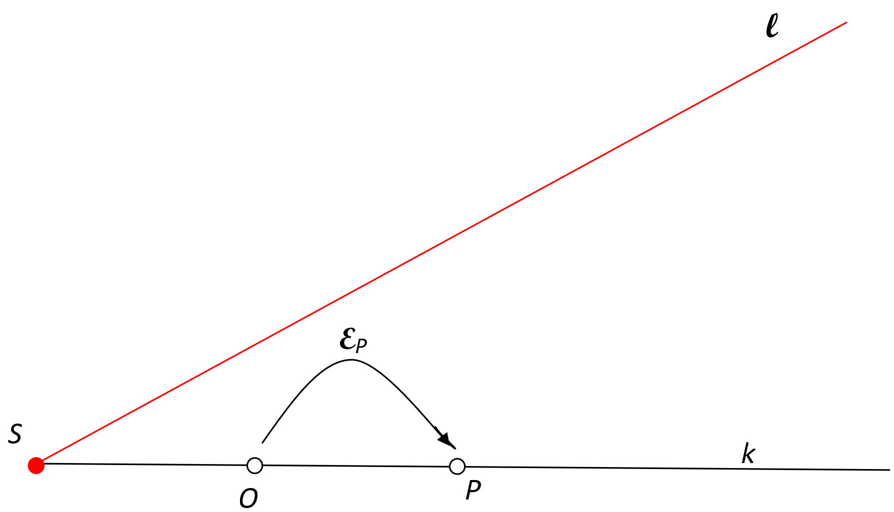
ΜΑΘΗΜΑ 16

Στα προηγούμενα μαθήματα είδαμε πώς η αλγεβρική δομή του σώματος $\mathbb{R}$ και κατ᾽ επέκταση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$ δημιουργούν ένα προβολικό επίπεδο Desargues. Σε ό,τι ακολουθεί θα δούμε την αντίστροφη διαδικασία.

Υπενθυμίζουμε ότι σε ένα προβολικό επίπεδο Desargues, για κάθε προσδιοριστική τετράδα (A, ℓ, X, X') με $A \in \ell$, υπάρχει η αντίστοιχη έπαρση. Επειδή στις επάρσεις, όπως σε όλες τις συγγραμμικότητες, κάθε μια από τις ϕ, ψ προσδιορίζει την άλλη, για μια συγγραμμικότητα (ϕ, ψ) θα γράφουμε μόνο "η συγγραμμικότητα ϕ".

Θεωρούμε ένα προβολικό επίπεδο Desargues $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ και σταθεροποιούμε δύο ευθείες $k, \ell \in \mathcal{L}$ και ένα σημείο $O \in k$ με $O \neq S = k \wedge \ell$. Θέτουμε

$$\mathcal{R} = J(k) \setminus \{S\}.$$



Θεωρούμε τώρα την τετράδα $(S, \ell, O, \cdot)$ όπου τα τρία πρώτα στοιχεία της είναι τα σταθεροποιημένα προηγουμένως. Παρατηρούμε ότι για κάθε $P \in k$ με $P \neq S$ και $P \neq O$, η (S, ℓ, O, P) είναι προσδιοριστική τετράδα μιας έπαρσης από την ομάδα $\mathbb{E}(S, \ell)$ που θα συμβολίζουμε με $\mathcal{E}_P$, και που με δεδομένα τα S, ℓ και O, προσδιορίζεται πλήρως από την ισότητα

$$\mathcal{E}_P(O) = P. \tag{1}$$

Κατ᾽ αυτόν τον τρόπο έχουμε δύο αμφιμονοσήμαντες αντιστοιχίες:

$$\mathcal{R} \ni P \longleftrightarrow (S, \ell, O, P) \longleftrightarrow \mathcal{E}_P \in \mathbb{E}(S, \ell).$$

Άρα το σύνολο $\mathcal{R}$ και η αβελιανή ομάδα $\mathbb{E}(S,\ell)$ έρχονται σε μια 1-1 και επί αντιστοιχία

$$\mathcal{E} : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{E}(S,\ell) : P \longmapsto \mathcal{E}(P) := \mathcal{E}_P,$$

μέσω της οποίας η αλγεβρική δομή της $\mathbb{E}(S,\ell)$ περνά στο σύνολο $\mathcal{R}$ με τον εξής τρόπο: Για κάθε $P, Q \in \mathcal{R}$ θέτουμε

$$P + Q := \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}(P) \circ \mathcal{E}(Q)) = \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}_P \circ \mathcal{E}_Q). \tag{2}$$

Δηλ. για να "προσθέσουμε" τα σημεία P και Q του $\mathcal{R}$ τα μεταφέρουμε στο $\mathbb{E}(S,\ell)$, συνθέτουμε τις εικόνες τους, και ξαναγυρίζουμε την σύνθεση πίσω στο $\mathcal{R}$. Η διαδικασία φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R} \times \mathcal{R} \arrow[r, "\mathcal{E} \times \mathcal{E}"] \arrow[d, dashed, "+"'] & \mathbb{E}(S,\ell) \times \mathbb{E}(S,\ell) \arrow[d, "\circ"] \\
\mathcal{R} & \mathbb{E}(S,\ell) \arrow[l, "\mathcal{E}^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι εφαρμόζοντας την $\mathcal{E}$ στα δύο μέλη της ισότητας (2) παίρνουμε

$$\mathcal{E}_{P+Q} = \mathcal{E}_P \circ \mathcal{E}_Q. \tag{3}$$

Συνδυάζοντας τις (1) και (3) παίρνουμε

$$P + Q = \mathcal{E}_{P+Q}(O) = \mathcal{E}_P \circ \mathcal{E}_Q(O) = \mathcal{E}_P(Q). \tag{4}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι η έπαρση που αντιστοιχεί στην προσδιοριστική τετράδα (S, ℓ, O, O) είναι η $(id_{\mathcal{P}}, id_{\mathcal{L}})$, άρα

$$\mathcal{E}_O = id_{\mathcal{P}}. \tag{5}$$

Τέλος παρατηρούμε ότι, για κάθε $P \in \mathcal{R}$, η έπαρση $\mathcal{E}_P \in \mathbb{E}(S,\ell)$ έχει αντίστροφη $\mathcal{E}_P^{-1} \in \mathbb{E}(S,\ell)$, η οποία εφαρμοσμένη στην (1) δίνει

$$\mathcal{E}_P^{-1}(P) = O. \tag{6}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Το σύνολο $\mathcal{R}$ με την πρόσθεση που ορίζεται από την σχέση (2) είναι αβελιανή ομάδα και η απεικόνιση*

$$\mathcal{E} : (\mathcal{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{E}(S,\ell), \circ)$$

είναι ισομορφισμός ομάδων.

Απόδειξη. (i) Η μεταθετικότητα της σύνθεσης στο $\mathbb{E}(S,\ell)$ κάνει την πρόσθεση στο $\mathcal{R}$ μεταθετική: Για κάθε $P, Q \in \mathcal{R}$,

$$P + Q = \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}_P \circ \mathcal{E}_Q) = \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}_Q \circ \mathcal{E}_P) = Q + P.$$

Η πράξη (2) είναι επίσης προσεταιριστική:

$$\begin{aligned} P + (Q + R) &= \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}_P \circ \mathcal{E}_{Q+R}) \\ &\overset{(3)}{=} \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}_P \circ (\mathcal{E}_Q \circ \mathcal{E}_R)) \\ &= \mathcal{E}^{-1}((\mathcal{E}_P \circ \mathcal{E}_Q) \circ \mathcal{E}_R) \\ &\overset{(3)}{=} \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}_{P+Q} \circ \mathcal{E}_R) \\ &= (P + Q) + R \end{aligned}$$

Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο, το O: Για κάθε $P \in \mathcal{R}$

$$O + P = \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}_O \circ \mathcal{E}_P) \overset{(5)}{=} \mathcal{E}^{-1}(id_{\mathcal{P}} \circ \mathcal{E}_P) = \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}_P) = \mathcal{E}^{-1} \circ \mathcal{E}(P) = P.$$

Τέλος, κάθε $P \in \mathcal{R}$ έχει "*αντίθετο*", το σημείο

$$-P = \mathcal{E}_P^{-1}(O). \tag{7}$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την (4) έχουμε

$$P + (-P) = \mathcal{E}_P(-P) = \mathcal{E}_P(\mathcal{E}_P^{-1}(O)) = O.$$

(ii) Η $\mathcal{E}$ είναι ισομορφισμός ομάδων: ήδη γνωρίζουμε ότι είναι 1-1 και επί. Διατηρεί και την πράξη της ομάδας: για κάθε $P, Q \in \mathcal{R}$ είναι

$$\mathcal{E}(P + Q) = \mathcal{E}_{P+Q} = \mathcal{E}_P \circ \mathcal{E}_Q = \mathcal{E}(P) \circ \mathcal{E}(Q),$$

λόγω της (3), και απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ. (1) Έστω $\phi \in \mathbb{E}(S,\ell)$. Από το επί της $\mathcal{E}$, υπάρχει $P \in \mathcal{R}$ με $\phi = \mathcal{E}_P$. Ποιό είναι το P; Από την σχέση (1) παίρνουμε

$$\mathcal{E}_P = \phi \;\Rightarrow\; P = \mathcal{E}_P(O) = \phi(O).$$

(2) Συνδυάζοντας την (7) με την (1) εφαρμοσμένη στο $-P$, παίρνουμε

$$-P = \mathcal{E}_{-P}(O) = \mathcal{E}_P^{-1}(O) \ \Rightarrow\ \mathcal{E}_{-P} = \mathcal{E}_P^{-1}.$$

ΑΣΚΗΣΗ. Στο επόμενο σχήμα να βρείτε γραφικά την εικόνα του X μέσω της $\mathcal{E}_P$ και χρησιμοποιώντας βοηθητικά το ζεύγος $(X, \mathcal{E}_P(X))$ να βρείτε τα σημεία $2P = P + P$, $3P = P + 2P$, $-P$ και $-2P$.