ΜΑΘΗΜΑ 1: ΣΥΣΧΕΤΙΣΜΕΝΑ ΕΠΙΠΕΔΑ

Ακολουθώντας τον D. Hilbert, για την αξιωματική θεμελίωση της (επίπεδης) γεωμετρίας, θεωρούμε:

(1) Ένα σύνολο $\mathcal{P}$ τα στοιχεία του οποίου ονομάζουμε ***σημεία*** και συμβολίζουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα $A, B, \ldots, P, Q, \ldots, X, Y, Z$.

(2) Ένα σύνολο $\mathcal{L}$ τα στοιχεία του οποίου ονομάζουμε ***ευθείες*** και συμβολίζουμε με μικρά γράμματα $a, b, \ldots, k, \ell, m, \ldots, x, y, z$.

Τα σύνολα $\mathcal{P}$ και $\mathcal{L}$ θεωρούνται *ξένα*, δηλ.

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{L} = \emptyset.$$

(3) Μια διμελή σχέση $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ που ονομάζουμε ***σχέση σύμπτωσης***.

Για να περιγράψουμε πώς σχετίζονται μέσω της $\mathcal{I}$ σημεία και ευθείες χρησιμοποιούμε την ακόλουθη ορολογία:

Αν ένα σημείο $P \in \mathcal{P}$ και μια ευθεία $\ell \in \mathcal{L}$ συνδέονται με την σχέση $\mathcal{I}$, δηλ. αν $(P, \ell) \in \mathcal{I}$, τότε λέμε ότι ***το*** P ***ανήκει στην*** ℓ ή ότι ***η*** ℓ ***διέρχεται από το*** P.

Τρία (ή περισσότερα) σημεία P_i, $i = 1, 2, 3$, λέγονται ***συγγραμμικά*** αν υπάρχει ευθεία $\ell \in \mathcal{L}$ με

$$(P_i, \ell) \in \mathcal{I}, \qquad \forall\ i = 1, 2, 3.$$

Τρεις (ή περισσότερες) ευθείες ℓ_i, $i = 1, 2, 3$, λέγονται ***συντρέχουσες*** αν υπάρχει σημείο $P \in \mathcal{P}$ με

$$(P, \ell_i) \in \mathcal{I}, \qquad \forall\ i = 1, 2, 3.$$

Δύο ευθείες $k, \ell \in \mathcal{L}$ λέγονται ***παράλληλες*** (συμβ. $k /\!/ \ell$) αν:
– είτε $k = \ell$,
– είτε *δεν υπάρχει* $P \in \mathcal{P}$ που να ανήκει και στην k και στην ℓ.

Αν δύο ευθείες k, ℓ δεν είναι παράλληλες, γράφουμε $k \not/\!/ \ell$.

Τέλος σημειώνουμε ότι (όπως συνήθως γίνεται για τις διμελείς σχέσεις), αντί $(P, \ell) \in \mathcal{I}$, γράφουμε και $P \,\mathcal{I}\, \ell$.

Θεωρούμε τώρα ένα σύνολο σημείων $\mathcal{P}$, ένα σύνολο ευθειών $\mathcal{L}$ και μια σχέση σύμπτωσης $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{L}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Η τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ λέγεται ***συσχετισμένο επίπεδο*** (συντ. ΣΕ), αν ικανοποιούνται τα επόμενα αξιώματα:

(ΣΕ 1) Από δύο διαφορετικά σημεία διέρχεται ακριβώς μία ευθεία, δηλ.

$$\forall\ A, B \in \mathcal{P} \text{ με } A \neq B \ \ \exists !\ k \in \mathcal{L}\ :\ (A, k) \in \mathcal{I} \text{ και } (B, k) \in \mathcal{I}.$$

(ΣΕ 2) Από κάθε σημείο εκτός ευθείας διέρχεται ακριβώς μία παράλληλη πρός την ευθεία, δηλ.

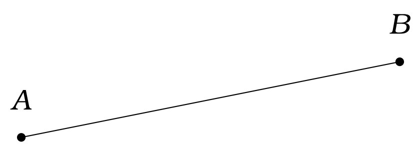
$$\forall\ (A, k) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L} \text{ με } (A, k) \notin \mathcal{I} \ \ \exists !\ \ell \in \mathcal{L} \text{ με } (A, \ell) \in \mathcal{I} \text{ και } \ell /\!/ k.$$

(ΣΕ 3) Υπάρχουν (τουλάχιστον) τρία μη-συγγραμμικά σημεία.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Τα αξιώματα (ΣΕ 1) και (ΣΕ 2) ισχύουν στην ευκλείδια γεωμετρία. Παρατηρούμε ότι αν πάρουμε την τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, όπου $\mathcal{P} = \{A, B\}$, με A, B σημεία του ευκλείδιου επιπέδου, $\mathcal{L} = \{\overline{AB}\}$, με $\overline{AB}$ το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα A και B, και

$$\mathcal{I} = \{(A, \overline{AB}), (B, \overline{AB})\} = \mathcal{P} \times \mathcal{L},$$

όπως στο Σχ. 1.1



Σχήμα 1.1

τα αξιώματα (ΣΕ 1) και (ΣΕ 2) ικανοποιούνται. Το (ΣΕ 3) εισάγεται για να αποκλειστεί η ανωτέρω τετριμμένη περίπτωση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. *Σε ένα ΣΕ $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ η παραλληλία είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη. Η παραλληλία είναι εξ ορισμού ανακλαστική

$$\forall\ k \in \mathcal{L}\ :\ k /\!/ k,$$

και συμμετρική

$$k /\!/ \ell \ \Rightarrow\ \ell /\!/ k.$$

Είναι και μεταβατική : Έστω $k /\!/ \ell$ και $\ell /\!/ m$. Θδο $k /\!/ m$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

(1) Αν $k = m$, τότε $k /\!/ m$, και το ζητούμενο ισχύει.

(2) Αν $k \neq m$, τότε:

(2α) Αν $k = \ell$, αφού $\ell /\!/ m$, ισχύει $k /\!/ m$.

(2β) Αν $k \neq \ell$, υποθέτουμε (προς άτοπο) ότι υπάρχει $P \in \mathcal{P}$ με $(P, k) \in \mathcal{I}$ και $(P, m) \in \mathcal{I}$. Επειδή $(P, k) \in \mathcal{I}$, $k /\!/ \ell$ και $k \neq \ell$, έχουμε $(P, \ell) \notin \mathcal{I}$. Άρα από το σημείο P εκτός της ℓ διέρχονται δύο παράλληλες (η k και η m), άτοπο, λόγω του αξιώματος (ΣΕ 2). Επομένως δεν υπάρχει τέτοιο P και $k /\!/ m$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1. Έστω $P, Q \in \mathcal{P}$ με $P \neq Q$. Η μοναδική ευθεία $k \in \mathcal{L}$, με $(P, k) \in \mathcal{I}$ και $(Q, k) \in \mathcal{I}$ (βλ. αξίωμα (ΣΕ 1)) λέγεται ***ένωση*** των P και Q και συμβολίζεται με

$$k = P \vee Q.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. *Σε ένα ΣΕ $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, αν $A, B, C \in \mathcal{P}$ είναι τρία διαφορετικά συγγραμμικά σημεία και ℓ η κοινή ευθεία, τότε*

$$\ell = A \vee B = B \vee C = C \vee A.$$

Απόδειξη. Από το αξίωμα (ΣΕ 1), για τα σημεία $A \neq B$ υπάρχει ακριβώς μία ευθεία που διέρχεται από αυτά. Επειδή οι ευθείες ℓ και $A \vee B$ διέρχονται από τα A και B, παίρνουμε $\ell = A \vee B$. Παρόμοια παίρνουμε $\ell = B \vee C$ και $\ell = C \vee A$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 3. *Σε ένα ΣΕ $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, αν $k, \ell \in \mathcal{L}$ με $k \neq \ell$, τότε οι k, ℓ έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.*

Απόδειξη. Αν $k /\!/ \ell$, τότε οι k, ℓ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Αν $k \not\parallel \ell$ τότε υπάρχει $P \in \mathcal{P}$ με $(P, k), (P, \ell) \in \mathcal{I}$. Το P είναι μοναδικό: αν υπάρχει και $Q \neq P$ με $(Q, k), (Q, \ell) \in \mathcal{I}$, τότε οι k και ℓ διέρχονται από δύο διαφορετικά σημεία, τα P και Q, άρα

$$k = \ell = P \vee Q,$$

άτοπο. □

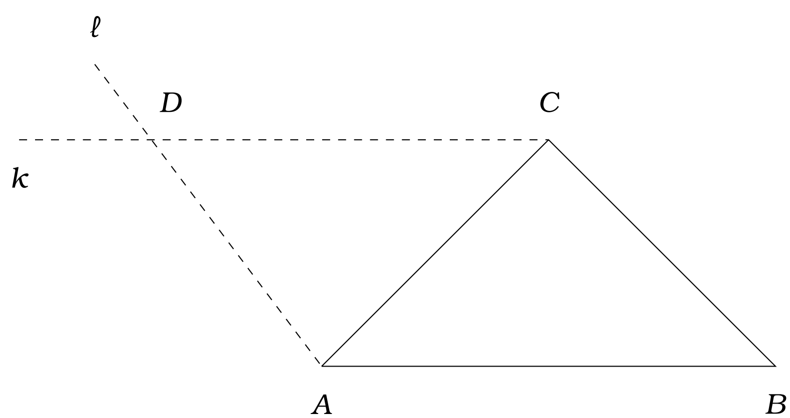
ΠΟΡΙΣΜΑ. *Σε ένα ΣΕ $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, αν $k, \ell \in \mathcal{L}$ με $k \not\parallel \ell$, τότε οι k, ℓ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 3. Σε ένα ΣΕ $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, έστω $k, \ell \in \mathcal{L}$ με $k \neq \ell$ και $k \not\parallel \ell$. Τότε το μοναδικό κοινό σημείο P των k, ℓ λέγεται ***τομή*** των k και ℓ και συμβολίζεται με

$$P = k \wedge \ell.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Σε κάθε ΣΕ $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, υπάρχουν τουλάχιστον 4 διαφορετικά σημεία, ανά 3 μη-συγγραμμικά.*

Απόδειξη. Από το αξίωμα (ΣΕ 3) υπάρχουν τρία (διαφορετικά) μη-συγγραμμικά σημεία, έστω τα A, B, C. Τότε:



Σχήμα 1.2

$$(C, A \vee B) \notin \mathcal{I} \Rightarrow \ \exists!\ k \in \mathcal{L} \ : \ (C, k) \in \mathcal{I} \text{ και } k /\!/ A \vee B$$
$$(A, C \vee B) \notin \mathcal{I} \Rightarrow \ \exists!\ \ell \in \mathcal{L} \ : \ (A, \ell) \in \mathcal{I} \text{ και } \ell /\!/ C \vee B$$

Παρατηρούμε ότι $k \not\parallel \ell$. Πράγματι, αν $k /\!/ \ell$, λόγω της μεταβατικότητας της παραλληλίας έχουμε
$$A \vee B /\!/ k /\!/ \ell /\!/ B \vee C,$$
άτοπο, διότι $A \vee B$ και $B \vee C$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους και τέμνονται στο B. Αφού λοιπόν $k \not\parallel \ell$, έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο $D = k \wedge \ell$.

Τότε το D δεν συμπίπτει με κανένα από τα A, B, C. Πράγματι,

$$D = A \ \Rightarrow \ A \mathcal{I} k /\!/ A \vee B \ \Rightarrow \ k = A \vee B \ \Rightarrow \ C \mathcal{I} (A \vee B), \text{ άτοπο.}$$
$$D = B \ \Rightarrow \ B \mathcal{I} k /\!/ A \vee B \ \Rightarrow \ k = A \vee B \ \Rightarrow \ C \mathcal{I} (A \vee B), \text{ άτοπο.}$$
$$D = C \ \Rightarrow \ C \mathcal{I} \ell /\!/ C \vee B \ \Rightarrow \ \ell = C \vee B \ \Rightarrow \ A \mathcal{I} (C \vee B), \text{ άτοπο.}$$

Επίσης το D δεν είναι συγγραμμικό με κανένα ζεύγος από τα A, B, C. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
D\,\mathcal{I}\,(A \vee B) \mathbin{/\!/} k &\Rightarrow\ k = A \vee B \ \Rightarrow\ C\,\mathcal{I}\,(A \vee B),\ \text{άτοπο.}\\
D\,\mathcal{I}\,(B \vee C) \mathbin{/\!/} \ell &\Rightarrow\ \ell = B \vee C \ \Rightarrow\ A\,\mathcal{I}\,(B \vee C),\ \text{άτοπο.}\\
D\,\mathcal{I}\,(A \vee C) &\Rightarrow\ A \vee C = A \vee D = C \vee D \Rightarrow\ k = \ell\\
&\Rightarrow A \vee B \mathbin{/\!/} k = \ell \mathbin{/\!/} B \vee C\\
&\Rightarrow\ A \vee B = B \vee C,\ \text{άτοπο,}
\end{aligned}$$

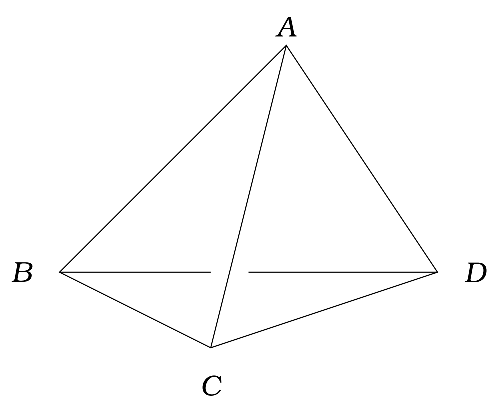
και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. (1) Το επίπεδο της ευκλείδιας γεωμετρίας είναι ΣΕ.

(2) Θεωρούμε την τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, όπου

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}\\
&\mathcal{L} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}\\
&\mathcal{I} \equiv \in
\end{aligned}$$

Ελέγχεται αμέσως ότι η $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ είναι ΣΕ. Μια αναπαράσταση του βλέπουμε στο Σχήμα 1.3:



Σχήμα 1.3

Το ανωτέρω επίπεδο λέγεται ***συσχετισμένο επίπεδο των 4 σημείων*** και, λόγω του Θεωρήματος της σελ. 3, είναι το *μικρότερο* ΣΕ που υπάρχει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Στο ευκλείδιο επίπεδο θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{P}$ των σημείων στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου, το σύνολο $\mathcal{L}$ των χορδών του ίδιου δίσκου (χωρίς τα άκρα τους) και παίρνουμε σαν $\mathcal{I}$ την σχέση ¨ανήκει¨ της ευκλείδιας γεωμετρίας. Να εξετάσετε αν η τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ είναι ΣΕ. Ποιά από τα αξιώματα ισχύουν και ποιά όχι;

2. Στον τριδιάστατο ευκλείδιο χώρο παίρνουμε την μοναδιαία σφαίρα S^2 και θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{P}$ των σημείων (x, y, z) που ανήκουν στην επιφάνεια της, το σύνολο $\mathcal{L}$ των μέγιστων κύκλων C της S^2 και $\mathcal{I}$ την συνήθη σχέση ¨ανήκει¨. Να εξετάσετε αν η τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ είναι ΣΕ. Ποιά από τα αξιώματα ισχύουν και ποιά όχι;