ΜΑΘΗΜΑ 22, ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Έστω $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ προβολικά επίπεδα Desargues και $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ οι διαιρετικοί τους δακτύλιοι. Να εξετάσετε αν κάθε ισομορφισμός προβολικών επιπέδων $f \equiv (\phi, \psi)$: $\mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ εισάγει ένα ισομορφισμό δακτυλίων $F(f) : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ έτσι ώστε:

(i) Αν $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ και $f = id$, τότε $F(id) = id$.

(ii) Αν $\mathcal{P}_3$ επίσης προβολικό επίπεδο Desargues και $g : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ ισομορφισμός προβολικών επιπέδων, τότε $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Απάντηση. Υποθέτουμε ότι ο δακτύλιος $\mathcal{R}_1$ ορίζεται από το σχήμα του Μαθήματος 16, σελ. 1, δηλ. $\mathcal{R}_1 = J(k)\setminus\{S\} \subseteq \mathcal{P}_1$, με πραξεις $(+, \cdot)$ που ορίζονται από τις επάρσεις $\mathbb{E}(S, \ell)$ και τις ομολογίες $\mathbb{H}(O, \ell)$. Θέτουμε

$$k' = \psi(k), \qquad \ell' = \psi(\ell)$$
$$S' = \phi(S), \qquad O' = \phi(O)$$

Τότε ο δακτύλιος $\mathcal{R}_2$ ορίζεται από το αντίστοιχο σχήμα των k', ℓ', S', O', δηλ. $\mathcal{R}_2 = J(k') \setminus \{S'\} \subseteq \mathcal{P}_2$, με πραξεις $(\oplus, *)$ που ορίζονται από τις επάρσεις $\mathbb{E}(S', \ell')$ και τις ομολογίες $\mathbb{H}(O', \ell')$. Αν $f = (\phi, \psi)$, θέτουμε

$$F(f) = \phi|_{\mathcal{R}_1} : \mathcal{R}_1 \longrightarrow \mathcal{R}_2.$$

Η $F(f)$ είναι 1-1 και επί. Για να δείξουμε ότι είναι ισομορφισμός δακτυλίων αρκεί να δείξουμε ότι διατηρεί τις πράξεις. Έστω $P, Q \in \mathcal{R}_1$. Θδο

$$\phi(P + Q) = \phi(P) \oplus \phi(Q).$$

Συμβολίζουμε $P' = \phi(P)$, $Q' = \phi(Q)$. Ισοδύναμα, θδο

$$\phi(P + Q) = \mathcal{E}_{P'}(Q').$$

Πρώτα βρίσκουμε γραφικά την εικόνα $P + Q = \mathcal{E}_P(Q)$. Προς τούτο, παίρνουμε ένα τυχαίο $X \in \mathcal{P}_1$, με $X \notin k$, $X \notin \ell$. Για την εικόνα $Y = \mathcal{E}_P(X)$ έχουμε

$$Y = \mathcal{E}_P(X) = (S \vee X) \wedge [P \vee (\ell \wedge (O \vee X))].$$

Έστω $X' = \phi(X)$. Αντίστοιχα, για την εικόνα $\mathcal{E}'_{P'}(X')$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}'_{P'}(X') &= (S' \vee X') \wedge [P' \vee (\ell' \wedge (O' \vee X'))] \\
&= (\phi(S) \vee \phi(X)) \wedge [\phi(P) \vee (\psi(\ell) \wedge (\phi(O) \vee \phi(X)))] \\
&= \psi(S \vee X) \wedge [\phi(P) \vee (\psi(\ell) \wedge \psi(O \vee X))] \\
&= \psi(S \vee X) \wedge [\phi(P) \vee \phi(\ell \wedge (O \vee X))] \\
&= \psi(S \vee X) \wedge \psi(P \vee (\ell \wedge (O \vee X))) \\
&= \phi((S \vee X) \wedge (P \vee (\ell \wedge (O \vee X))) \\
&= \phi(Y)
\end{aligned}$$

Τώρα με την βοήθεια του ζεύγους $(X, Y = \mathcal{E}_P(X))$, βρίσκουμε

$$P + Q = \mathcal{E}_P(Q) = k \wedge [Y \vee (\ell \wedge (X \vee Q))]$$

ενώ, με την βοήθεια των $(X' = \phi(X), Y' = \phi(Y))$, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
P' \oplus Q' &= \mathcal{E}'_{P'}(Q') \\
&= \psi(k) \wedge [\phi(Y) \vee (\psi(\ell) \wedge (\phi(X) \vee \phi(Q)))] \\
&= \psi(k) \wedge [\phi(Y) \vee (\psi(\ell) \wedge (\psi(X \vee Q)))] \\
&= \psi(k) \wedge [\phi(Y) \vee \phi(\ell \wedge (X \vee Q))] \\
&= \psi(k) \wedge [\psi(Y \vee (\ell \wedge (X \vee Q))] \\
&= \phi(k \wedge [Y \vee (\ell \wedge (X \vee Q))] \\
&= \phi(P + Q)
\end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο.

Με την ίδια μέθοδο δείχνουμε και ότι

$$\phi(P \cdot Q) = \phi(P) * \phi(Q).$$

Τέλος παρατηρούμε ότι

(i) Αν $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}$ και $f = id = (id_{\mathcal{P}}, id_{\mathcal{L}})$, τότε

$$F(id) = id_{\mathcal{P}}|_{\mathcal{R}_1} = id_{\mathcal{R}_1}.$$

(ii) Αν $\mathcal{P}_3$ επίσης προβολικό επίπεδο Desargues και $g = (\sigma, \tau) : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ ισομορφισμός προβολικών επιπέδων, τότε

$$F(g \circ f) = (\sigma \circ \phi)|_{\mathcal{R}_1} = \sigma|_{\mathcal{R}_2} \circ \phi|_{\mathcal{R}_1} = F(g) \circ F(f).$$

2. Να διατυπώσετε και να εξετάσετε τα προηγούμενα ερωτήματα, αν ξεκινάμε από ισομορφισμό των δακτυλίων $\mathcal{R}_1$ και $\mathcal{R}_2$ και αναζητούμε ισομορφισμό των $\mathbb{P}_2(\mathcal{R}_1)$ και $\mathbb{P}_2(\mathcal{R}_2)$.

Διατύπωση. Έστω $f : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ ένας ισομορφισμός διαιρετικών δακτψλίων. Να εξετάσετε αν ο f εισάγει ένα ισομορφισμό προβολικών επιπέδων Desargues $F(f) : \mathbb{P}_2(\mathcal{R}_1) \to \mathbb{P}_2(\mathcal{R}_2)$ έτσι ώστε:

(i) Αν $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$ και $f = id$, τότε $F(id) = id$.

(ii) Αν $\mathcal{R}_3$ επίσης διαιρετικός δακτύλιος και $g : \mathcal{R}_2 \to \mathcal{R}_3$ ισομορφισμός διαιρετικών δακτυλίων, τότε $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Απόδειξη. Ο ισομορφισμός διαιρετικών δακτυλίων $f : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ επεκτείνεται σε ένα f-ισομορφισμό μεταξύ των 3-διάστατων προτύπων $(\mathcal{R}_1)^3$ και $(\mathcal{R}_2)^3$

$$h : (\mathcal{R}_1)^3 \longrightarrow (\mathcal{R}_2)^3 :$$
$$(x, y, z) \longmapsto h(x, y, z) = (f(x), f(y), f(z))$$

δηλ. μια 1-1 και επί απεικόνιση h, με τις ιδιότητες

$$h((a, b, c) + (x, y, z)) = h(a, b, c) + h(x, y, z),$$

για κάθε $(a, b, c), (x, y, z) \in (\mathcal{R}_1)^3$, και

$$h(r(x, y, z)) = f(r)h(x, y, z),$$

για κάθε $(x, y, z) \in (\mathcal{R}_1)^3$ και $r \in \mathcal{R}_1$. Όπως συμβαίνει με τους γραμμικούς αυτομορφισμούς του $\mathbb{R}^3$, ο f-ισομορφισμός h ορίζει ένα ισομορφισμό

$$F(f) = (\varphi, \psi) : \mathbb{P}_2(\mathcal{R}_1) \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathcal{R}_2)$$

μεταξύ των αντίστοιχων προβολικών επιπέδων Desargues, μέσω των ισοτήτων

$$\varphi([x, y, z]) = [h(x, y, z)]$$
$$\psi(< a, b, c >) =< (a, b, c) \cdot (M_h^t)^{-1} >$$

Παρατηρούμε ότι

(i) Αν $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}$ και $f = id$, τότε $h = id_{\mathcal{R}^3}$ και $M_h = (M_h^t)^{-1} = I_3$, οπότε $F(id) = id = (id, id)$.

(ii) Έστω $\mathcal{R}_3$ επίσης διαιρετικός δακτύλιος και $g : \mathcal{R}_2 \to \mathcal{R}_3$ ισομορφισμός διαιρετικών δακτυλίων. Ο g ορίζει g-γραμμικό ισομορφισμό

$$k : (\mathcal{R}_2)^3 \longrightarrow (\mathcal{R}_3)^3$$

που με τη σειρά του ορίζει ισομορφισμό

$$F(g) = (\sigma, \tau) : \mathbb{P}_2(\mathcal{R}_2) \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathcal{R}_3)$$

μεταξύ των αντίστοιχων προβολικών επιπέδων Desargues, μέσω των ισοτήτων

$$\begin{gathered} \sigma([x, y, z]) = [k(x, y, z)] \\ \tau(< a, b, c >) =< (a, b, c) \cdot (M_k^t)^{-1} > \end{gathered}$$

Παρατηρούμε ότι η σύνθεση $g \circ f : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ είναι ισομορφισμός διαιρετικών δακτυλίων, που ορίζει τον $(g \circ f)$-γραμμικό ισομορφισμό

$$k \circ h : (\mathcal{R}_1)^1 \longrightarrow (\mathcal{R}_3)^3$$

ο οποίος με τη σειρά του ορίζει ισομορφισμό

$$F(g \circ f) = (\chi, \omega) : \mathbb{P}_2(\mathcal{R}_1) \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathcal{R}_3)$$

μεταξύ των αντίστοιχων προβολικών επιπέδων Desargues, μέσω των ισοτήτων

$$\begin{aligned} \chi([x, y, z]) &= [k(h(x, y, z))] = \sigma([h(x, y, z)]) \\ &= \sigma(\phi([x, y, z])) \\ \omega(< a, b, c >) &=< (a, b, c) \cdot (M_{k \circ h}^t)^{-1} > \\ &=< (a, b, c) \cdot ((M_k \cdot M_h)^t)^{-1} > \\ &=< (a, b, c) \cdot (M_k^t)^{-1} \cdot (M_h^t)^{-1} > \\ &= \tau(\psi(< a, b, c >) \end{aligned}$$

δηλ.

$$F(g \circ f) = (\chi, \omega) = (\sigma, \tau) \circ (\phi, \psi) = F(g) \circ F(f).$$