

Προβολική Γεωμετρία

Εξετάσεις 12/09/2018

Θέμα 1. Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ προβολικό επίπεδο.

(α) Αν $A \neq B$ δύο σημεία του \mathcal{P} , να βρεθεί απεικόνιση 1-1 και επί μεταξύ των συνόλων $J(A)$ και $J(B)$.

(β) Αν $(\phi, \psi) \in \text{Aut}(\mathcal{P})$, να δείξετε τη συνεπαγωγή

$$[P \notin \ell] \Rightarrow [\phi(P) \notin \psi(\ell)].$$

Θέμα 2. Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ προβολικό επίπεδο και $(\phi, \psi) \in \text{Aut}(\mathcal{P})$.

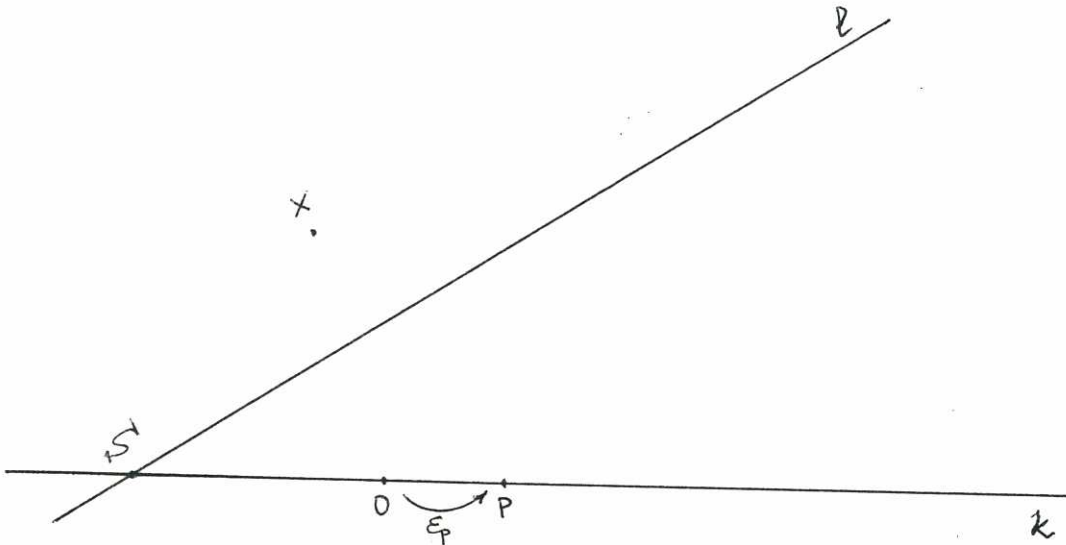
(α) Αν A σημείο και ℓ ευθεία του \mathcal{P} , να δείξετε ότι οι συγγραμμικότητες με κέντρο A και άξονα ℓ αποτελούν ομάδα.

(β) Έστω ότι μια συγγραμμικότητα (ϕ, ψ) έχει κέντρο O . Αν υπάρχει ευθεία k , τέτοια ώστε $k \notin J(O)$ και $\psi(k) = k$, να δείξετε ότι η k είναι άξονας της (ϕ, ψ) .

Θέμα 3. Έστω ένα επίπεδο Desargues $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$.

(α) Αν A, A', B είναι τρία μη συγγραμμικά σημεία, να δείξετε ότι υπάρχει συγγραμμικότητα (ϕ, ψ) με $\phi(A) = A'$ και $\phi(B) = B$.

(β) Στο παρακάτω σχήμα θεωρούμε την $\varepsilon_P \in \mathbb{E}(S, \ell)$ με $\varepsilon_P(O) = P$. Να προσδιορίσετε τα σημεία $2P$ και $-P$, με την βοήθεια της εικόνας του X .



Θέμα 4. Να δείξετε ότι η απεικόνιση

$$f(x, y, z) = (x + y, x - y, 2z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

ορίζει συγγραμμικότητα ϕ του \mathbb{P}_2 . Να βρείτε τα σταθερά σημεία της ϕ . Είναι η ϕ κεντρική/άξονική;

Να γράψετε 3 από τα 4 θέματα.

Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες.