Ασκήσεις/λύσεις Συστήματα καταστάσεων χώρου

Άσκηση 1: Να βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων

$$\hat{g}_1(s) = \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)},\ \hat{g}_2(s) = \frac{1}{s^2(s+1)},\ \hat{g}_3(s) = \frac{s+7}{s^2+2s+5}$$

με την μέθοδο των απλών κλασμάτων.

Άσκηση 2: Να βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης:

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{(s+a)^2(s+b)}$$

με την μέθοδο Fourier-Mellin.

Άσκηση 3: Να λυθεί η εξίσωση: $y(t) = t + \int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)d\tau,\ t \geq 0$. (Υπόδειξη: Το ολοκλήρωμα είναι συνέλιξη συναρτήσεων).

Άσκηση 4: Να λυθούν τα Προβλήματα Αρχικών Τιμών: (α) $y''(t) + 2y'(t) + y'(t) = e^{-t}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$. (β) $y''(t) - y(t) = t$, $y(0) = y'(0) = 1$.

Άσκηση 5: Έστω σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$\hat{g}(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

Δείξτε ότι η ακολουθία Markov παράγεται από τις αναδρομικές σχέσεις:

$$\begin{aligned}
g_0 &= b_n \\
g_1 &= b_{n-1} - a_{n-1}g_0 \\
g_2 &= b_{n-2} - a_{n-1}g_1 - a_{n-2}g_0 \\
&\vdots \\
g_n &= b_0 - g_{n-1}a_{n-1} - \ldots - g_0 a_0
\end{aligned}$$

και

$$g_{n+k} = -a_0 g_k - a_1 g_{k+1} - \ldots - a_{n-1}g_{n+k-1},\quad k \geq 1$$

Άσκηση 6: Περιγράψτε τα χαρακτηριστικά μέτρου και φάσης της συνάρτησης συχνοτήτων κάθε συστήματος από τα παρακάτω που έχει συνάρτηση μεταφοράς: $\hat{g}(s) = \frac{1}{s}$, $\hat{g}(s) = \frac{1}{s^2}$, $\hat{g}(s) = \frac{s+1}{1+s/10}$, $\hat{g}(s) = \frac{1+s/10}{s+1}$, $\hat{g}(s) = \frac{1}{(s+1)(1+s/10)}$, $\hat{g}(s) = \frac{s-1}{s+1}$ και $\hat{g}(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$.

Λύση:

- $\hat{g}(s) = \frac{1}{s}$: $|\hat{g}(i\omega)| = \frac{1}{\omega}$, low-pass characterisic, ενίσχυση χαμηλών συχνοτήτων σε σχέση με τις ψηλές. $\angle\hat{g}(i\omega) = -\frac{\pi}{2}$, σταθερή καθυστέρηση φάσης $90°$.
- $\hat{g}(s) = \frac{1}{s^2}$: $|\hat{g}(i\omega)| = \frac{1}{\omega^2}$, low-pass characterisic, ενίσχυση χαμηλών συχνοτήτων σε σχέση με τις ψηλές. $\angle\hat{g}(i\omega) = -\pi$, σταθερή καθυστέρηση φάσης $180°$.

- $\hat{g}(s)=\frac{s+1}{1+s/10}$: $|\hat{g}(i\omega)|=\frac{1+i\omega}{1+i\omega/10}$, high-pass characterisic, ενίσχυση ψηλών συχνοτήτων σε σχέση με τις χαμηλές στο διάστημα $1 \le \omega \le 10$. $\angle\hat{g}(i\omega)=\tan^{-1}(\omega)-\tan^{-1}(\omega/10)$, θετική φάση σε όλες τις συχνότητες, μέγιστη φάση σε συχνότητα $\omega=\sqrt{10}$ rads/s, ασυμπτωτική φάση ίση με 0 τεξττλατινραδς.

- $\hat{g}(s)=\frac{1+s/10}{1+s}$: $|\hat{g}(i\omega)|=\frac{1+i\omega/10}{1+i\omega}$, low-pass characterisic, ενίσχυση χαμηλών συχνοτήτων σε σχέση με τις ψηλές στο διάστημα $1 \le \omega \le 10$. $\angle\hat{g}(i\omega)=\tan^{-1}(\omega/10)-\tan^{-1}(\omega)$, αρνητική φάση σε όλες τις συχνότητες, ελάχιστη φάση στην συχνότητα $\omega=\sqrt{10}$ rads/s, ασυμπτωτική φάση ίση με 0 τεξττλατινραδς.

- $\hat{g}(s)=\frac{1}{(1+s)(1+s/10)}$: $\hat{g}(i\omega)=\frac{1}{(1+i\omega)(1+i\omega/10)}$, $\hat{g}(i\omega)=\frac{1}{\sqrt{(1+\omega^2)(1+\omega^2/100)}}$, low-pass characterisic, ενίσχυση χαμηλών συχνοτήτων σε σχέση με τις ψηλές. $\angle\hat{g}(i\omega)=-\tan^{-1}(\omega/10)-\tan^{-1}(\omega)$, αρνητική φάση (καθυστέρηση φάσης) σε όλες τις συχνότητες, ασυμπτωτική φάση ίση με $-\pi$ rads.

- $\hat{g}(s)=\frac{s-1}{s+1}$: $\hat{g}(i\omega)=\frac{i\omega-1}{i\omega+1}$, $\hat{g}(i\omega)=1$ σε όλες τις συχνότητες (all-pass characteristic). $\angle\hat{g}(i\omega)=-2\tan^{-1}(\omega)$, αρνητική φάση (καθυστέρηση φάσης) σε όλες τις συχνότητες, ασυμπτωτική φάση ίση με $-\pi$ rads.

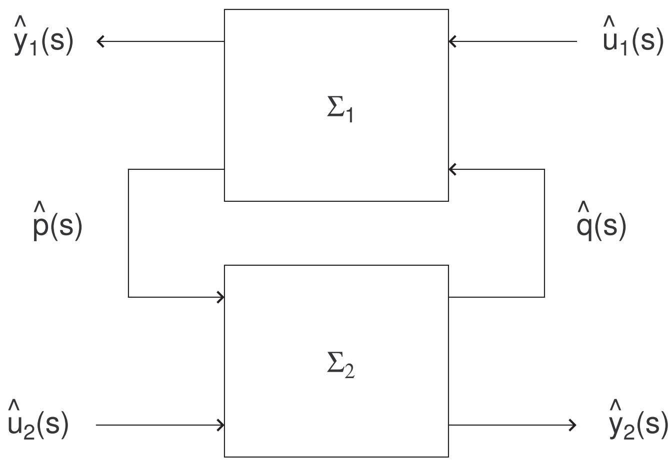
- $\hat{g}(s)=\frac{e^{-s}}{1+s}$: $|\hat{g}(i\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$, low-pass characterisic, ενίσχυση χαμηλών συχνοτήτων σε σχέση με τις ψηλές. $\angle\hat{g}(i\omega)=-\omega-\tan^{-1}(\omega)$, ασυμπτωτική καθυστέρηση φάσης $-\infty$ rads.

Άσκηση 7: Έστω $\hat{G}(s)=\frac{b}{s+a}$ συνάρτηση μεταφοράς γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος, όπου a και b θετικές παράμετροι. Έστω ότι η αρχική κατάσταση του συστήματος στην χρονική στιγμή $t=0$ είναι μηδενική. Έστω ότι εφαρμόζουμε συνάρτηση $u(t)=\sin t$, $t\ge 0$, στην είσοδο του συστήματος και ότι $\lim_{t\to\infty}|y(t)-\sqrt{2}\sin(t-\pi/4)|=0$. Βρείτε τις τιμές των a και b.

Άσκηση 8: Αν τα συστήματα Σ_1 και Σ_2 έχουν συναρτήσεις μεταφοράς $\hat{G}_1(s)$ και $\hat{G}_2(s)$, αντίστοιχα, όπου

$$\hat{G}_i(s)=\begin{bmatrix}\hat{G}_{11}^{(i)}(s) & \hat{G}_{12}^{(i)}(s)\\ \hat{G}_{21}^{(i)}(s) & \hat{G}_{22}^{(i)}(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_{11}^{(i)} & D_{12}^{(i)}\\ D_{21}^{(i)} & D_{22}^{(i)}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}C_1^{(i)}\\ C_2^{(i)}\end{bmatrix}(sI-A)^{-1}\begin{bmatrix}B_1^{(i)} & B_2^{(i)}\end{bmatrix}$$

$i=1,2$, υπολογίστε την συνάρτηση μεταφοράς και μία πραγματοποίηση του συνδεδεμένου συστήματος (για το δεύτερο υποθέστε ότι $D_{ij}^{(k)}=0$, $(i,j,k\in\{1,2\})$.



Άσκηση 9: Έστω $D_1 \in \mathbb{R}^{p\times m}$ και $D_2 \in \mathbb{R}^{m\times p}$. Δείξτε ότι $\det(I_p + D_1D_2) \neq 0$ αν και μόνο αν $\det(I_m + D_2D_1) \neq 0$.

Άσκηση 10: Έστω $\hat{G}_1(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ και $\hat{G}_2(s) \in \mathbb{R}^{m\times p}$ ρητές κανονικές συναρτήσεις και έστω ότι $\det(I_p + \hat{G}_1(\infty)\hat{G}_2(\infty)) \neq 0$. Δείξτε ότι $(I + \hat{G}_1(s)\hat{G}_2(s))^{-1}\hat{G}_1(s) = \hat{G}_1(s)(I + \hat{G}_2(s)\hat{G}_1(s))^{-1}$.

Άσκηση 11: Έστω συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$. Βρείτε μια πραγματοποίηση του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}^T(s)$.

Άσκηση 12: Δείξτε με παράδειγμα ότι δύο συστήματα μπορούν να έχουν την ίδια συνάστηση μεταφοράς χωρίς να είναι ισοδύναμα.

Άσκηση 13: Έστω συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}^{p\times p}(s)$, $\hat{G}(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$, $\det D \neq 0$. Δείξτε ότι: $\hat{G}^{-1}(s) = D^{-1} - D^{-1}C(sI - A + BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}$. Υπόδειξη: Υπολογίστε μία πραγματοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς $\hat{G}^{-1}(s)\hat{G}(s)$ με εφαρμόστε έναν κατάλληλο μετασχηματισμό ισοδυναμίας ώστε να δείξετε ότι $\hat{G}^{-1}(s)\hat{G}(s) = I_p$.

Άσκηση 14: Έστω γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα $\Sigma(A, B, C, D)$ όπου $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}_-$ και έστω ότι υπάρχουν μοναδικές λύσεις $P = P^T \succ 0$ και $Q = Q^T \succ 0$ των αλγεβρικών εξισώσεων Lyapunov

$$AP + PA^T + BB^T = 0 \text{ και } A^TQ + QA + C^TC = 0$$

αντίστοιχα. (Οι πίνακες P και Q ονομάζονται πίνακας Gramian ελεγξιμότητας και πίνακας Gramian παρατηρησιμότητας, αντίστοιχα). Έστω το ισοδύναμο σύστημα $\tilde{\Sigma}(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D)$. Δείξτε ότι στις νέες συντεταγμένες οι πίνακες P και Q μετασχηματίζονται σε $\tilde{P} = T^{-1}PT^{-T} = \tilde{P}^T \succ 0$ και $\tilde{Q} = T^TQT = \tilde{Q}^T \succ 0$ και επομένως το φάσμα του πίνακα PQ είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς ισοδυναμίας. $(T^{-T} := (T^{-1})^T = (T^T)^{-1})$.

Άσκηση 15: Συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}^{p\times p}(s)$ λέγεται all-pass αν $\hat{G}^T(-s)\hat{G}(s) = I_p$. Έστω Q ο πίνακας Gramian παρατηρησιμότητας μίας πραγματοπίησης $\Sigma(A, B, C, D)$ της $\hat{G}(s)$ (δείτε την προηγούμενη άσκηση) και έστω ότι $QB + C^TD = 0$ και $D^TD = I_p$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $G(s)$ είναι all-pass.

Άσκηση 16: Βρείτε δύο πραγματοποιήσεις (διάστασης 2) της συνάρτησης μεταφοράς $\hat{g}(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$. Δείξτε ότι οι δύο πραγματοποιήσεις είναι ισοδύναμες και βρείτε τον αντίστοιχο πίνακα μετασχηματισμού.

Άσκηση 17: Έστω $\Sigma(A, B, C) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^{p\times n}$ πραγματοποίηση γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος, όπου

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ B_3 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix}$$

με $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$, $A_{33} \in \mathbb{R}^{n_3\times n_3}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1\times m}$, $B_3 \in \mathbb{R}^{n_3\times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{p\times n_1}$ και $C_2 \in \mathbb{R}^{p\times n_2}$. Δείξτε ότι $Ce^{At}B = C_1e^{A_{11}t}B_1$, $t \in \mathbb{R}$, και ότι επομένως $\Sigma(A, B, C)$ δεν είναι ελάχιστη πραγματοποίηση. [Σε επόμενη ενότητα θα δούμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα A_{22} είναι μή ελέγξιμες από την είσοδο και οι ιδιοτιμές του πίνακα A_{33} είναι μή παρατηρήσιμες από την έξοδο του συστήματος, και επομένως απαλοίφονται από τα μηδενικά του συστήματος όταν υπολογίζουμε την συνάρτηση μεταφοράς].

Άσκηση 18: Έστω $\hat{g}(s) = \frac{s+\beta}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ συνάρτηση μεταφοράς γραμμικού, χρονικά αναλλοίωτου συστήματος όπου $\beta, \zeta, \omega_n \in \mathbb{R}$, $\omega_n > 0$ και $0 \leq \zeta < 1$. Να βρεθεί πραγματοποίηση της $\hat{g}(s)$, $(A, B, C) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^{2\times 1} \times \mathbb{R}^{1\times 2}$.

Πίνακας μετασχηματισμού Laplace

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
1	$1/s$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
t	$1/s^2$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
t^2	$2/s^3$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{at}\cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$e^{at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t^{n-1}e^{-at}$	$\frac{(n-1)!}{(s+a)^n}$

Γ. Χαλικιάς, 10-3-2025