

Ευστάθεια δυναμικών συστημάτων

1. Προκαταρκτικά

1.1 Θετικά ορισμένοι/ημι-ορισμένοι πίνακες

Ορισμός: Έστω $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ο P είναι θετικά ορισμένος (θετικά ημι-ορισμένος), $P \succ 0$ ($P \succeq 0$) αν η τετραγωνική μορφή $x^T P x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ ($x^T P x \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$). Παρόμοια ορίζουμε αρνητικά ορισμένους (ημι-ορισμένους) πίνακες: $P \prec 0 \Leftrightarrow -P \succ 0$ ($P \preceq 0 \Leftrightarrow -P \succeq 0$).

Παρατήρηση: Αν $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P \succ 0$ ($P \succeq 0$), τότε χωρίς βλάβη γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $P = P^T$. Πράγματι,

$$x^T P x = x^T \left[\frac{1}{2}(P + P^T) + \frac{1}{2}(P - P^T) \right] x$$

όπου ο πίνακας $P + P^T$ ($P - P^T$), είναι συμμετρικός (αντι-συμμετρικός). Επομένως,

$$x^T P x = x^T \left(\frac{P + P^T}{2} \right) x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^n$$

και επομένως $P \succ 0 \Leftrightarrow P + P^T \succ 0$ (αντίστοιχα $P \succeq 0 \Leftrightarrow P + P^T \succeq 0$). Στη συνέχεια ορίζουμε:

$$S_+^n = \{P \in \mathbb{R}^n : P = P^T \succ 0\}, \quad \bar{S}_+^n = \{P \in \mathbb{R}^n : P = P^T \succeq 0\}, \quad S^n = \{P \in \mathbb{R}^n : P = P^T\}$$

και έχουμε: $S_+^n \subseteq \bar{S}_+^n \subseteq S^n$, δηλαδή υποθέτουμε ότι θετικά ορισμένοι και ημι-ορισμένοι πίνακες (όπως και αρνητικά ορισμένοι και ημι-ορισμένοι) είναι αυτόματα συμμετρικοί.

Ιδιότητες:

I_1 : S_+^n και $\bar{S}_+^n$ είναι κυρτοί κώνοι στον $\mathbb{R}^{n \times n}$, δηλαδή:

$$I_1(a) : P_1, P_2 \in S_+^n \Rightarrow \lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2 \in S_+^n \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad P \in S_+^n \Rightarrow \lambda P \in S_+^n \quad \forall \lambda > 0$$

$$I_1(b) : P_1, P_2 \in \bar{S}_+^n \Rightarrow \lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2 \in \bar{S}_+^n \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad P \in \bar{S}_+^n \Rightarrow \lambda P \in \bar{S}_+^n \quad \forall \lambda \geq 0.$$

I_2 : Αν $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τότε $P \succ 0 \Leftrightarrow \Delta_i := \det(E_i^T P E_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, όπου $E_i \in \mathbb{R}^{n \times i}$ ο πίνακας που ορίζεται από τις i -πρώτες στήλες του μοναδιαίου πίνακα I_n . (Τα Δ_i είναι τα leading minors του P). Επίσης, αν $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τότε $P \succeq 0 \Leftrightarrow \det(P_{\kappa, \kappa}) \geq 0$ για κάθε μη-κενό $\kappa \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, όπου $P_{\kappa, \kappa}$ ο τετραγωνικός πίνακας που αποτελείται από όλες τις γραμμές $i \in \kappa$ και όλες τις στήλες $j \in \kappa$ (δηλαδή όλα τα principal minors του P πρέπει να είναι μη-αρνητικά).

I_3 : Αν $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P \succ 0$, τότε $\lambda_i(P) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ (και αντίστροφα για συμμετρικό P): Εφόσον $P = P^T$ έχουμε $P = U \Lambda U^T$, $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, και $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U U^T = U^T U = I_n$. Έστω ότι $\lambda_j \leq 0$ για κάποιο $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Τότε, αν u_j η j -στήλη του U και συμβολίζοντας με e_j την j -στήλη του I_n , θα είχαμε ότι:

$$u_j^T P u_j = u_j^T U \Lambda U^T u_j = e_j^T \Lambda e_j = \lambda_j \leq 0$$

άτοπο, αφού $\|u_j\| = 1$. Αντίστροφα, αν $P = P^T$ έχει θετικές ιδιοτιμές: $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, τότε

$$x^T P x = x^T U \Lambda U^T x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \|U^T x\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \|x\|^2 > 0 \quad \text{αν } x \neq 0$$

και άρα $P \succ 0$. Παρόμοια μπορούμε να δείξουμε ότι: $P \succeq 0 \Leftrightarrow \lambda_i(P) \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

I_4 : Αν $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P \succeq 0$ τότε $x^T P x = 0 \Leftrightarrow P x = 0$: Η αριστερή συνεπαγωγή είναι προφανής. Έστω $x^T P x = 0$ για κάποιον πίνακα $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P \succeq 0$. Γράφουμε $P = U \text{diag}\{\Lambda_1, 0\} U^T$ όπου $\Lambda_1 = \text{diag}(\Lambda_1) \succ 0$ και $U U^T = U^T U = I_n$. Έστω $U = [U_1 \mid U_2]$, $U_1 = \mathbb{R}^{n \times r}$, $r = \text{rank}(P)$. Τότε $P x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{R}(U_2)$. Επίσης $P = U_1 \Lambda_1 U_1^T = U_1 \Lambda_1^{1/2} U_1^T U_1 \Lambda_1^{1/2} U_1^T := P^{1/2} P^{1/2}$ όπου $P^{1/2} = U_1 \Lambda_1^{1/2} U_1^T = (P^{1/2})^T \succeq 0$, $\Lambda_1^{1/2} = \text{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\}$. Επομένως $x^T P x = 0 \Leftrightarrow \|P^{1/2} x\| = 0 \Leftrightarrow P^{1/2} x = 0 \Leftrightarrow P x = 0$.

I_5 : Αν $P(t) = \int_0^t Q(\tau) Q^T(\tau) d\tau$, $t > 0$ και $Q \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times m})$, τότε $P(t) = P^T(t) \succeq 0$ και $\int_0^t x^T P(\tau) x d\tau = \int_0^t \|Q^T(\tau) x\|^2 d\tau$. Επομένως $x^T P(t) x = 0 \Leftrightarrow Q^T x(\tau) = 0$ για κάθε $\tau \in [0, t]$ λόγω συνέχειας. Επίσης $t_2 \geq t_1 \Rightarrow P(t_2) \succeq P(t_1)$ (που εξ'ορισμού σημαίνει ότι $P(t_2) - P(t_1) \succeq 0$).

I_6 : Έστω

$$P = P^T = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}$$

όπου $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $P_{11} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $m < n$. Τότε: $P \succ 0 \Leftrightarrow (P_{22} \succ 0 \text{ και } P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{12}^T \succ 0)$. Ο πίνακας $P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{12}^T$ λέγεται συμπλήρωμα Schur του P_{22} .

1.2 Κατά κατεύθυνση παράγωγος, κανόνας αλυσίδας

Έστω Ω μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ τοπικά Lipschitz και $V \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, ορίζουμε την συνεχή συνάρτηση $V_{\mathbf{f}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ως

$$V_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \langle (\nabla V)(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle := \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

όπου ∇V η κλίση της V και f_j η j -συνιστώσα της $\mathbf{f}$. Για κάθε $\mathbf{x} \in \Omega$, η $V_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ είναι η (κατά κατεύθυνση) παράγωγος στο σημείο $\mathbf{x}$ κατά την κατεύθυνση του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ (όχι κανονικοποιημένη σε μοναδιαίο διάνυσμα). Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει ως εξής: Έστω $\mathbf{x}$ αυθαίρετο σημείο του Ω και έστω $\mathbf{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{g}(t) := \mathbf{x} + t\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας στην σύνθετη συνάρτηση $V \circ \mathbf{g}$ έχουμε

$$(V \circ \mathbf{g})'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V(\mathbf{x} + t\mathbf{f}(\mathbf{x})) - V(\mathbf{x})}{t} = \langle \nabla V(\mathbf{g}(t)), \mathbf{g}'(t) \rangle|_{t=0} = \langle \nabla V(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle := V_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$$

Έστω το σύστημα $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ και έστω ότι η $\mathbf{f}$ είναι τοπικά Lipschitz στο Ω . Έστω I το μέγιστο διάστημα ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης, $0 \in I$, και έστω ότι η λύση του συστήματος $\mathbf{x}(t) := \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ περιέχεται στο Ω για κάθε $t \in I$. Τότε από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$(V \circ \mathbf{x})'(t) = \langle (\nabla V)(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t) \rangle = \langle (\nabla V)(\mathbf{x}(t)), \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \rangle \quad \forall t \in I$$

και επομένως

$$(V \circ \mathbf{x})'(t) = V_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t)) \quad \forall t \in I$$

Θα λέμε ότι η $V_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t))$ είναι η παράγωγος της V κατά μήκος της λύσης του συστήματος $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Παρατηρούμε ότι δεν χρειάζεται να έχουμε γνώση της λύσης του συστήματος $\mathbf{x}(t) := \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ για να υπολογίσουμε την $V_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t))$. Συμβατικά θα γράφουμε (σύμφωνα με τον καθιερωμένο συμβολισμό) $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) := V_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t))$.

2.1 Θεωρία ευστάθειας Lyapunov

Έστω διαφορικό σύστημα $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Αν η λύση του συστήματος υπάρχει και είναι μοναδική στο διάστημα $I = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ θα συμβολίζεται ως $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$.

Ορισμός: Αν $M(x, d)$ μετρικός χώρος, το σύνολο V είναι γειτονιά του σημείου p αν υπάρχει ανοικτή σφαίρα με κέντρο p και ακτίνα r , δηλ. $B_r(p) = \{x \in X : d(x, p) < r\}$, που περιέχεται στο V . Το σύνολο V δεν είναι απαραίτητα ανοικτό - ορίζουμε ανοικτή/κλειστή/συμπαγή γειτονιά αν το V είναι αντίστοιχα ανοικτό/κλειστό/συμπαγές υποσύνολο του X .

Ορισμός: Έστω σύστημα $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, όπου $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Το διάνυσμα $\mathbf{x}^*$ λέγεται σημείο ισορροπίας του συστήματος αν $f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.

Παρατήρηση: Χωρίς βλάβη γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σημείο ισορροπίας, την ευστάθεια του οποίου θέλουμε να αναλύσουμε, είναι το $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$, δηλαδή ότι $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$: Έστω ότι $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{0}$. Με την αλλαγή μεταβλητών: $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ έχουμε:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{x}' = f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y} + \mathbf{x}^*) := g(\mathbf{y}), \quad \text{όπου } g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση όταν αυτή απλοποιεί την ανάλυση του προβλήματος που επιθυμούμε να λύσουμε.

Ορισμός: Σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^*$ του συστήματος $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, όπου $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ λέγεται:

1. Ευσταθές (κατά Lyapunov) αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon \quad \text{για κάθε } t \geq 0$$

2. Ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι ευσταθές (κατά Lyapunov) και η παράμετρος δ στο (1) μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε:

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \delta \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^* \quad \text{καθώς } t \rightarrow \infty$$

3. Ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές, αν

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^* \quad \text{καθώς } t \rightarrow \infty \quad \text{για κάθε } \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

Θεώρημα (Lyapunov): Έστω το σύστημα $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, με λύση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$. Έστω $\mathbf{x}^*$ σημείο ισορροπίας (δηλ. $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$). Έστω επίσης $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (ανοικτή) γειτονιά του $\mathbf{x}^*$ και έστω ότι η $\mathbf{f}$ είναι τοπικά Lipschitz στο Ω . Αν υπάρχει $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

(i) $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ (συνεχώς διαφορίσιμη στο Ω).

(ii) Η V είναι θετικά ορισμένη στο Ω ως προς το $\mathbf{x}^*$ (δηλ. $V(\mathbf{x}^*) = 0$ και $V(\mathbf{x}) > 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{x}^*\}$).

(iii) $\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla V(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})$ αρνητικά ημι-ορισμένη στο Ω ως προς $\mathbf{x}^*$ (δηλ. $\dot{V}(\mathbf{x}^*) = 0$ και $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ αν $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{x}^*\}$).

τότε $\mathbf{x}^*$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας (κατά Lyapunov). Αν επιπλέον:

(iv) $\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla V(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})$

αρνητικά ορισμένη στο Ω ως προς $\mathbf{x}^*$ (δηλ. $\dot{V}(\mathbf{x}^*) = 0$ και $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ αν $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{x}^*\}$) τότε το $\mathbf{x}^*$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Παρατήρηση: Αν η συνάρτηση V ικανοποιεί τις σχέσεις (i)-(iii), τότε λέγεται συνάρτηση Lyapunov. Αν επιπλέον ικανοποιεί και την (iv) τότε λέγεται ισχυρή συνάρτηση Lyapunov.

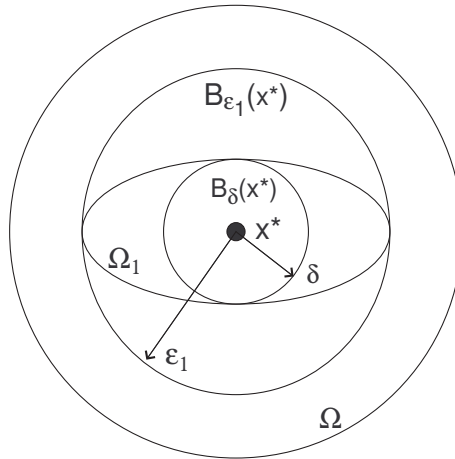
Απόδειξη: Έστω ότι η V είναι συνάρτηση Lyapunov.

- Θα δείξουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ τέτοιο ώστε $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon$ για κάθε $t \geq 0$ και άρα $\mathbf{x}^*$ ευσταθές (κατά Lyapunov).
- Εφόσον Ω (ανοικτή) γειτονιά του $\mathbf{x}^*$ υπάρχει $\epsilon_1 > 0$ (αρκούντως μικρό) τέτοιο ώστε $B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*) \subseteq \Omega$. Δοθέντος $\epsilon > 0$, επιλέγουμε $0 < \epsilon_1 \leq \epsilon$ με την παραπάνω ιδιότητα.
- Εφόσον V συνεχής στο Ω και $\partial B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)$ συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, υπάρχει

$$\alpha = \min_{\mathbf{x} \in \partial B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)} V(\mathbf{x})$$

Έχουμε $\alpha > 0$ (γιατί αν $\mathbf{x} \in \Omega$, $V(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}^*$)

- Ορίζουμε: $\Omega_1 = \{\mathbf{x} \in B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*) : V(\mathbf{x}) < \alpha\}$. Εφόσον V συνεχής, το Ω_1 είναι ανοικτό και $\mathbf{x}^* \in \Omega_1$ (αφού $V(\mathbf{x}^*) = 0$). Επίσης, το Ω_1 περιέχεται στο $B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)$ γιατί $V(\mathbf{x}) < \alpha$ για κάθε $\mathbf{x} \in \Omega_1$ και εξ' ορισμού $V(\mathbf{x}) \geq \alpha$ στο $\partial B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)$.
- Εφόσον Ω_1 ανοικτό, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}^*) \subseteq \Omega_1$. Θα δείξουμε ότι αυτό είναι κατάλληλο δ , δηλαδή $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)$ για κάθε $t \geq 0$:
- Εφόσον $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*)$ έχουμε $V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)) \leq V(\mathbf{x}_0) < \alpha$ για κάθε $t \geq 0$ (γιατί $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ στο Ω).
- Επίσης είναι αδύνατον να έχουμε $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in \partial B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)$ για κάποιο $t > 0$ (εφόσον στο $\partial B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)$ έχουμε εξ' ορισμού $V(\mathbf{x}) \geq \alpha$).
- Άρα $\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon_1 \leq \epsilon$ για κάθε $t \geq 0$ και το $\mathbf{x}^*$ ευσταθές (κατά Lyapunov).
- Επιπλέον, εφόσον f τοπικά Lipschitz στο Ω και $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \notin \bar{B}_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)$, το μέγιστο διάστημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης για $t \geq 0$ είναι όλο το $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.



Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι ισχύει η αυστηρότερη συνθήκη: $\dot{V}(\mathbf{x}_0) = 0$ και $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ για $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{x}_0\}$.

- Θα δείξουμε ότι $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^*$ καθώς $t \rightarrow \infty$, δηλ. ότι το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^*$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.
- Εφόσον $\mathbf{x}^*$ ευσταθές (κατά Lyapunov) η λύση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$, $t \geq 0$, είναι φραγμένη (γιατί $\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon_1$ για κάθε $t \geq 0$).
- Έστω (για αντίφαση) ότι $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \not\rightarrow \mathbf{x}^*$ καθώς $t \rightarrow \infty$. Τότε υπάρχει $\mu > 0$ και γνησίως αύξουσα ακολουθία $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $t_k \geq 0$, $t_k \rightarrow \infty$, τέτοια ώστε:

$$\|\mathbf{x}(t_k; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| > \mu > 0, \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}$$

- Εφόσον $(\mathbf{x}(t_k; \mathbf{x}_0))_{k \in \mathbb{N}_0}$ φραγμένη, από το Θεώρημα Bolzano-Weirstrass υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία:

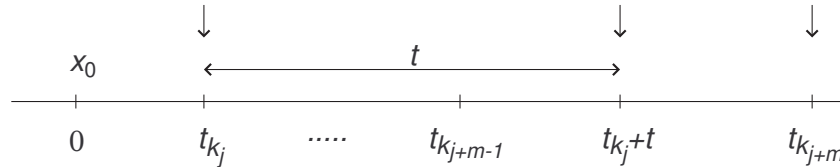
$$\mathbf{x}(t_{k_j}; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}_\infty \text{ καθώς } j \rightarrow \infty$$

Λόγω της ανισότητας $\|\mathbf{x}(t_k; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| > \mu > 0$, έχουμε ότι $\mathbf{x}_\infty \neq \mathbf{x}^*$.

- Εφόσον η συνάρτηση $V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0))$, $t \geq 0$, είναι φθίνουσα έχουμε για κάθε $t \geq 0$:

$$V(\mathbf{x}(t_{k_j}; \mathbf{x}_0)) \geq V(\mathbf{x}(t_{k_j} + t; \mathbf{x}_0)) \geq V(\mathbf{x}(t_{k_j+m}; \mathbf{x}_0))$$

όπου επιλέξαμε $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $t_{k_j} + t < t_{k_j+m}$.



- Επομένως:

$$V(\mathbf{x}(t_{k_j}; \mathbf{x}_0)) \geq V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}(t_{k_j}; \mathbf{x}_0))) \geq V(\mathbf{x}(t_{k_j+m}; \mathbf{x}_0))$$

για κάθε $t \geq 0$.

- Στο όριο $j \rightarrow \infty$, $t_{k_j} \rightarrow \infty$ και

$$V(\mathbf{x}_\infty) \geq V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_\infty)) \geq V(\mathbf{x}_\infty)$$

για κάθε $t \geq 0$.

- Άρα $V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_\infty))$ σταθερή και ίση με $V(\mathbf{x}_\infty)$ για κάθε $t \geq 0$. Συνεπώς $\dot{V}(\mathbf{x}_\infty) = 0$ που είναι άτοπο, γιατί $\dot{V}(\mathbf{x}_\infty) < 0$ αφού $\mathbf{x}_\infty \neq \mathbf{x}^*$ ($\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$).
- Παρατηρούμε ότι: Τα όρια $V(\mathbf{x}(t_{k_j}; \mathbf{x}_0)) \rightarrow V(\mathbf{x}_\infty)$ και $V(\mathbf{x}(t_{k_j+m}; \mathbf{x}_0)) \rightarrow V(\mathbf{x}_\infty)$ ισχύουν λόγω συνέχειας της V , ενώ το όριο $V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}(t_{k_j}; \mathbf{x}_0))) \rightarrow V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_\infty))$ ισχύει λόγω συνέχειας της λύσης ως προς τις αρχικές συνθήκες.

□

Παράδειγμα: Έστω βαθμωτό σύστημα $x' = -g(x)$, όπου $g(x)$ τοπικά Lipschitz στο $\Omega = (-a, a) \subseteq \mathbb{R}$ και

$$g(0) = 0, \quad xg(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \Omega \setminus \{0\}$$

Το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το $x^* = 0$. Έστω

$$V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad V(x) = \int_0^x g(y)dy, \quad x \in \Omega$$

υποψήφια συνάρτηση Lyapunov. Εφόσον η g είναι συνεχής στο Ω η V είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Επίσης, $V(0) = 0$ και

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{\partial V}{\partial x}(-g(x)) = g(x)(-g(x)) = -g^2(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \Omega \setminus \{x^*\}$$

και επομένως το $x^* = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παράδειγμα (εκκρεμές με τριβή): Το δυναμικό σύστημα περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - bx_2$$

όπου x_1 η γωνία του εκκρεμούς με την κατακόρυφο, x_2 η γωνιακή ταχύτητα, l το μήκος του εκκρεμούς, g η επιτάχυνση της βαρύτητας και $b > 0$ ο συντελεστής τριβής. Έστω $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1 < |\pi|\}$. Το μοναδικό σημείο ισορροπίας στο Ω είναι το $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Επιλέγουμε αρχικά ως υποψήφια συνάρτηση Lyapunov την συνολική ενέργεια του συστήματος:

$$V(\mathbf{x}) = \text{K.E.} + \Delta.\text{E.} = \frac{1}{2}ml^2x_2^2 + mgl(1 - \cos x_1)$$

Έχουμε ότι $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, $V(\mathbf{0}) = 0$ και V θετικά ορισμένη στο Ω ως προς $\mathbf{x}^*$. Επίσης,

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_1}x_1' + \frac{\partial V}{\partial x_2}x_2' = mglx_2 \sin x_1 + ml^2x_2 \left(-\frac{g}{l} \sin x_1 - bx_2\right) = -ml^2bx_2^2 \leq 0$$

Έχουμε $V(\mathbf{x}) < 0$ αν $x_2 \neq 0$ και $V(\mathbf{x}) = 0$ αν $x_2 = 0$, και επομένως όταν $b > 0$ η $\dot{V}$ είναι αρνητικά ημι-ορισμένη στο Ω και το συμπέρασμα σύμφωνα με το Θεώρημα Lyapunov είναι ότι το $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ευσταθές κατά Lyapunov (όχι ασυμπτωτικά).

Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει όταν δεν υπάρχει τριβή ($b = 0$). Σε αυτή την περίπτωση η $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ είναι πάλι μόνο αρνητικά ημι-ορισμένη στο Ω και επομένως το Θεώρημα Lyapunov εγγυάται πάλι μόνο ευστάθεια (κατά Lyapunov), όχι ασυμπτωτική. Στην περίπτωση αυτή το συμπέρασμα είναι το αναμενόμενο: Εφόσον $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in \Omega$, η συνάρτηση $V(\mathbf{x}(t))$ είναι σταθερή σε κάθε σημείο της τροχιάς $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$, $t \geq 0$, και επομένως η $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ δεν μπορεί να συγκλίνει στο $\mathbf{x}_0$ αν $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}^*$. Από φυσική άποψη όταν δεν καταναλώνεται ενέργεια (σε συνθήκες απουσίας τριβής), η συνολική ενέργεια παραμένει σταθερή κατά την κίνηση του εκκρεμούς και η μάζα ταλαντώνεται με σταθερό πλάτος ταλάντωσης γύρω από την γωνία ισορροπίας $x_1 = 0$. Εφόσον μπορούμε να περιορίσουμε την νόρμα $\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon$, $t \geq 0$, σε αυθαίρετα μικρή ακτίνα $\epsilon > 0$ (επιλέγοντας αρχική κατάσταση $\mathbf{x}_0$ αρκούντως κοντά στο σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$) αλλά η συνάρτηση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ δεν συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$, έχουμε ευστάθεια (κατά Lyapunov) αλλά όχι ασυμπτωτική. Αντίθετα, στην περίπτωση που υπάρχει τριβή στο σύστημα ($b > 0$), η συνολική ενέργεια του συστήματος διαρκώς μειώνεται όσο αυτό είναι σε κίνηση και επομένως το σημείο ισορροπίας πρέπει να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Υπάρχουν δύο τρόποι για να καταλήξουμε στο ισχυρότερο αυτό συμπέρασμα ασυμπτωτικής ευστάθειας του σημείου ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ στην περίπτωση $b > 0$. Ο πρώτος, όπως θα δείξουμε εδώ, είναι η εφαρμογή του Θεωρήματος με χρήση μίας πιο γενικής συνάρτησης Lyapunov. Εναλλακτικά, μπορούμε να εφαρμόσουμε ένα πιο ισχυρό κριτήριο ευστάθειας που βασίζεται στη αρχή του αναλλοίωτου (invariance principle) του Lassale και το οποίο θα παρουσιάσουμε αργότερα.

Έστω νέα υποψήφια συνάρτηση Lyapunov είναι της μορφής:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T P \mathbf{x} + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1)$$

Θα επιλέξουμε τον πίνακα P ως θετικά ορισμένο ($P = P^T \succ 0$), ώστε η συνάρτηση $V(\mathbf{x})$ να είναι θετικά ορισμένη στο Ω , συνθήκη που ισοδυναμεί με τις ανισότητες $p_{11} > 0$ και $p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0$. Επομένως η υποψήφια συνάρτηση Lyapunov είναι:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(p_{11}x_1^2 + 2p_{12}x_1x_2 + p_{22}x_2^2) + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1)$$

Παρατηρούμε ότι η νέα $V(\mathbf{x})$ είναι ίση με την συνολική ενέργεια του συστήματος αν επιλέξουμε $p_{11} = p_{12} = 0$ και $p_{22} = ml^2$. Έχουμε:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \frac{g}{l} \sin x_1 \quad \text{και} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = p_{12}x_1 + p_{22}x_2$$

Επομένως:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial x_1}x_1' + \frac{\partial V}{\partial x_2}x_2' = \left(p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \frac{g}{l} \sin x_1\right)x_2 + (p_{12}x_1 + p_{22}x_2)\left(-\frac{g}{l} \sin x_1 - bx_2\right)$$

Ισοδύναμα:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{g}{l}(1 - p_{22})x_2 \sin x_1 - \frac{g}{l}p_{12}x_1 \sin x_1 + (p_{11} - p_{12}b)x_1x_2 + (p_{12} - p_{22}b)x_2^2$$

Για να απλοποιήσουμε την παραπάνω έκφραση επιλέγουμε $p_{22} = 1$ και $p_{11} = p_{12}b$ (ώστε να απαλείψουμε τον πρώτο και τον τρίτο όρο που έχουν τότε θετικό και τότε αρνητικό πρόσημο). Επομένως έχουμε

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\frac{g}{l}p_{12}x_1 \sin x_1 + (p_{12} - b)x_2^2$$

Με τις επιλογές αυτές οι ανισότητες που ισοδυναμούν με την συνθήκη $P \succ 0$ είναι: $p_{11} > 0 \Rightarrow p_{12} > 0$ και $p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0 \Rightarrow b - p_{12} > 0$. Άρα πρέπει να έχουμε $0 < p_{12} < b$. Επιλέγοντας, π.χ. $p_{12} = \frac{b}{2}$, εξασφαλίζουμε ότι:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{2}x_1^2 + bx_1x_2 + x_2^2 \right) + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1)$$

είναι θετικά ορισμένη στο Ω (ως προς $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$) και ότι

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\frac{gb}{l^2}x_1 \sin x_1 - \frac{b}{2}x_2^2$$

είναι αρνητικά ορισμένη στο Ω (ως προς $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$). Άρα απο το Θεώρημα Lyapunov συμπεραίνουμε ότι το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

2.2 Ολική ασυμπτωτική ευστάθεια

Από την απόδειξη του Θερήματος Lyapunov η περιοχή σύγκλισης (έλκυσης)

$$\Pi.\Sigma. := \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^*\}$$

περιέχει σφαίρα μέγιστης ακτίνας δ και κέντρου $\mathbf{x}^*$:

$$B_\delta(\mathbf{x}^*) \subseteq \Omega_1 = \{\mathbf{x} \in B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*) : V(\mathbf{x}) < \alpha\} \subseteq B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*) \text{ όπου } \alpha = \min_{\mathbf{x} \in \partial B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)} V(\mathbf{x})$$

Γιά να πετύχουμε ολική ασυμπτωτική ευστάθεια θα πρέπει να μπορούμε να επιλέξουμε το $\delta > 0$ αυθαίρετα μεγάλο. Εκτός από το ότι οι συνθήκες του Θεωρήματος Lyapunov πρέπει να ισχύουν σε όλο το $\Omega = \mathbb{R}^n$, μία επιπλέον συνθήκη πρέπει να ικανοποιείται (η συνάρτηση Lyapunov να είναι ακτινικά μη-φραγμένη, όπως ορίζεται στην διατύπωση του παρακάτω Θεωρήματος).

Θεώρημα (ολικής ασυμπτωτικής ευστάθειας): Έστω ότι όλες οι συνθήκες του Θεωρήματος Lyapunov ικανοποιούνται για $\Omega = \mathbb{R}^n$. Αν $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ισχυρή συνάρτηση Lyapunov και επιπλέον:

$$V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty \text{ καθώς } \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \quad (V \text{ ακτινικά μη-φραγμένη})$$

τότε το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^*$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

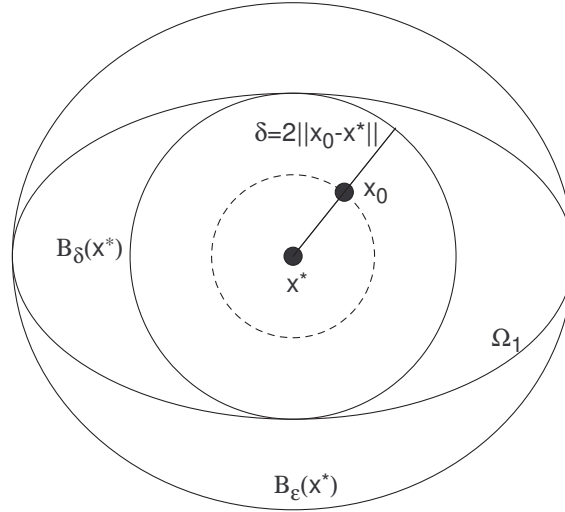
Παρατήρηση: Αν $\mathbf{x}^*$ ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές τότε $\mathbf{x}^*$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας.

Απόδειξη: Η απόδειξη ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

- Έστω $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ (αυθαίρετο) και έστω $\delta = 2\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|$ (οπότε $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*)$).
- Έστω

$$\alpha = \max_{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq \delta} V(\mathbf{x}) > 0$$

(Εφόσον V συνεχής και $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq \delta\}$ συμπαγές, η μέγιστη τιμή είναι καλά ορισμένη και είναι θετική γιατί $V(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}^*$).



- Ορίζουμε $\Omega_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : V(\mathbf{x}) < \alpha\}$. Τότε Ω_1 φραγμένο, εφόσον V ακτινικά μη-φραγμένη συνάρτηση. Επομένως

$$\epsilon_1 := \sup_{\mathbf{x} \in \Omega_1} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \in \mathbb{R} \text{ (πεπερασμένο)}$$

- Έστω $\epsilon > \epsilon_1$. Τότε οι συνθήκες του Θεωρήματος Lyapunov ικανοποιούνται και επομένως:

(i) $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in B_\epsilon(\mathbf{x}^*)$ για κάθε $t \geq 0$, και

(ii) $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^*$ καθώς $t \rightarrow \infty$.

- Εφόσον $\mathbf{x}_0$ αυθαίρετο, το δ είναι αυθαίρετα μεγάλο και $\mathbf{x}^*$ ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές. $\square$

Παράδειγμα: Έστω σύστημα με εξισώσεις:

$$x_1' = -x_1 + x_2^2, \quad x_2' = -x_1 x_2 - x_2$$

Σημεία ισορροπίας:

$$x_1 = x_2^2 \text{ και } x_2(x_1 + 1) = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \text{ ή } x_1 = -1$$

Όμως $x_1 \neq -1$ (εφόσον $x_1 = x_2^2$). Άρα $x_2 = 0$ και επομένως το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$.

Έστω $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 = \|\mathbf{x}\|^2$. Τότε $V(\mathbf{x})$ θετικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$ (ως προς $\mathbf{x}^*$ και ακτινικά μη-φραγμένη. Επίσης:

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial V}{\partial x_2} x_2' = 2x_1(-x_1 + x_2^2) + 2x_2(-x_1 x_2 - x_2) = -2(x_1^2 + x_2^2) = -2\|\mathbf{x}\|^2$$

και άρα $\dot{V}$ αρνητικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$. Άρα $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Η συνάρτηση $V(x_1, x_2) = x_1 + e^{-x_1} + e^{x_2} - x_2 - 2$ είναι ακτινικά μη-φραγμένη: Έχουμε

$$V(x_1, \lambda x_1) = x_1 + e^{-x_1} + e^{\lambda x_1} - \lambda x_1 - 2 = (1 - \lambda)x_1 + e^{-x_1} + e^{\lambda x_1} - 2$$

και επομένως για $\lambda \neq 0$:

$$\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} V(x_1, \lambda x_1) = +\infty$$

Επίσης

$$\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} V_1(x_1) = \lim_{|x_2| \rightarrow \infty} V_2(x_2) = +\infty$$

Επομένως το σημείο $(x_1, x_2) = (0, 0)$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

2.3 Φραγμένες και μη-φραγμένες επιφάνειες Lyapunov

Από την απόδειξη ασυμπτωτικής ευστάθειας του Θεωρήματος Lyapunov προκύπτει ότι αν η επιφάνεια στάθμης:

$$\bar{\Omega}_\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : V(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$$

είναι φραγμένη, δηλαδή $\bar{\Omega}_\alpha \subseteq B_\epsilon(\mathbf{x}^*)$ για κάποιο $\epsilon > 0$, τότε το $\bar{\Omega}_\alpha$ είναι θετικά αναλλοίωτο σύνολο, δηλαδή:

$$\mathbf{x}_0 \in \bar{\Omega}_\alpha \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in \bar{\Omega}_\alpha \quad \text{για κάθε } t \geq 0$$

(γιατί $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) < 0$ στο $\bar{\Omega}_\alpha$). Άρα, αν $B_\delta(\mathbf{x}^*) \subseteq \bar{\Omega}_\alpha \subseteq B_\epsilon(\mathbf{x}^*)$ τότε $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in B_\epsilon(\mathbf{x}^*)$ και επομένως $\mathbf{x}^*$ ευσταθές (κατά Lyapunov). Επιπλέον αποδεικνύεται ότι $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^*$ και το $\mathbf{x}^*$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Για μικρές τιμές του $\alpha > 0$ η επιφάνεια στάθμης $\bar{\Omega}_\alpha$ είναι φραγμένη (εφόσον η V είναι συνεχής και θετικά ορισμένη). Για παράδειγμα, αν για κάποιο $\epsilon > 0$ έχουμε:

$$\min_{\mathbf{x} \in \partial B_\epsilon(\mathbf{x}^*)} V(\mathbf{x}) = \alpha$$

τότε $\bar{\Omega}_\alpha \subseteq B_\epsilon(\mathbf{x}^*)$ και άρα $\bar{\Omega}_\beta$ φραγμένη για κάθε $\beta \in [0, \alpha]$. Η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει αναγκαστικά για μεγάλες τιμές του α . Γενικά,

$$\bar{\Omega}_c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : V(\mathbf{x}) \leq c\} \subseteq B_r(\mathbf{x}^*) \Rightarrow c < \inf_{\|\mathbf{x}\| \geq r} V(\mathbf{x})$$

Παρατηρούμε ότι αν $r_2 \geq r_1$, τότε

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \geq r_2\} \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \geq r_1\}$$

και επομένως

$$\inf_{\|\mathbf{x}\| \geq r_1} V(\mathbf{x}) \leq \inf_{\|\mathbf{x}\| \geq r_2} V(\mathbf{x})$$

δηλαδή η συνάρτηση

$$\psi(r) := \inf_{\|\mathbf{x}\| \geq r} V(\mathbf{x})$$

είναι αύξουσα. Αν:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \inf_{\|\mathbf{x}\| \geq r} V(\mathbf{x}) = l < \infty$$

τότε η $\bar{\Omega}_c$ είναι φραγμένη αν και μόνο αν $c < l$. Αν $l = \infty$, τότε η V είναι ακτινικά μή φραγμένη και κάθε επιφάνεια στάθμης $\bar{\Omega}_c$, $c \in \mathbb{R}_+$, είναι φραγμένη.

Παράδειγμα: Έστω

$$V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad V(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$$

που είναι θετικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$ ως προς το $(0, 0)$. Για μεγάλες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ οι καμπύλες στάθμης της V δεν είναι φραγμένες. Επομένως παρόλο που η $V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0))$ είναι φθίνουσα κατά μήκος της λύσης $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ αυτό δεν εγγυάται ότι $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^*$ καθώς $t \rightarrow \infty$. Έστω $x_1^2 + x_2^2 = r^2$. Τότε

$$\hat{V}_r(x_1) := V\left(x_1, \pm\sqrt{r^2 - x_1^2}\right) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + r^2 - x_1^2 = 1 + r^2 - \left(\frac{1}{1+x_1^2} + x_1^2\right)$$

όπου $0 \leq x_1^2 \leq r^2$. Επομένως για σταθεροποιημένο $r > 0$,

$$\min_{|x_1| \leq r} V_r(x_1) = 1 + r^2 - \max_{|x_1| \leq r} \left(\frac{1}{1+x_1^2} + x_1^2\right) = 1 + r^2 - r^2 - \frac{1}{1+r^2} = 1 - \frac{1}{1+r^2} = \frac{r^2}{1+r^2}$$

Συνεπώς:

$$\inf_{\|\mathbf{x}\|=r} V(\mathbf{x}) = \min_{\|\mathbf{x}\|=r} V(\mathbf{x}) = 1 - \frac{1}{1+r^2}$$

και $\operatorname{argmin} V(\mathbf{x}) = \{(r, 0), (-r, 0)\}$. Εφόσον

$$\inf_{\|\mathbf{x}\|=r_2} V(\mathbf{x}) \geq \inf_{\|\mathbf{x}\|=r_1} V(\mathbf{x}) \quad \text{όταν } r_2 \geq r_1,$$

η συνάρτηση

$$\psi(r) := \inf_{\|\mathbf{x}\|=r} V(\mathbf{x})$$

είναι αύξουσα και

$$\inf_{\|\mathbf{x}\| \geq r} V(\mathbf{x}) = \inf_{\|\mathbf{x}\|=r} V(\mathbf{x}) = 1 - \frac{1}{1+r^2}$$

Επομένως:

$$l = \lim_{r \rightarrow \infty} \inf_{\|\mathbf{x}\| \geq r} V(\mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{1+r^2} = 1$$

και άρα $\Omega_c := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : V(\mathbf{x}) < c\}$ φραγμένη αν και μόνο αν $c < l = 1$.

2.4 Αρχή του αναλλοίωτου και Θεώρημα Lasalle

Ορισμός: Το σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται θετικά αναλλοίωτο για το σύστημα $\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t))$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, αν για κάθε λύση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ με $\mathbf{x}_0 \in S$ ισχύει ότι $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in S$ για κάθε $t \geq 0$.

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα:

$$x'_1 = x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad x'_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

Έστω $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Τότε:

$$\begin{aligned} (r^2)' &= 2rr' = (x_1^2 + x_2^2)' = 2x_1x'_1 + 2x_2x'_2 \\ &= 2x_1x_2 + 2x_1^2(1 - x_1^2 - x_2^2) - 2x_2x_1 + 2x_2^2(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ &= 2(x_1^2 + x_2^2)(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned}$$

Επομένως: $r' = r(1 - r^2)$. Αν $r(0) = 1$ τότε $r'(0) = 0$ και επομένως $r(t) = 1$ για κάθε $t \geq 0$. Παρόμοια, $0 < r(0) < 1 \Rightarrow 0 < r(t) < 1$ για κάθε $t \geq 0$ και $r(0) > 1 \Rightarrow r(t) > 1$ για κάθε $t \geq 0$. Επομένως, αν $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| < 1\}$, τα σύνολα $D \setminus \{(0, 0)\}$, $\partial D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ (ευσταθής οριακός κύκλος) και $\mathbb{R}^2 \setminus (D \cup \partial D)$ είναι θετικά αναλλοίωτα σύνολα για το σύστημα. Το σημείο ισορροπίας $(0, 0)$ είναι επίσης θετικά αναλλοίωτο.

Ορισμός: Έστω συνάρτηση $\mathbf{x} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι η συνάρτηση $\mathbf{x}$ συγκλίνει σε κάποιο σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$ αν

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{dist}(\mathbf{x}(t), S) = 0 \quad \text{όπου} \quad \operatorname{dist}(\mathbf{x}, S) := \inf_{\mathbf{s} \in S} \|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|$$

Παρατήρηση: Η έννοια της σύγκλισης συνάρτησης σε σύνολο S , δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι η συνάρτηση συγκλίνει στο ίδιο σημείο του S ή ότι το όριο της συνάρτησης υπάρχει (εκτός αν το S είναι μονοσύνολο!).

Παράδειγμα: Στο προηγούμενο παράδειγμα, η λύση του συστήματος $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ με $\mathbf{x}_0 \in D$, $\mathbf{x}_0 \in \partial D$ και $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus (D \cup \partial D)$, αντίστοιχα, συγκλίνει στον ευσταθή οριακό κύκλο ∂D .

Θεώρημα (Lasalle): Έστω $\mathbf{x}^*$ σημείο ισορροπίας του συστήματος $\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t))$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ όπου f τοπικά Lipschitz και $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση Lyapunov σε γειτονιά Ω του $\mathbf{x}^*$. Τότε το Ω περιέχει κλειστή

και φραγμένη θετικά αναλλοίωτη γειτονιά $\bar{K}$ του $\mathbf{x}^*$ και για κάθε $\mathbf{x}_0 \in \bar{K}$ η λύση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ του συστήματος συγκλίνει στο σύνολο:

$$S = \{\mathbf{x}_0 \in \bar{K} : \dot{V}(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)) = 0 \text{ για κάθε } t \geq 0\}$$

Το σύνολο S είναι διάφορο του κενού και θετικά αναλλοίωτο. Επιπλέον, αν $S = \{\mathbf{x}^*\}$ τότε το $\mathbf{x}^*$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Απόδειξη: Η κατασκευή του $\bar{K}$ είναι παρόμοια με αυτήν του Ω_1 στην απόδειξη του Θεωρήματος Lyapunov: Εφόσον Ω είναι γειτονιά του $\mathbf{x}^*$, υπάρχει, εξ' ορισμού σφαίρα $B_\epsilon(\mathbf{x}^*)$ με αρκούντως μικρή ακτίνα $\epsilon > 0$ που περιέχεται στο Ω . Έστω

$$\alpha = \min_{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| = \epsilon} V(\mathbf{x})$$

Τότε $\alpha > 0$. Τότε το σύνολο

$$\bar{K} := \{\mathbf{x} \in B_\epsilon(\mathbf{x}^*) : V(\mathbf{x}) \leq \alpha/2\}$$

έχει τις επιθυμητές ιδιότητες: Είναι φραγμένη και κλειστή γειτονιά του $\mathbf{x}^*$ και εφόσον $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq 0$ είναι επίσης θετικά αναλλοίωτο.

Το σύνολο S είναι διάφορο του κενού ($\mathbf{x}^* \in S$). Έστω

$$\mathbf{x}_0 \in S \Rightarrow \dot{V}(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)) = 0 \text{ για κάθε } t \geq 0$$

Τότε, λόγω του ότι το $\bar{K}$ είναι θετικά αναλλοίωτο, $\mathbf{y} := \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in \bar{K}$ για κάθε $t \geq 0$. Έστω $s \geq 0$ (αυθαίρετο). Τότε:

$$\dot{V}(\mathbf{x}(s; \mathbf{y})) = \dot{V}(\mathbf{x}(s; \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0))) = \dot{V}(\mathbf{x}(t+s; \mathbf{x}_0)) = 0$$

εφόσον $\mathbf{x}_0 \in S$ και $t+s \geq 0$. Εφόσον $s \geq 0$ αυθαίρετο, σε κάθε σημείο της τροχιάς

$$\mathcal{O}^+(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x}(s; \mathbf{y}) : s \geq 0\}$$

έχουμε $\dot{V}(\mathbf{x}(s; \mathbf{y})) = 0$ και άρα $\mathbf{y} \in S$. Άρα αν $\mathbf{x}_0 \in S$, όλη η τροχιά $\{\mathbf{y} = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0), t \geq 0\}$ είναι εντός του S και επομένως S θετικά αναλλοίωτο.

Στην συνέχεια, έστω ότι $\mathbf{x}_0 \in \bar{K}$. Εφόσον $\bar{K}$ θετικά αναλλοίωτο, όλη η τροχιά $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ παραμένει εντός του $\bar{K}$ για κάθε $t \geq 0$. Υποθέτουμε (για αντίφαση) ότι η συνάρτηση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ δεν συγκλίνει στο σύνολο S . Τότε, καθώς η συνάρτηση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ είναι φραγμένη, τότε απο το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass υπάρχει ακολουθία (t_n) με $t_n \rightarrow \infty$ τέτοια ώστε

$$\mathbf{x}(t_n; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}_\infty \notin S$$

Εφόσον $\bar{K}$ κλειστό, $\mathbf{x}_\infty \in \bar{K}$. Θα δείξουμε ότι $V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_\infty))$ είναι σταθερή συνάρτηση της μεταβλητής $t \geq 0$. Έχουμε για $t \geq 0$:

$$V(\mathbf{x}(t_n; \mathbf{x}_0)) \geq V(\mathbf{x}(t_n + t; \mathbf{x}_0)) = V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}(t_n; \mathbf{x}_0))) \geq V(\mathbf{x}(t_{n+k}; \mathbf{x}_0)), \quad t \geq 0 \quad (*)$$

(Η πρώτη ανισότητα ισχύει γιατί $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ και η δεύτερη προκύπτει πάλι από την ανισότητα $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ σε συνδυασμό με το γεγονός ότι για κάθε (σταθεροποιημένο) $t \geq 0$ (αυθαίρετα μεγάλο) υπάρχει ακέραιος k (αρκούντως μεγάλος) ώστε να έχουμε $t_n + t < t_{n+k}$). Παίρνοντας το όριο $n \rightarrow \infty$ στην (*), έχουμε

$$V(\mathbf{x}_\infty) \geq V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_\infty)) \geq V(\mathbf{x}_\infty)$$

λόγω συνέχειας της V και συνέχειας της λύσης $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ ως προς την αρχική συνθήκη $\mathbf{x}_0$. Επομένως, $V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_\infty))$ είναι σταθερή σε όλο το $\mathbb{R}_+$, και άρα $\dot{V}(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_\infty)) = 0$. Όμως τότε $\mathbf{x}_\infty \in S$, που αντιβαίνει στην υπόθεση. Άρα η υπόθεση ότι η συνάρτηση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \not\rightarrow S$ είναι λανθασμένη. $\square$

Παρατήρηση: Σε μία διαφορετική εκδοχή του Θεωρήματος Lasalle η υπόθεση ότι η V είναι θετικά ορισμένη δεν είναι απαραίτητη, αν και είναι χρήσιμη στην πράξη γιατί πολλές φορές η κατασκευή της

συνάρτησης Lyapunov εγγυάται την ύπαρξη αναλλοίωτου συνόλου $\bar{K}$. Η απόδειξη του Θεωρήματος Lasalle περιγράφει μία συγκεκριμένη κατασκευή του συνόλου $\bar{K}$. Αν αρκεί να αποδείξουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια σημείου ισορροπίας, η περιγραφή αυτού του συνόλου δεν είναι απαραίτητη - μόνο η εγγύηση της ύπαρξής του.

Παράδειγμα: Εκκρεμές με τριβή (συνέχεια). Υπενθυμίζουμε ότι οι εξισώσεις του συστήματος είναι:

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -\frac{g}{l} \sin x_1 - bx_2$$

όπου $b > 0$ ο συντελεστής τριβής. Απο προηγούμενη ανάλυση, επιλέγοντας ως υποψήφια συνάρτηση Lyapunov την συνολική ενέργεια του συστήματος:

$$V(\mathbf{x}) = \text{K.E.} + \Delta.\text{E.} = \frac{1}{2}ml^2x_2^2 + mgl(1 - \cos x_1) \Rightarrow \dot{V}(\mathbf{x}(t)) = -mbx_2^2 \leq 0$$

συμπεραίνουμε ότι: Η συνάρτηση V είναι θετικά ορισμένη στο $\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < \pi\}$ ως προς το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Η συνάρτηση $\dot{V}$ είναι (μόνο) αρνητικά ημι-ορισμένη στο Ω , εφόσον έχουμε ότι $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ στον x_1 άξονα του επιπέδου (x_1, x_2) , ενώ σε κάθε άλλο σημείο του επιπέδου το πρόσημο της $\dot{V}$ είναι αρνητικό. Από το Θεώρημα Lyapunov συμπεραίνουμε ότι το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι (απλά) ευσταθές (κατά Lyapunov) και όχι ασυμπτωτικά, όπως είναι το αναμενόμενο αποτέλεσμα. Πράγματι, αν επιλέξουμε συνάρτηση Lyapunov της μορφής:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{2}x_1^2 + bx_1x_2 + x_2^2 \right) + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T P \mathbf{x} + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1), \quad P = \begin{bmatrix} \frac{b^2}{2} & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & 1 \end{bmatrix} = P^T \succ 0$$

η παράγωγος της V κατά την κατεύθυνση της λύσης:

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = -\frac{g}{l}x_1 \sin x_1 - \frac{b}{2}x_2^2$$

είναι αρνητικά ορισμένη στο Ω (ως προς το $\mathbf{x}^*$), που συνεπάγεται ασυμπτωτική ευστάθεια του $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ όπως περιμένουμε (εφόσον λόγω τριβής η ενέργεια του συστήματος συνεχώς μειώνεται όσο αυτό είναι σε κίνηση). Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει από τη εφαρμογή του Θεωρήματος Lasalle με χρήση της “φυσικής” συνάρτησης Lyapunov, δηλαδή την συνολική ενέργεια του συστήματος.

Έστω $\bar{K}$ το σύνολο των διανυσμάτων κατάστασης για τα οποία η τιμή της $V(\mathbf{x})$ δεν υπερβαίνει κάποιο σταθερό ποσοστό της συνολικής ενέργειας του συστήματος στο σημείο $(x_1, x_2) = (\pi, 0)$, δηλαδή,

$$\bar{K} = \left\{ \mathbf{x} \in \Omega : V(\mathbf{x}) \leq (1 - \gamma)V \left(\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < \pi, V(\mathbf{x}) \leq (1 - \gamma)V \left(\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right\}$$

όπου $\gamma \in (0, 1)$. Το σύνολο $\bar{K}$ είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του Ω καθώς και γειτονιά του $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Είναι επίσης θετικά αναλλοίωτο, καθώς η ενέργεια του εκκρεμούς δεν αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου (συγκεκριμένα αν $\mathbf{x}_0 \in \bar{K}$ το εκκρεμές δεν μπορεί να φτάσει η να περάσει από την κατακόρυφη θέση $x_1 = \pm\pi$ λόγω του περιορισμού της ενέργειας στον ορισμό του $\bar{K}$). Έστω επίσης:

$$S = \{\mathbf{x}_0 \in \bar{K} : \dot{V}(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)) = 0 \text{ για κάθε } t \geq 0\}$$

Αν $\mathbf{x}_0 \in \bar{K}$ τότε διαισθητικά περιμένουμε ότι η τροχιά $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ θα συγκλίνει στο S καθώς $t \rightarrow \infty$, αφού η ενέργεια του συστήματος μειώνεται όσο αυτό είναι σε κίνηση και στο όριο καθώς $t \rightarrow \infty$ θα παραμείνει σταθερή ($\dot{V} = 0$) και μάλιστα στο μοναδικό ελάχιστο ενεργειακό σημείο $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Επίσης, το σημείο ισορροπίας δεν μπορεί να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν υπάρχει λύση του συστήματος (διαφορετική από την σταθερή λύση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}^* = \mathbf{0}, t \geq 0$) που παραμένει ταυτοτικά εντός του S . Από φυσική άποψη αυτό είναι αδύνατον, γιατί τα σημεία του x_1 -άξονα (όπου $\dot{V} = 0$) αντιστοιχούν στα άκρα ταλάντωσης γύρω από το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ και η λύση δεν μπορεί να παραμείνει σε αυτά για όλο το $t \geq 0$.

Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει και από τις εξισώσεις του συστήματος: Αν υπήρχε λύση $x(t; \mathbf{x}_0) \in S$ για κάθε $t \geq 0$, τότε $x'_1(0) = 0$ για κάθε $t \geq 0$, δηλαδή το $x_1(t)$ θα ήταν σταθερό για κάθε $t \geq 0$ και επίσης θα είχαμε ότι $x'_2(t) = 0$ για κάθε $t \geq 0$. Άρα θα είχαμε ότι $\sin x_1 = 0$ και η μόνη τιμή του $x_1 \in (-\pi, \pi)$ για την οποία ισχύει αυτή η ιδιότητα είναι η τιμή $x_1 = 0$. Άρα η μοναδική λύση που μπορεί να μείνει ταυτοτικά στο S για $t \geq 0$ είναι η σταθερή λύση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Σε αυτή την περίπτωση το Θεώρημα Lassale συνεπάγεται ότι το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^*$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παρατήρηση: Αν το Θεώρημα Lasalle ισχύει με συνάρτηση Lyapunov ακτινικά μη φραγμένη στο $\Omega = \mathbb{R}^n$, τότε το σημείο ισορροπίας είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα:

$$x'_1 = 1 - e^{x_2}, \quad x'_2 = 1 - e^{x_2 - x_1}$$

Σημεία ισορροπίας:

$$e^{x_2} = 1 \Rightarrow x_2 = 0, \quad 1 - e^{x_2 - x_1} = 0 \Rightarrow e^{x_1} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

Άρα $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ το μοναδικό σημείο ισορροπίας. Έστω υποψήφια συνάρτηση Lyapunov:

$$V(x_1, x_2) = V_1(x_1) + V_2(x_2), \quad V_1(x_1) = x_1 + e^{-x_1} - 1, \quad V_2(x_2) = e^{x_2} - x_2 - 1$$

Τότε

$$V'_1(x_1) = 1 - e^{-x_1} = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad V''_1(x_1) = e^{-x_1} \Rightarrow V''_1(0) = 1 > 0$$

και

$$V'_2(x_2) = e^{x_2} - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0, \quad V''_2(0) = e^{x_2} \Rightarrow V''_2(0) = 1 > 0$$

Άρα $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$ τα ολικά ελάχιστα της $V_1(x_1)$ και της $V_2(x_2)$, αντίστοιχα, και επομένως για κάθε $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$:

$$V(x_1, x_2) = V_1(x_1) + V_2(x_2) > V_1(0) + V_2(0) = 0$$

Επομένως $V(x_1, x_2)$ είναι θετικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$ ως προς το $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$. Επίσης:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1(t), x_2(t)) &= \frac{\partial V}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} x'_2 = (1 - e^{-x_1})(1 - e^{x_2}) + (e^{x_2} - 1)(1 - e^{x_2 - x_1}) \\ &= 1 - e^{x_2} - e^{-x_1} + e^{x_2 - x_1} + e^{x_2} - e^{2x_2 - x_1} - 1 + e^{x_2 - x_1} \\ &= -e^{-x_1}(1 - 2e^{x_2} + e^{2x_2}) = -e^{-x_1}(1 - e^{x_2})^2 \leq 0 \end{aligned}$$

και

$$\dot{V}(x_1(t), x_2(t)) = 0 \text{ για κάθε } t \geq 0 \Rightarrow e^{x_2} = 1 \text{ για κάθε } t \geq 0 \Rightarrow x_2 = 0 \text{ για κάθε } t \geq 0$$

Άρα από το Θεώρημα Lasalle το σημείο ισορροπίας $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Η συνάρτηση Lyapunov $V(x_1, x_2)$ που επιλέξαμε είναι ακτινικά μη-φραγμένη: Θέτοντας $x_2 = \lambda x_1$ έχουμε:

$$V(x_1, \lambda x_1) = (1 - \lambda)x_1 + e^{-x_1} + e^{\lambda x_1} - 2$$

Επομένως, αν $\lambda \neq 0$:

$$\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} V(x_1, \lambda x_1) = +\infty$$

Επίσης

$$\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} V_1(x_1) = \lim_{|x_2| \rightarrow \infty} V_2(x_2) = +\infty$$

Επομένως η συνάρτηση V είναι ακτινικά μη-φραγμένη και το σημείο ισορροπίας $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

2.5 Συνθήκες αστάθειας - Θεώρημα Chataev

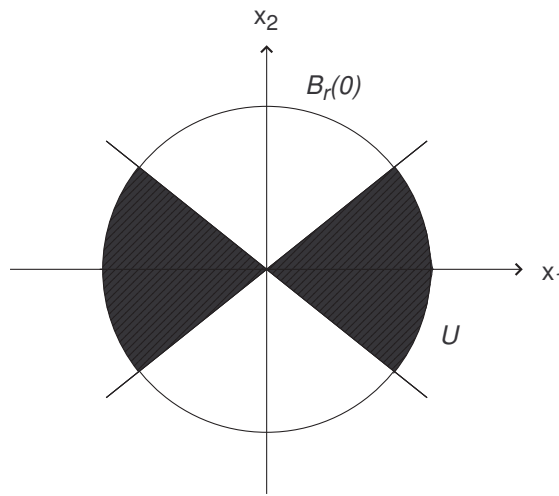
Έστω $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση στο χωρίο $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε (χωρίς βλάβη γενικότητας, δείτε Παρατήρηση στην ενότητα 2.1) ότι $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ και ότι $\mathbf{0} \in D$. Έστω επίσης ότι $V(\mathbf{0}) = 0$ και ότι υπάρχει σημείο $\mathbf{x}_0$ αυθαίρετα κοντά στο $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ τέτοιο ώστε $V(\mathbf{x}_0) > 0$. Επιλέγουμε $r > 0$ αρκούντως μικρή ώστε:

$$\bar{B}_r(\mathbf{0}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq r\} \subseteq D$$

Ορίζουμε:

$$U = \{\mathbf{x} \in \bar{B}_r(\mathbf{0}) : V(\mathbf{x}) > 0\}$$

Τότε $U \neq \emptyset$ και $U \subseteq \bar{B}_r(\mathbf{0})$. Το σύνορο ∂U του U αποτελείται από μέρη της επιφάνειας $V(\mathbf{x}) = 0$ και της σφαίρας $\|\mathbf{x}\| = r$. Εφόσον $V(\mathbf{0}) = 0$ το σημείο $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ κείται στο $\partial U \cap \bar{B}_r(\mathbf{0})$. Για παράδειγμα, αν $n = 2$ και $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$ το σύνολο U είναι όπως στο παρακάτω σχήμα:



Θεώρημα (Chataev): Έστω $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ σημείο ισορροπίας του συστήματος $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$. Έστω $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση στο χωρίο $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{0} \in D$, τέτοια ώστε $V(\mathbf{0}) = 0$ και $V(\mathbf{x}_0) > 0$ για κάποιο $\mathbf{x}_0$ με αυθαίρετα μικρή νόρμα $\|\mathbf{x}_0\|$. Ορίζουμε σύνολο U όπως προηγουμένως και έστω ότι $V(\mathbf{x}) > 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in U$. Τότε το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ασταθές.

Απόδειξη: Το σημείο $\mathbf{x}_0$ είναι στο εσωτερικό του συνόλου U και $V(\mathbf{x}_0) > 0$. Έστω ότι $V(\mathbf{x}_0) = a$. Η τροχιά $\mathbf{x}(t) := \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ θα βγεί τελικά έξω από το σύνολο U . Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει αν παρατηρήσουμε ότι όσο το $\mathbf{x}(t)$ είναι εντός του U , $V(\mathbf{x}) \geq a$ αφού $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0$ στο U . Έστω

$$\gamma = \min\{\dot{V}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in U \text{ και } V(\mathbf{x}) \geq a\}$$

που είναι καλά ορισμένο αφού $\dot{V}(\mathbf{x})$ είναι συνεχής συνάρτηση και το σύνολο

$$\{\mathbf{x} \in U \text{ και } V(\mathbf{x}) \geq a\} = \{\mathbf{x} \in \bar{B}_r(\mathbf{0}) \text{ και } V(\mathbf{x}) \geq a\}$$

είναι συμπαγές. Τότε $\gamma > 0$ και

$$V(\mathbf{x}(t)) = V(\mathbf{x}_0) + \int_0^t \dot{V}(\mathbf{x}(s)) ds \geq a + \int_0^t \gamma ds = a + \gamma t$$

Η παραπάνω ανισότητα αποδεικνύει ότι η τροχιά δεν μπορεί να μείνει για πάντα εντός του U , γιατί η $V(\mathbf{x})$ είναι φραγμένη στο U . Όμως η τροχιά $\mathbf{x}(t)$ δεν μπορεί να φύγει από το U διαμέσω της επιφάνειας $V(\mathbf{x}) = 0$

αφού $V(\mathbf{x}(t)) \geq a$. Επομένως, η τροχιά πρέπει να φύγει εκτός του U μέσω της σφαίρας $\|\mathbf{x}\| = r$. Εφόσον αυτό συμβαίνει για αυθαίρετα μικρό $\|\mathbf{x}_0\|$, το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ασταθές. $\square$

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα:

$$x'_1 = x_1 + g_1(\mathbf{x}), \quad x'_2 = -x_2 + g_2(\mathbf{x})$$

όπου g_1 και g_2 συναρτήσεις τοπικά Lipschitz που ικανοποιούν τις ανισότητες:

$$|g_1(\mathbf{x})| \leq k\|\mathbf{x}\|^2, \quad |g_2(\mathbf{x})| \leq k\|\mathbf{x}\|^2$$

σε κάποια γειτονιά D του σημείου $(0,0)$. (Εδώ $\|\cdot\|$ είναι η ευκλείδεια νόρμα). Από τις ανισότητες συμπεραίνουμε ότι $g_1(0) = g_2(0) = 0$ και άρα το σημείο $\mathbf{x}^* = (0,0)$ είναι το (μοναδικό) σημείο ισορροπίας

Έστω η συνάρτηση:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$$

Στον x_1 -άξονα ($x_2 = 0$), έχουμε $V(\mathbf{x}) > 0$ για σημεία αυθαίρετα κοντά στο $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Η παράγωγος την V κατά μήκος της λύσης του συστήματος είναι:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} x'_2 = x_1(x_1 + g_1(\mathbf{x})) - x_2(-x_2 + g_2(\mathbf{x})) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 g_1(\mathbf{x}) - x_2 g_2(\mathbf{x})$$

Επίσης:

$$|x_1 g_1(\mathbf{x}) - x_2 g_2(\mathbf{x})| \leq |x_1| |g_1(\mathbf{x})| + |x_2| |g_2(\mathbf{x})| \leq 2k\|\mathbf{x}\|^3$$

Επομένως:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \geq \|\mathbf{x}\|^2 - 2k\|\mathbf{x}\|^3 = \|\mathbf{x}\|^2(1 - 2k\|\mathbf{x}\|)$$

Επιλέγοντας ακτίνα r τέτοια ώστε $\bar{B}_r(\mathbf{0}) \subseteq D$ και $r < \frac{1}{2k}$, οι υποθέσεις του Θερήματος Cataev ικανοποιούνται και επομένως συμπεραίνουμε ότι το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ασταθές.

2.6 Ευστάθεια Γραμμικών Συστημάτων - Αλγεβρική εξίσωση Lyapunov

Αρχίζουμε την ανάλυση ευστάθειας γραμμικών χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων με τα παρακάτω προκαταρκτικά:

Λήμμα: Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\lambda \in \sigma(A)$ και έστω $m(\lambda)$ η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ και $E(\lambda) = \ker(A - \lambda I_n)^{m(\lambda)}$ ο γενικευμένος ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Επίσης, αν $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, έστω $\mathbf{x}_{\mathbf{z}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$, $\mathbf{x}_{\mathbf{z}} = e^{At}\mathbf{z}$.

(i) Αν $\lambda \in \sigma(A)$ και $\mathbf{z} \in E(\lambda)$, τότε

$$\mathbf{x}_{\mathbf{z}}(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m(\lambda)-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I_n)^k \mathbf{z}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(ii) Έστω $\mathcal{B}(\lambda)$ βάση του $E(\lambda)$ και $\mathcal{B} = \cup_{\lambda \in \sigma(A)} \mathcal{B}(\lambda)$. Τότε το σύνολο $\{\mathbf{x}_{\mathbf{z}} : \mathbf{z} \in \mathcal{B}\}$ είναι βάση του χώρου λύσεων του ΠΑΤ: $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$.

Απόδειξη: (i) Έστω $d(\lambda)$ η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ και

$$\begin{aligned} (A - \lambda I_n)\mathbf{z}_{i,1} &= \mathbf{0} \\ (A - \lambda I_n)\mathbf{z}_{i,2} &= \mathbf{z}_{i,1} \\ &\vdots \\ (A - \lambda I_n)\mathbf{z}_{i,\nu_i} &= \mathbf{z}_{i,\nu_i-1} \end{aligned}$$

η i -αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων μήκους ν_i που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ , όπου $i = 1, 2, \dots, d(\lambda)$ και $\sum_{i=1}^{d(\lambda)} \nu_i = m(\lambda)$. (Εδώ $\mathbf{z}_{i,j}$, $j = 1, 2, \dots, \nu_i$, είναι το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα j -τάξης της i αλυσίδας). Τότε

$$(A - \lambda I_n)^j \mathbf{z}_{i,j} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, d(\lambda), \quad j = 1, 2, \dots, \nu_i$$

Επομένως,

$$\mathbf{x}_{\mathbf{z}}(t) = e^{At} \mathbf{z} = e^{\lambda t} e^{(A - \lambda I_n)t} \mathbf{z} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I_n)^k \mathbf{z}$$

Ισοδύναμα:

$$\mathbf{x}_{\mathbf{z}}(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m(\lambda)-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I_n)^k \mathbf{z} + e^{\lambda t} \sum_{k \geq m(\lambda)} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I_n)^k \mathbf{z}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Εδώ έχουμε εξ' υποθέσεως ότι

$$\mathbf{z} \in E(\lambda) = \langle \mathbf{z}_{i,j} \rangle_{i=1,2,\dots,d(\lambda)}^{j=1,2,\dots,\nu_i} = \sum_{i=1}^{d(\lambda)} \sum_{j=1}^{\nu_i} c_{ij} \mathbf{z}_{i,j}$$

για κάποια $c_{ij} \in \mathbb{C}$. Επομένως για $k \geq m(\lambda) \geq \nu_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, d(\lambda)$, έχουμε:

$$(A - \lambda I_n)^k \mathbf{z} = \sum_{i=1}^{d(\lambda)} \sum_{j=1}^{\nu_i} c_{ij} (A - \lambda I_n)^k \mathbf{z}_{i,j} = \sum_{i=1}^{d(\lambda)} \sum_{j=1}^{\nu_i} c_{ij} (A - \lambda I_n)^{k-j} (A - \lambda I_n)^j \mathbf{z}_{i,j} = \mathbf{0}$$

(παρατηρούμε ότι στο εσωτερικό άθροισμα έχουμε $k - j \geq 0$ για κάθε τιμή των k και j και επομένως ο πίνακας $(A - \lambda I_n)^{k-j}$ είναι καλά ορισμένος). Επομένως

$$\mathbf{x}_{\mathbf{z}}(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m(\lambda)-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I_n)^k \mathbf{z}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(ii) Εφόσον

$$\mathbb{C}^n = \ker(A - \lambda_1)^{m_1(\lambda)} \oplus \ker(A - \lambda_2)^{m_2(\lambda)} \oplus \dots \oplus \ker(A - \lambda_r)^{m_r(\lambda)}$$

όπου

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\} = \sigma(A)$$

το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι βάση του $\mathbb{C}^n$ και επομένως $\{\mathbf{x}_{\mathbf{z}} : \mathbf{z} \in \mathbb{B}\} = \{e^{At} \mathbf{z} : \mathbf{z} \in \mathcal{B}\}$ είναι βάση του συνόλου των λύσεων του ΠΑΤ. $\square$

Θεώρημα: Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mu_A = \max\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ και

$$\Gamma_A = \{\gamma \in \mathbb{R} : \exists M_\gamma \geq 1 \text{ τ.ω. } \|e^{At}\| \leq M_\gamma e^{\gamma t}, \quad t \geq 0\}$$

Τότε:

(i) $(\mu_A, \infty) \subseteq \Gamma_A$ και $\inf \Gamma_A = \mu_A$.

(ii) $\mu_A \in \Gamma_A$ αν και μόνο αν για κάθε $\lambda \in \sigma(A)$ με $\operatorname{Re}(\lambda) = \mu_A$ η αλγεβρική και η γεωμετρική πλλαπλότητα της ιδιοτιμής λ είναι ίσες.

(iii) Έστω $\gamma \in \mathbb{R}$. Αν για κάθε $\xi \in \mathbb{C}^n$ ισχύει ότι $e^{(A-\gamma I)t} \xi \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$, τότε $\mu_A < \gamma$.

Απόδειξη: (i) Έστω $\lambda \in \sigma(A)$ και $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ αντίστοιχο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα. Τότε από το προηγούμενο Λήμμα:

$$e^{At}\mathbf{z} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m(\lambda)-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I_n)^k \mathbf{z}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Έστω $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n\}$ βάση του $\mathbb{C}^n$ που αποτελείται από τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A και έστω $Z = [\mathbf{z}_1 \ \mathbf{z}_2 \ \dots \ \mathbf{z}_n] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\det Z \neq 0$.

Έστω αυθαίρετο $\gamma \in (\mu_A, \infty)$. Θα δείξουμε ότι $\gamma \in \Gamma_A$ (και άρα $(\mu_A, \infty) \subseteq \Gamma_A$). Έστω $\lambda \in \sigma(A)$ και $\mathbf{z}_i \in \ker(A - \lambda I_n)^{m(\lambda)}$ όπου $m(\lambda)$ η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ (δηλ. $\mathbf{z}_i$ γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ). Τότε:

$$\begin{aligned} \|e^{At}\mathbf{z}_i\| &\leq |e^{\lambda t}| \left\| \sum_{k=0}^{m(\lambda)-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I_n)^k \mathbf{z}_i \right\|, \quad t \in \mathbb{R} \\ &\leq |e^{[\operatorname{Re}(\lambda) + i\operatorname{Im}(\lambda)]t}| \left| \sum_{k=0}^{m(\lambda)-1} \frac{t^k}{k!} \|A - \lambda I_n\|^k \right| \|\mathbf{z}_i\|, \quad t \in \mathbb{R} \\ &= e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} |p_\lambda(t)| \|\mathbf{z}_i\| = e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} p_\lambda(t) \|\mathbf{z}_i\|, \quad t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

όπου

$$p_\lambda(t) := \sum_{k=0}^{m(\lambda)-1} \frac{t^k}{k!} \|A - \lambda I_n\|^k$$

Εφόσον $\gamma > \mu_A \geq \operatorname{Re}(\lambda)$ για κάθε $\lambda \in \sigma(A)$, υπάρχει $L \geq 0$ τ.ω.

$$\|e^{At}\mathbf{z}_i\| \leq L e^{\gamma t} \|\mathbf{z}_i\|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t \geq 0$$

και $L \geq 1$ εφόσον για $t = 0$ έχουμε $\|\mathbf{z}_i\| \leq L \|\mathbf{z}_i\|$. Έστω $\xi \in \mathbb{C}^n$ αυθαίρετο. Ορίζουμε:

$$\eta = Z^{-1}\xi \Rightarrow \xi = Z\eta = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 & \dots & \mathbf{z}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} \Rightarrow \xi = \sum_{i=1}^n \eta_i \mathbf{z}_i$$

και άρα

$$\|e^{At}\xi\| \leq \|e^{At} \sum_{i=1}^n \eta_i \mathbf{z}_i\| \leq \sum_{i=1}^n |\eta_i| \|e^{At}\mathbf{z}_i\|$$

Όμως για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$,

$$|\eta_i| \leq \|\eta\| \leq \|Z^{-1}\| \|\xi\| \Rightarrow \|e^{At}\xi\| \leq \sum_{i=1}^n \|Z^{-1}\| \|\xi\| \|e^{At}\mathbf{z}_i\|$$

και επομένως

$$\|e^{At}\xi\| \leq M_\gamma e^{\gamma t} \|\xi\|, \quad t \geq 0 \quad \text{όπου} \quad M_\gamma := L \|Z^{-1}\| \sum_{i=1}^n \|\mathbf{z}_i\|$$

και εφόσον $\xi \in \mathbb{C}^n$ αυθαίρετο,

$$\|e^{At}\| \leq M_\gamma e^{\gamma t}, \quad t \geq 0$$

Από τον ορισμό του Γ_A έχουμε ότι $\gamma \in \Gamma_A \Rightarrow \hat{\gamma} \in \Gamma_A$ για κάθε $\hat{\gamma} \geq \gamma$ και άρα

$$\gamma \in \Gamma_A \Rightarrow (\mu_A, \infty) \subseteq \Gamma_A \Rightarrow \inf \Gamma_A \leq \mu_A$$

Αντίστροφα, έστω $\lambda \in \sigma(A)$ και $\mathbf{z}_1 \in \mathbb{C}^n$ ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ με $\|\mathbf{z}_1\| = 1$. Τότε $(A - \lambda I_n)^k \mathbf{z}_1 = \mathbf{0}$ αν $k \geq 1$ και επομένως

$$e^{At} \mathbf{z}_1 = e^{\lambda t} \mathbf{z}_1, \quad t \in \mathbb{R}$$

και επομένως για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\|e^{At}\| = \max_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n, \|\mathbf{z}\|=1} \|e^{At} \mathbf{z}\| \geq \|e^{At} \mathbf{z}_1\| = \|e^{\lambda t} \mathbf{z}_1\| = |e^{\lambda t}| \|\mathbf{z}_1\| = e^{\operatorname{Re}(\lambda)t}$$

Επομένως δεν υπάρχει $M_\gamma \geq 1$ τ.ω. $\|e^{At}\| \leq M_\gamma e^{\gamma t}$ για κάθε $t \geq 0$ αν $\gamma > \operatorname{Re}(\lambda)$. Εφόσον $\lambda \in \sigma(A)$ αυθαίρετο, δεν υπάρχει $M_\gamma \geq 1$ τ.ω. $\|e^{At}\| \leq M_\gamma e^{\gamma t}$ για κάθε $t \geq 0$ αν $\gamma > \mu_A$. Επομένως $\inf \Gamma_A \geq \mu_A$ που μαζί με την προηγούμενη ανισότητα ($\inf \Gamma_A \leq \mu_A$) συνεπάγεται ότι $\inf \Gamma_A = \mu_A$.

(ii) Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι μία ιδιοτιμή λ του A έχει ίση αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα αν και μόνο αν ο γενικευμένος ιδιόχωρος $E(\lambda) = \ker(A - \lambda I)^{m(\lambda)}$ ταυτίζεται με τον ιδιόχωρο $\ker(A - \lambda I)$.

Αν κάθε ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(A)$ που ικανοποιεί την ισότητα $\operatorname{Re}(\lambda) = \mu_A$ έχει την ίδια αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα, τότε από την σχέση

$$e^{At} \mathbf{z} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m(\lambda)-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I_n)^k \mathbf{z}, \quad t \in \mathbb{R}$$

προκύπτει ότι για κάθε γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{z}$ του A υπάρχει $L_{\mathbf{z}} \geq 1$, τ.ω.

$$\|e^{At} \mathbf{z}\| \leq L_{\mathbf{z}} e^{\mu_A t} \|\mathbf{z}\|, \quad t \geq 0$$

Με παρόμοια απόδειξη όπως στο (i) υπάρχει $M \geq 1$ τ.ω. $\|e^{At}\| \leq M e^{\mu_A t}$, $t \geq 0$ και επομένως $\mu_A \in \Gamma_A$.

Αντίστροφα, έστω $\mu_A \in \Gamma_A$, $\lambda \in \sigma(A)$ με $\operatorname{Re}(\lambda) = \mu_A$ και έστω $\mathbf{z} \in E(\lambda) = \ker(A - \lambda I)^{m(\lambda)}$ (γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ). Τότε

$$\left\| \sum_{k=0}^{m(\lambda)-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k \mathbf{z} \right\| = \|e^{-\lambda t} e^{At}\| = e^{-\mu_A t} \|e^{At}\| \leq e^{-\mu_A t} M e^{\mu_A t} = M, \quad t \geq 0$$

Επομένως

$$\|e^{At}\| \leq M |e^{\lambda t}| = M e^{\mu_A t}, \quad t \geq 0$$

που συνεπάγεται ότι $(A - \lambda I)\mathbf{z} = \mathbf{0}$, δηλαδή ότι $\mathbf{z} \in \ker(A - \lambda I)$. Εφόσον η συνεπαγωγή ισχύει για κάθε $\mathbf{z} \in E(\lambda)$ έχουμε $E(\lambda) = \ker(A - \lambda I)$ και επομένως η αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ είναι ίσες.

Έστω το γραμμικό σύστημα $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Το σύστημα έχει σημείο ισορροπίας στο $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$, το οποίο είναι μεμονομένο αν και μόνο αν $\det(A) \neq 0$, δηλ. αν και μόνο αν ο πίνακας A έχει τετριμμένο πυρήνα. Παρατηρούμε επίσης ότι ένα γραμμικό σύστημα δεν μπορεί να έχει πολλαπλά μεμονομένα σημεία ισορροπίας, γιατί αν $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{x}_2$ είναι σημεία ισορροπίας και $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, τότε, λόγω γραμμικότητας, κάθε σημείο στην ευθεία που συνδέει τα δύο σημεία είναι επίσης σημείο ισορροπίας.

Εξετάζουμε το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Αν $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, η λύση του συστήματος είναι $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$. Αν $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ο πίνακας των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων, έχουμε

$$P^{-1}AP := J = \text{block-diag}(J_1, J_2, \dots, J_r)$$

όπου r ο αριθμός των διακεκριμένων ιδιοτιμών $\lambda_i \in \sigma(A)$. Επομένως

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} t^{k-1} e^{\lambda_i t} R_{ik}$$

όπου m_i η μέγιστη διάσταση των Jordan blocks που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i . Αν η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i είναι τ_i , τότε η διάσταση όλων των Jordan blocks που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i είναι ίση με την μονάδα αν και μόνο αν $\text{null}(\lambda_i I_n - A) = \tau_i$, δηλ. αν η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i είναι ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα τ_i . Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει το επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα: Το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ευσταθές (κατά Lyapunov) αν και μόνο αν για κάθε ιδιοτιμή λ_i , $i = 1, 2, \dots, r$, του πίνακα A ισχύει ότι $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ και κάθε ιδιοτιμή με $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ έχει ίση αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα. Το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι (ολικά) ασυμπτωτικά ευσταθές αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A ικανοποιούν την ανισότητα $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Απόδειξη: Από την σχέση $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$ συμπεραίνουμε ότι το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ευσταθές αν και μόνο αν η συνάρτηση e^{At} είναι φραγμένη για $t \geq 0$. Αν υπάρχει ιδιοτιμή λ_i με $\text{Re}(\lambda_i) > 0$, ο αντίστοιχος όρος $e^{\lambda_i t}$ της

$$e^{At} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} t^{k-1} e^{\lambda_i t} R_{ik}$$

δεν φράσσεται καθώς $t \rightarrow \infty$. Επομένως πρέπει να περιορίσουμε τις ιδιοτιμές στο $\bar{\mathbb{C}}_-$. Όμως, οι ιδιοτιμές στον άξονα των φανταστικών (αν υπάρχουν) αντιστοιχούν επίσης σε μη φραγμένες συναρτήσεις στο $t \geq 0$ αν υπάρχουν μη μηδενικοί όροι που αντιστοιχούν σε τιμές του δείκτη $k > 1$, λόγω του όρου t^{k-1} . Άρα για ευστάθεια (κατά Lyapunov) κάθε ιδιοτιμή που κείται στον άξονα των φανταστικών πρέπει να έχει ίση αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα (ώστε τα αντίστοιχα Jordan blocks να έχουν διάσταση 1×1). Οι παραπάνω συνθήκες είναι επίσης ικανές για να εξασφαλίσουν ότι η συνάρτηση $[0, \infty) \rightarrow e^{At}$ είναι φραγμένη. Επίσης, από την μορφή του αναπτύγματος της e^{At} προκύπτει ότι $e^{At} \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$ αν και μόνο αν $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, r$. Εφόσον η λύση $\mathbf{x}(t)$ εξαρτάται γραμμικά στην αρχική κατάσταση $\mathbf{x}_0$, η ευστάθεια του σημείου ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ στην περίπτωση αυτή είναι ολική. $\square$

Παρατήρηση: Πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}_-$ λέγεται πίνακας Hurwitz.

Έστω σύστημα $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ πίνακας Hurwitz. Ορίζουμε υποψήφια συνάρτηση Lyapunov $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ όπου $P = P^T \succ 0$. Η παράγωγος της V κατά μήκος της τροχιάς του συστήματος είναι

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T P \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (PA + A^T P) \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$$

όπου $Q = Q^T$ ορίζεται ως: $PA + A^T P = -Q$. Αν $Q \succ 0$, τότε $\dot{V}(\mathbf{x})$ αρνητικά ορισμένη συνάρτηση και από το Θεώρημα Lyapunov το σημείο $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (και μάλιστα ολικά εφόσον $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \geq \lambda_{\min}(P) \|\mathbf{x}\|^2$ ακτινικά μη φραγμένη εφόσον $\lambda_{\min}(P) > 0$). Επομένως, αν για κάποιο πίνακα $Q = Q^T \succ 0$ η αλγεβρική εξίσωση Lyapunov: $PA + A^T P + Q = 0$ έχει θετικά ορισμένη λύση $P = P^T \succ 0$, τότε ο πίνακας A είναι Hurwitz και $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ είναι (ισχυρή) συνάρτηση Lyapunov του συστήματος $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

Θεώρημα (Εξίσωση Lyapunov): Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και το σύστημα $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Έστω ότι $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q = Q^T \succ 0$ και

$$V(\mathbf{x}_0) = \int_0^\infty \mathbf{x}^T(t) Q \mathbf{x}(t) dt$$

Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος.
2. $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος.
3. Η συνάρτηση $V(\mathbf{x})$ είναι καλά ορισμένη για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και είναι ισχυρή συνάρτηση Lyapunov για το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Επιπλέον, $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ με $P = P^T \succ 0$, όπου

$$P := \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt$$

4. Η γραμμική πινακοεξίσωση

$$A^T P + P A + Q = 0$$

(γνωστή ως εξίσωση Lyapunov) έχει μοναδική λύση $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P = P^T \succ 0$. Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας P που ορίζεται ως η λύση της εξίσωσης $A^T P + P A + Q = 0$ και ως $P := \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt$ είναι ο ίδιος.

Απόδειξη: Η σειρά των επι-μέρους αποδείξεων είναι: 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 4. $\Rightarrow$ 1.

1. $\Rightarrow$ 2. Τετριμμένο.

2. $\Rightarrow$ 3. Η λύση του συστήματος είναι $\mathbf{x}(t) = e^{A t} \mathbf{x}_0$. Λόγω ασυμπτωτικής ευστάθειας έχουμε $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{A t} \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Επομένως:

$$V(\mathbf{x}_0) = \int_0^\infty (e^{A t} \mathbf{x}_0)^T Q (e^{A t} \mathbf{x}_0) dt = \int_0^\infty \mathbf{x}_0^T (e^{A^T t} Q e^{A t}) \mathbf{x}_0 dt = \mathbf{x}_0^T P \mathbf{x}_0$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον δεύτερο ορισμό του P (δηλ. $P := \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt$). Ο πίνακας P είναι καλά ορισμένος γιατί ο πίνακας $e^{A t}$ συγχλίνει στον μηδενικό πίνακα εκθετικά. Ο πίνακας P είναι θετικά ορισμένος γιατί είναι το ολοκλήρωμα θετικά ορισμένου πίνακα.

Επομένως η συνάρτηση $V(\mathbf{x}_0)$ είναι καλά ορισμένη ως τετραγωνική μορφή και συνεχώς διαφορίσιμη (μάλιστα τάξης C^∞). Έχει μοναδικό (ολικό) ελάχιστο στο σημείο $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ και η παράγωγος της κατά μήκος της τροχιάς του συστήματος $\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$ είναι αρνητικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^n$ ως προς το σημείο $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Επομένως η V είναι συνάρτηση Lyapunov (και μάλιστα ισχυρή αφού $-\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} < 0$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$).

3. $\Rightarrow$ 4. Εφόσον V ισχυρή συνάρτηση Lyapunov για το σύστημα $\mathbf{x}'(t) = A \mathbf{x}(t)$, συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας A είναι Hurwitz. Εξετάζουμε το ορισμό του πίνακα P μέσω του ολοκληρώματος

$$P := \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt$$

Τότε

$$A^T P + P A = \int_0^\infty (A^T e^{A^T t} Q e^{A t} + e^{A^T t} Q e^{A t} A) dt = \left[e^{A^T t} Q e^{A t} \right]_{t=0}^\infty = -Q$$

Η παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι για κάθε πίνακα $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (συμμετρικό η μη) υπάρχει $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε $A^T P + P A = -Q$. Συνεπώς, η γραμμική απεικόνιση: $\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} : P \rightarrow A^T P + P A$ είναι επί. Όμως γνωρίζουμε από την Γραμμική Άλγεβρα ότι ένας γραμμικός μετασχηματισμός επί από έναν διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης στον εαυτό του έχει αντίστροφο. Επομένως, για κάθε $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (συμμετρικός η όχι), η λύση P της εξίσωσης $A^T P + P A = -Q$ υπάρχει και είναι μοναδική. Εφόσον στην περίπτωση μας $Q = Q^T \succ 0$, η λύση P που ορίζεται με την μορφή ολοκληρώματος έχει την ιδιότητα $P = P^T \succ 0$.

4. $\Rightarrow$ 1. Ορίζουμε $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$. Τότε η $V(\mathbf{x})$ είναι θετικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^n$ ως προς το $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Επίσης:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} \mathbf{x}^T(t) P \mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}')^T(t) P \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t) P \mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}^T(t) (A^T P + P A) \mathbf{x}(t) = -\mathbf{x}^T(t) Q \mathbf{x}(t)$$

είναι αρνητικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^n$ ως προς το $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Άρα η V είναι ισχυρή συνάρτηση Lyapunov και επομένως το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (και μάλιστα ολικά εφόσον $V(\mathbf{x}) \geq \lambda_{\min}(P)\|\mathbf{x}\|^2$ είναι ακτινικά μη-φραγμένη. Άρα το $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές. $\square$

Παρατήρηση: Η αλγεβρική εξίσωση Lyapunov $A^T P + PA + Q = 0$ είναι ειδική περίπτωση της εξίσωσης Sylvester που αναλύθηκε στην ενότητα: 1.2 Ανάδραση καταστάσεων/Παρατηρητές. Οι εξισώσεις Sylvester είναι της μορφής $AX + XB = C$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{r \times r}$ και $C, X \in \mathbb{R}^{n \times r}$. Επομένως η εξίσωση Lyapunov είναι ειδική μορφή της εξίσωσης Sylvester με $r = n$. Αποδεικνύεται στην παραπάνω ενότητα ότι η εξίσωση Sylvester έχει μοναδική λύση (για κάθε $C \in \mathbb{R}^{n \times r}$) αν και μόνο αν $\sigma(A) \cap \sigma(-B) = \emptyset$. Συνεπώς η εξίσωση Lyapunov έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\sigma(A) \cap \sigma(-A) = \emptyset$, ισοδύναμα αν και μόνο αν $\lambda_i(A) + \bar{\lambda}_j(A) \neq 0$ για κάθε ζεύγος ιδιοτιμών $\lambda_i, \lambda_j \in \sigma(A)$, ιδιότητα που ισχύει αν ο A είναι πίνακας Hurwitz.

Παρατήρηση: Έστω A πίνακας Hurwitz. Τότε από την παραπάνω παρατήρηση η λύση P της $A^T P + PA + Q = 0$ υπάρχει και είναι μοναδική. Έστω $Q = Q^T$, Τότε αναγκαστικά $P = P^T$. Γιατι αν P είναι λύση, δηλ. $A^T P + PA + Q = 0$, τότε $(A^T P + PA + Q)^T = 0 \Rightarrow P^T A + A^T P^T + Q = 0$, δηλ. P^T επίσης λύση. Λόγω μοναδικότητας λύσης έχουμε $P = P^T$.

Μία γενίκευση του παραπάνω Θεωρήματος όταν $Q = Q^T \succeq 0$ είναι η παρακάτω:

Λήμμα: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ πίνακας Hurwitz, τότε ισχύουν τα παρακάτω σε σχέση με την (μοναδική) λύση της εξίσωσης Lyapunov $A^T P + PA + Q = 0$:

1. $P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt$.
2. (α) Αν $Q = Q^T \succ 0$ τότε $P = P^T \succ 0$. (β) Αν $Q = Q^T \succeq 0$, τότε $P = P^T \succeq 0$.
3. Αν $Q = Q^T \succeq 0$, τότε $P = P^T \succ 0$ αν και μόνο αν $\Sigma_o(A, Q)$ πλήρως παρατηρήσιμο.

Απόδειξη: Το (1) και (2α) έχουν ήδη αποδειχθεί. Παρόμοια, το (2β) επίσης ισχύει: Το ολοκλήρωμα συγκλίνει εφόσον ο A είναι πίνακας Hurwitz και $P = P^T \succeq 0$ ως ολοκλήρωμα συμμετρικού, θετικά ημιορισμένου πίνακα στο διάστημα $[0, \infty)$. (3 $\Rightarrow$) Έστω ότι $P = P^T \succ 0$ και έστω (για αντίφαση) ότι το σύστημα $\Sigma_o(A, Q)$ δεν είναι πλήρως παρατηρήσιμο. Τότε υπάρχει ζεύγος $(\lambda, \mathbf{v})$, $\lambda \in \sigma(A)$, $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ τέτοια ώστε $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ και $Q\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Επομένως:

$$\mathbf{v}^*(A^T P + PA + Q)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow 2\operatorname{Re}(\lambda)(\mathbf{v}^* P \mathbf{v}) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda) = 0$$

που είναι άτοπο γιατί ο A είναι πίνακας Hurwitz εξ' υποθέσεως. (3 $\Leftarrow$) Έστω $Q = Q^T \succeq 0$ και $\Sigma_o(A, Q)$ πλήρως παρατηρήσιμο. Από το (2b) έχουμε $P = P^T \succeq 0$. Αν $P = P^T \succ 0$ η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Έστω (για αντίφαση) ότι $\det(P) = 0$. Τότε υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, τέτοιο ώστε $P\xi = \mathbf{0}$. Επομένως:

$$\xi^T (A^T P + PA + Q)\xi = 0 \Rightarrow \xi^T Q \xi = 0 \Rightarrow Q\xi = \mathbf{0}$$

αφού $Q = Q^T \succeq 0$. Επομένως $\ker(P) \subseteq \ker(Q)$. Επίσης:

$$(A^T P + PA + Q)\xi = 0 \Rightarrow P A \xi = \mathbf{0} \Rightarrow \xi^T A^T (A^T P + PA + Q) A \xi = \xi^T A^T Q A \xi = 0 \Rightarrow Q A \xi = \mathbf{0}$$

Επαγωγικά:

$$Q A^k \xi = \mathbf{0} \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow Q e^{A t} \xi = \mathbf{0} \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

και επομένως το σύστημα $\Sigma_o(A, Q)$ δεν είναι πλήρως παρατηρήσιμο που είναι άτοπο εξ' υποθέσεως. $\square$

Πόρισμα: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ πίνακας Hurwitz. Τότε το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνο αν η λύση P της εξίσωσης Lyapunov $A^T P + PA + C^T C = 0$ είναι θετικά ορισμένη. Αντίστοιχα, αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι πίνακας Hurwitz, τότε το $\Sigma_i(A, B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν η λύση Q της εξίσωσης Lyapunov $AQ + QA^T + BB^T = 0$ είναι θετικά ορισμένη.

Απόδειξη: Προκύπτει άμεσα από το μέρος (3) του παραπάνω Λήμματος και την διυκότητα ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας. Οι πίνακες P και Q είναι οι πίνακες Gramian παρατηρησιμότητας και ελεγχιμότητας, αντίστοιχα, του συστήματος $\Sigma(A, B, C)$. $\square$

Σε ορισμένες περιπτώσεις θέλουμε να συνάγουμε συμπεράσματα για το φάσμα του πίνακα A από την λύση εξίσωσης Lyapunov. Στις περιπτώσεις αυτές το παρακάτω Λήμμα μπορεί να είναι χρήσιμο:

Λήμμα: Έστω P η λύση της εξίσωσης Lyapunov $A^T P + P A + Q = 0$. Τότε,

1. $\text{Re}(\lambda_i(A)) \leq 0$ για κάθε $\lambda_i(A) \in \sigma(A)$ αν $P = P^T \succ 0$ και $Q = Q^T \succeq 0$.
2. A Hurwitz αν $P = P^T \succ 0$ και $Q = Q^T \succ 0$.
3. A Hurwitz αν $P = P^T \succeq 0$, $Q = Q^T \succeq 0$ και $\Sigma_o(A, Q)$ ανιχνεύσιμο (detectable).

Απόδειξη: Έστω $(\lambda, \mathbf{v})$ ζεύγος ιδιοτιμής/ιδιοδιανύσματος του πίνακα A . Τότε $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση Lyapunov από τα δεξιά με $\mathbf{v}$ και από τα αριστερά με $\mathbf{v}^*$, έχουμε:

$$\mathbf{v}^*(A^T P + P A + Q)\mathbf{v} = 2\text{Re}\lambda(\mathbf{v}^* P \mathbf{v}) + \mathbf{v}^* Q \mathbf{v} = 0$$

Αν $P \succ 0$, τότε $\mathbf{v}^* P \mathbf{v} > 0$ και επομένως $\text{Re}\lambda \leq 0$ αν $Q \succeq 0$ και $\text{Re}\lambda < 0$ αν $Q \succ 0$ που αποδεικνύουν το (1) και το (2). Για να δείξουμε το (3), έστω ότι $\text{Re}(\lambda) \geq 0$. Τότε $\mathbf{v}^* Q \mathbf{v} = 0 \Rightarrow Q\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Άρα $\lambda \in \bar{\mathbb{C}}_+$ και μη-παρατηρήσιμη ιδιοτιμή, εφόσον

$$\begin{bmatrix} \lambda I_n - A \\ C \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

που αντιβαίνει στην υπόθεση ότι το σύστημα $\Sigma_o(A, Q)$ είναι ανιχνεύσιμο. $\square$

2.7 Η έμμεση μέθοδος Lyapunov

Έστω το σύστημα $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ όπου $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση και D χωρίο (ανοικτό συνεκτικό υποσύνολο) του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $\mathbf{x}^* = \mathbf{0} \in D$ και $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, δηλ. ότι $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι σημείο ισορροπίας. Έστω $\mathbf{x} \in D$. Από το θεώρημα μέσης τιμής:

$$f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{0}) + \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{z})\mathbf{x} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

όπου $\mathbf{z}$ σημείο που κείται στο ευθύγραμμο τμήμα του ενώνει τα σημεία $\mathbf{x}$ και $\mathbf{0}$. Υποθέτουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα δύο αυτά σημεία κείται εξ' ολοκλήρου στο D . Αυτό συμβαίνει για παράδειγμα (για κάθε $\mathbf{x} \in D$) αν το σύνολο D είναι κυρτό. Εφόσον $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ μπορούμε να γράψουμε:

$$f_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{z})\mathbf{x} = \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0})\mathbf{x} + \left[\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{z}) - \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}) \right] \mathbf{x}$$

Ισοδύναμα

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

όπου

$$A = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}) \quad \text{και} \quad g_i(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{z}) - \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}) \right] \mathbf{x}$$

Η συνάρτηση $g_i(\mathbf{x})$ φράσσεται ως:

$$|g_i(\mathbf{x})| \leq \left\| \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{z}) - \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}) \right\| \|\mathbf{x}\|$$

Λόγω συνέχειας της συνάρτησης $[\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}]$ (η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη):

$$\frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \rightarrow 0 \text{ καθώς } \|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$$

Η παραπάνω ιδιότητα υπονοεί ότι σε μία (αρκούντως μικρή) γειτονιά γύρω από το σημείο ισορροπίας (εδώ $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ χωρίς βλάβη γενικότητας) ίσως να μπορούμε να προσεγγίσουμε το μη γραμμικό σύστημα: $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ από το γραμμικοποιημένο σύστημα: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ υπό την έννοια ότι η τροχιά του μη-γραμμικού συστήματος στην περιοχή αυτή μπορεί να προσεγγίζεται με ακρίβεια από την τροχιά του γραμμικοποιημένου συστήματος και επομένως οι ιδιότητες ευστάθειας του σημείου ισορροπίας του μη-γραμμικού συστήματος να αντιστοιχούν (τουλάχιστον τοπικά) με αυτές του γραμμικοποιημένου συστήματος. Όπως θα δούμε στην συνέχεια η διαίσθηση αυτή είναι σωστή μόνο κάτω από ορισμένες συνθήκες και αποτελεί την βάση της λεγόμενης έμμεσης μεθόδου Lyapunov (Lyapunov's indirect method).

Θεώρημα (ασυμπτωτικής ευστάθειας): Έστω $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ σημείο ισορροπίας του μη-γραμμικού συστήματος $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ όπου $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση και D γειτονιά του $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Έστω

$$A = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}$$

Τότε, αν $\text{Re} \lambda_i < 0$ για κάθε $\lambda_i \in \sigma(A)$, το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Απόδειξη: Έστω A πίνακας Hurwitz. Τότε, από προηγούμενο Θεώρημα γνωρίζουμε ότι για κάθε $Q = Q^T \succ 0$ η (μοναδική) λύση της εξίσωσης Lyapunov: $A^T P + PA + Q = 0$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας P . Έστω $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ υποψήφια συνάρτηση Lyapunov για το μη γραμμικό σύστημα. Η παράγωγος της V κατά μήκος της τροχιάς του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T P \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) P \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T P [A\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})] + [\mathbf{x}^T A^T + \mathbf{g}^T(\mathbf{x})] P \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T (PA + A^T P) \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T P \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ &= -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T P \mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος $(-\mathbf{x}^T Q \mathbf{x})$ στο δεξιό μέλος της εξίσωσης είναι αρνητικά ορισμένη συνάρτηση και ο δεύτερος $(2\mathbf{x}^T P \mathbf{g}(\mathbf{x}))$ μπορεί να έχει θετικό ή αρνητικό πρόσημο. Η συνάρτηση $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ ικανοποιεί:

$$\frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \rightarrow 0 \text{ καθώς } \|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$$

Επομένως, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

$$0 < \|\mathbf{x}\| < \delta \Rightarrow 0 < \|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| < \epsilon \|\mathbf{x}\|$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T P \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ &< -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + 2\epsilon \|P\| \|\mathbf{x}\|^2 \text{ για κάθε } 0 < \|\mathbf{x}\| < \delta \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q) \|\mathbf{x}\|^2 + 2\epsilon \|P\| \|\mathbf{x}\|^2 \text{ για κάθε } 0 < \|\mathbf{x}\| < \delta \\ &= -(\lambda_{\min}(Q) - 2\epsilon \|P\|) \|\mathbf{x}\|^2 \text{ για κάθε } 0 < \|\mathbf{x}\| < \delta \end{aligned}$$

Επιλέγοντας $0 < \epsilon < \lambda_{\min}(Q)/(2\|P\|)$, η συνάρτηση $\dot{V}(\mathbf{x})$ είναι αρνητικά ορισμένη και το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. $\square$

Θεώρημα (αστάθειας): Έστω $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ σημείο ισορροπίας του μη-γραμμικού συστήματος $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ όπου $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση και D γειτονιά του $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Έστω

$$A = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}$$

Τότε, αν $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ για (τουλάχιστον) μία ιδιοτιμή $\lambda_i \in \sigma(A)$, το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ασταθές.

Απόδειξη: Υποθέτουμε αρχικά (για απλούστευση της απόδειξης) ότι ο πίνακας A δεν έχει ιδιοτιμές στον άξονα των φανταστικών. Τότε, Υπάρχει πίνακας $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε:

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

όπου A_1 και A_2 πίνακες Hurwitz. Έστω

$$\mathbf{z} = T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix}$$

όπου ο διαχωρισμός του διανύσματος $\mathbf{z}$ στα διανύσματα $\mathbf{z}_1$ και $\mathbf{z}_2$ είναι συμβατός με τις διαστάσεις των πινάκων A_1 και A_2 , αντίστοιχα. Έστω η αλλαγή μεταβλητών: $\mathbf{z} = T\mathbf{x}$. Τότε

$$\mathbf{z}' = \begin{bmatrix} \mathbf{z}'_1 \\ \mathbf{z}'_2 \end{bmatrix} = T\mathbf{x}' = T(A\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})) = TAT^{-1}\mathbf{z} + T\mathbf{g}(T^{-1}\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} -A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{z}) \\ g_2(\mathbf{z}) \end{bmatrix}$$

όπου

$$\begin{bmatrix} g_1(\mathbf{z}) \\ g_2(\mathbf{z}) \end{bmatrix} = T\mathbf{g}(\mathbf{x}) = T\mathbf{g}(T^{-1}\mathbf{z})$$

Επομένως

$$\mathbf{z}'_1 = -A_1\mathbf{z}_1 + g_1(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z}'_2 = A_2\mathbf{z}_2 + g_2(\mathbf{z})$$

και άρα:

$$\|\mathbf{g}_i(\mathbf{z})\| \leq \left\| \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{z}) \\ g_2(\mathbf{z}) \end{bmatrix} \right\| = \|T\mathbf{g}(\mathbf{x})\| \leq \|T\| \|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|, \quad i = 1, 2$$

Απο προηγούμενη ανάλυση, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| < \epsilon \|\mathbf{x}\| \quad \text{για κάθε } \|\mathbf{x}\| < \delta, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Άρα για $i = 1, 2$

$$\|\mathbf{g}_i(\mathbf{z})\| \leq \|T\| \|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| < \epsilon \|T\| \|\mathbf{x}\| = \epsilon \|T\| \|T^{-1}\mathbf{z}\| \leq \epsilon \|T\| \|T^{-1}\| \|\mathbf{z}\| = \epsilon \kappa(T) \|\mathbf{z}\|$$

για κάθε

$$\|\mathbf{x}\| < \delta, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \|T^{-1}\mathbf{z}\| < \delta, T^{-1}\mathbf{z} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \|T^{-1}\| \|\mathbf{z}\| < \delta, \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \|\mathbf{z}\| < \delta \|T^{-1}\|^{-1}, \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$$

Θέτοντας $\hat{\epsilon} := \epsilon \kappa(T)$ και $\hat{\delta} := \delta \|T^{-1}\|^{-1}$ συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\hat{\epsilon} > 0$ υπάρχει $\hat{\delta} = \hat{\delta}(\hat{\epsilon}) > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\|\mathbf{g}_i(\mathbf{z})\| < \hat{\epsilon} \|\mathbf{z}\| \quad \text{για κάθε } \|\mathbf{z}\| < \hat{\delta}, \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$$

όπου $i = 1, 2$. Το σημείο $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ είναι σημείο ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος εκφρασμένου στις νέες ($\mathbf{z}$) συντεταγμένες. Επίσης, εφόσον $\det(T) \neq 0$, κάθε συμπέρασμα ως προς τις ιδιότητες ευστάθειας του σημείου $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ (στις νέες συντεταγμένες) αυτομάτως αντιστοιχεί στο ίδιο συμπέρασμα ως προς τις ιδιότητες ευστάθειας του σημείου ισορροπίας $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (στις αρχικές συντεταγμένες).

Θα αποδείξουμε αστάθεια του σημείου ισορροπίας $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Chataev: Έστω Q_1 και Q_2 συμμετρικοί, θετικά ορισμένοι πίνακες με διαστάσεις ίσες με αυτές των A_1 και A_2 , αντίστοιχα. Έστω P_1 και P_2 οι (μοναδικές) λύσεις των εξισώσεων Lyapunov:

$$P_i A_i + A_i^T P_i + Q_i = 0, \quad i = 1, 2$$

Εφόσον A_1 και A_2 πίνακες Hurwitz έχουμε $P_1 = P_1^T \succ 0$ και $P_2 = P_2^T \succ 0$. Έστω η συνάρτηση

$$V(\mathbf{z}) = \mathbf{z}_1^T P_1 \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2^T P_2 \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1^T & \mathbf{z}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix}$$

Στον υπόχωρο $\mathbf{z}_2 = \mathbf{0}$, $V(\mathbf{z}) > 0$ σε σημεία αυθαίρετα κοντά στο σημείο $\mathbf{0}$. Έστω

$$U = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{z}\| \leq \hat{\delta} \text{ και } V(\mathbf{z}) > 0\}$$

Για κάθε $\mathbf{z} \in U$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{z}) &= (\mathbf{z}_1')^T P_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_1^T P_1 \mathbf{z}_1' - (\mathbf{z}_2')^T P_2 \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_2^T P_2 \mathbf{z}_2' \\ &= (-\mathbf{z}_1^T A_1^T + \mathbf{g}_1^T(\mathbf{z})) P_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_1^T P_1 (-A_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{g}_1(\mathbf{z})) - (\mathbf{z}_2^T A_2^T + \mathbf{g}_2^T(\mathbf{z})) P_2 \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_2^T P_2 (A_2 \mathbf{z}_2 + \mathbf{g}_2(\mathbf{z})) \\ &= -\mathbf{z}_1^T (P_1 A_1 + A_1^T P_1) \mathbf{z}_1 + 2\mathbf{z}_1^T P_1 \mathbf{g}_1(\mathbf{z}) - \mathbf{z}_2^T (P_2 A_2 + A_2^T P_2) \mathbf{z}_2 - 2\mathbf{z}_2^T P_2 \mathbf{g}_2(\mathbf{z}) \\ &= \mathbf{z}_1^T Q_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2^T Q_2 \mathbf{z}_2 + 2\mathbf{z}^T \begin{bmatrix} P_1 \mathbf{g}_1(\mathbf{z}) \\ -P_2 \mathbf{g}_2(\mathbf{z}) \end{bmatrix} \\ &\geq \lambda_{\min}(Q_1) \|\mathbf{z}_1\|^2 + \lambda_{\min}(Q_2) \|\mathbf{z}_2\|^2 - 2\|\mathbf{z}\| \sqrt{\|P_1\|^2 \|\mathbf{g}_1(\mathbf{z})\|^2 + \|P_2\|^2 \|\mathbf{g}_2(\mathbf{z})\|^2} \end{aligned}$$

Θέτοντας

$$\alpha := \min\{\lambda_{\min}(Q_1), \lambda_{\min}(Q_2)\}$$

έχουμε:

$$\lambda_{\min}(Q_1) \|\mathbf{z}_1\|^2 + \lambda_{\min}(Q_2) \|\mathbf{z}_2\|^2 \geq \alpha \|\mathbf{z}_1\|^2 + \alpha \min \|\mathbf{z}_2\|^2 = \alpha (\|\mathbf{z}_1\|^2 + \|\mathbf{z}_2\|^2) = \alpha \|\mathbf{z}\|^2$$

Επίσης, θέτοντας

$$\beta = \max\{\|P_1\|, \|P_2\|\}$$

έχουμε

$$\|P_1\|^2 \|\mathbf{g}_1(\mathbf{z})\|^2 + \|P_2\|^2 \|\mathbf{g}_2(\mathbf{z})\|^2 \leq \beta^2 \|\mathbf{g}_1(\mathbf{z})\|^2 + \beta^2 \|\mathbf{g}_2(\mathbf{z})\|^2 < 2\beta^2 \epsilon^2 \|\mathbf{z}\|^2$$

οπότε

$$2\|\mathbf{z}\| \sqrt{\|P_1\|^2 \|\mathbf{g}_1(\mathbf{z})\|^2 + \|P_2\|^2 \|\mathbf{g}_2(\mathbf{z})\|^2} < 2\sqrt{2}\beta\epsilon \|\mathbf{z}\|^2$$

και

$$\dot{V}(\mathbf{z}) > (\alpha - 2\sqrt{2}\beta\epsilon) \|\mathbf{z}\|^2$$

Επιλέγοντας:

$$\hat{\epsilon} < \frac{\alpha}{2\sqrt{2}\beta}$$

έχουμε ότι $\dot{V}(\mathbf{z}) > 0$ για $\mathbf{z} \in U$ και επομένως από το Θεώρημα Chataev το σημείο ισορροπίας $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ είναι ασταθές. $\square$

Παράδειγμα: Εξετάζουμε το μαθηματικό εκκρεμές με τριβή, του οποίου οι εξισώσεις είναι:

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -a \sin x_1 - b x_2, \quad a > 0, b > 0$$

Υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας: $(x_1, x_2) = (0, 0)$ και $(x_1, x_2) = (\pi, 0)$. Ο πίνακας Jacobian του συστήματος είναι:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos x_1 & -b \end{bmatrix}$$

Στο σημείο ισορροπίας $(x_1, x_2) = (0, 0)$:

$$A_1 = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(x_1, x_2) = (0, 0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας A_1 έχει ιδιοτιμές:

$$\phi_{A_1}(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ a & \lambda + b \end{bmatrix} = \lambda^2 + b\lambda + a = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a}$$

Επομένως $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$, $i = 1, 2$, και το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Στο σημείο ισορροπίας $(x_1, x_2) = (\pi, 0)$,

$$A_2 = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(x_1, x_2) = (\pi, 0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & -b \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας A_2 έχει ιδιοτιμές:

$$\phi_{A_1}(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -a & \lambda + b \end{bmatrix} = \lambda^2 + b\lambda - a = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4a}$$

Επομένως, μία ιδιοτιμή έχει θετικό πραγματικό μέρος και το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές.

2.8 Μη-γραμμικά συστήματα ανάδρασης

Έστω μη-γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{g}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (*)$$

όπου $\mathbf{u}(t)$ είναι η συνάρτηση ελέγχου (υπό σχεδίαση) και $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ (συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$). Από τον ορισμό συμπεραίνουμε ότι το σύστημα ανοικτού βρόγχου $\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{0})$ έχει σημείο ισορροπίας στο $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Το πρόβλημα που εξετάζουμε είναι το εξής: Κάτω από ποιές συνθήκες υπάρχει ανάδραση καταστάσεων $\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$, $\mathbf{k}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, που να σταθεροποιεί το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$, δηλαδή τέτοια ώστε το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ του συστήματος κλειστού βρόγχου: $\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{k}(\mathbf{x}))$ να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Ορισμός: Το σύστημα (*) είναι $\mathcal{C}^1$ -σταθεροποιήσιμο αν υπάρχει $\mathbf{k} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ με $\mathbf{k}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ τέτοιο ώστε το σημείο $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος $\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{k}(\mathbf{x}))$.

Το πρόβλημα της σταθεροποίησης του συστήματος (*) συνδέεται άμεσα με το πρόβλημα της σταθεροποίησης της γραμμικοποίησης του συστήματος. Έστω το γραμμικοποιημένο σύστημα $\Sigma_i(A, B) : \mathbf{x}' = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$, όπου

$$A = (D_1 \mathbf{g})(0, 0) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(0, 0) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B = (D_2 \mathbf{g})(0, 0) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Τότε έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα: Το σύστημα (*) είναι $\mathcal{C}^1$ -σταθεροποιήσιμο αν η γραμμικοποίηση του $\Sigma_i(A, B)$ είναι σταθεροποιήσιμη (δηλαδή υπάρχει $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $A + BF$ να είναι Hurwitz).

Απόδειξη: Έστω ότι το γραμμικοποιημένο σύστημα $\Sigma_i(A, B)$ είναι σταθεροποιήσιμο. Τότε υπάρχει $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$, τέτοιος ώστε ο πίνακας $A + BF$ να είναι Hurwitz. Εφαρμόζοντας την (γραμμική) ανάδραση $\mathbf{u} = F\mathbf{x}$ στο (μή-γραμμικό) σύστημα (*), έχουμε

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \text{όπου } \mathbf{f}(\mathbf{x}) := \mathbf{g}(\mathbf{x}, F\mathbf{x})$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας

$$(D\mathbf{f})(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} (D_1 \mathbf{g})(0, 0) & (D_2 \mathbf{g})(0, 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ F \end{bmatrix} = (D_1 \mathbf{g})(0, 0) + (D_2 \mathbf{g})(0, 0)F = A + BF$$

Από την έμμεση μέθοδο Lyapunov (Θεώρημα ασυμπτωτικής ευστάθειας) συμπεραίνουμε ότι το $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για το σύστημα ανάδρασης. $\square$

Η αντίστροφη συνεπαγωγή του παραπάνω Θεωρήματος δεν ισχύει: Αν το γραμμικοποιημένο σύστημα δεν είναι σταθεροποιήσιμο, αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι το μή-γραμμικό σύστημα δεν είναι $\mathcal{C}^1$ -σταθεροποιήσιμο:

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα:

$$x' = g(x, u) = u(t)x^2(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}, \quad u(t) \in \mathbb{R}$$

Το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad A = \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 2xu|_{(0,0)} = 0, \quad B = \frac{\partial g}{\partial u}(0, 0) = x^2|_{(0,0)} = 0$$

Άρα το γραμμικοποιημένο σύστημα: $x'(t) = 0$ δεν είναι σταθεροποιήσιμο. Όπως θέτοντας $u(t) = -x(t)$, το μη-γραμμικό σύστημα σταθεροποιείται, δηλαδή το σημείο ισορροπίας $x^* = 0$ του συστήματος κλειστού βρόγχου $x'(t) = -x^3(t)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Θεώρημα: Έστω ότι το γραμμικοποιημένο σύστημα

$$\Sigma_i(A, B) := \Sigma_i \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(0, 0), \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) \right)$$

του μη-γραμμικού συστήματος $(*)$ έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(A)$ με θετικό πραγματικό μέρος. Τότε το σύστημα $(*)$ δεν είναι $\mathcal{C}^1$ -σταθεροποιήσιμο.

Απόδειξη: Έστω $\Sigma_i(A, B)$ το γραμμικοποιημένο σύστημα όπως ορίστηκε παραπάνω. Από την υπόθεση υπάρχει ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(A)$ με $\text{Re}(\lambda) > 0$. Έστω $\mathbf{k}$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $\mathbf{k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ με $\mathbf{k}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Θέτοντας $F = (D\mathbf{k})(\mathbf{0}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και ορίζοντας $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ως $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$, έχουμε

$$(D\mathbf{f})(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{u})(D\mathbf{k})(\mathbf{x})$$

και επομένως

$$(D\mathbf{f})(\mathbf{0}) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{0}, \mathbf{0})(D\mathbf{k})(\mathbf{0}) = A + BF$$

Εφόσον $\lambda \in \sigma(A)$, λ μη-ελέγξιμη ιδιοτιμή του πίνακα A μέσω του πίνακα B , τότε $\lambda \in \sigma(A + BF)$ για κάθε $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$, άρα και για τον συγκεκριμένο F που επιλέξαμε. Από την έμμεση μέθοδο Lyapunov (Θεώρημα αστάθειας) συμπεραίνουμε ότι το $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας για το σύστημα ανάδρασης $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{k}(\mathbf{x}))$. Άρα το $(*)$ δεν είναι $\mathcal{C}^1$ -σταθεροποιήσιμο. $\square$

References:

- H. Logemann and E.P. Ryan, Ordinary differential equations: Analysis, Qualitative Theory and Control, Springer-Verlag, London 2014.
- H.K. Khalil, Nonlinear Systems, 3rd Edition, Prentice Hall, New Jersey, USA, 2002.
- J.-J.E. Slotine and W. Li, Applied Nonlinear Control, Prentice Hall, New Jersey, USA 1991.
- G. Meinsma and A. van der Schaft, A Course on Optimal Control, Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology (SUMAT), 2023.

Γ. Χαλικάς, 20-5-2025