Ελεγξιμότητα και Παρατηρησιμότητα

1. Προκαταρκτικά

1.1 Θετικά ορισμένοι/ημι-ορισμένοι πίνακες

Ορισμός: Έστω $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ο P είναι θετικά ορισμένος (θετικά ημι-ορισμένος), $P \succ 0$ ($P \succeq 0$) αν η τετραγωνική μορφή $x^T P x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ ($x^T P x \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$). Παρόμοια ορίζουμε αρνητικά ορισμένους (ημι-ορισμένους) πίνακες: $P \prec 0 \Leftrightarrow -P \succ 0$ ($P \preceq 0 \Leftrightarrow -P \succeq 0$).

Παρατήρηση: Αν $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P \succ 0$ ($P \succeq 0$), τότε χωρίς βλάβη γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $P = P^T$. Πράγματι,

$$x^T P x = x^T \left[\frac{1}{2}(P + P^T) + \frac{1}{2}(P - P^T)\right] x$$

όπου ο πίνακας $P + P^T$ ($P - P^T$), είναι συμμετρικός (αντι-συμμετρικός). Επομένως,

$$x^T P x = x^T \left(\frac{P + P^T}{2}\right) x \quad \text{για κάθε } \ x \in \mathbb{R}^n$$

και επομένως $P \succ 0 \Leftrightarrow P + P^T \succ 0$ (αντίστοιχα $P \succeq 0 \Leftrightarrow P + P^T \succeq 0$). Στο εξής ορίζουμε:

$$S_+^n = \{P \in \mathbb{R}^n : P = P^T \succ 0\}, \ \ \bar{S}_+^n = \{P \in \mathbb{R}^n : P = P^T \succeq 0\}, \ \ S^n = \{P \in \mathbb{R}^n : P = P^T\}$$

και έχουμε: $S_+^n \subseteq \bar{S}_+^n \subseteq S^n$, δηλαδή υποθέτουμε ότι θετικά ορισμένοι και ημι-ορισμένοι πίνακες (όπως και αρνητικά ορισμένοι και ημι-ορισμένοι) είναι αυτόματα συμμετρικοί.

Ιδιότητες:

$I_1:$ S_+^n και $\bar{S}_+^n$ είναι κυρτοί κώνοι στον $\mathbb{R}^{n\times n}$, δηλαδή:

$$I_1(a): \ P_1, P_2 \in S_+^n \Rightarrow \lambda P_1 + (1-\lambda)P_2 \in S_+^n \ \forall\, \lambda \in [0,1], \quad P \in S_+^n \Rightarrow \lambda P \in S_+^n \ \forall\, \lambda > 0$$
$$I_1(b): \ P_1, P_2 \in \bar{S}_+^n \Rightarrow \lambda P_1 + (1-\lambda)P_2 \in \bar{S}_+^n \ \forall\, \lambda \in [0,1], \quad P \in \bar{S}_+^n \Rightarrow \lambda P \in \bar{S}_+^n \ \forall\, \lambda \geq 0.$$

$I_2:$ Έστω $P \in S^n$. Τότε $P \in S_+^n \Leftrightarrow \lambda_i(P) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$: *Απόδειξη:* Εφόσον $P = P^T$ έχουμε $P = U\Lambda U^T$, $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, και μπορούμε να επιλέξουμε $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $UU^T = U^T U = I_n$. Έστω ότι $\lambda_j \leq 0$ για κάποιο $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Τότε, αν u_j η j-στήλη του U και συμβολίζοντας με e_j την j-στήλη του I_n, θα είχαμε ότι:

$$u_j^T P u_j = u_j^T U \Lambda U^T u_j = e_j^T \Lambda e_j = \lambda_j \leq 0$$

άτοπο, αφού $\|u_j\| = 1 \Rightarrow u_j \neq 0$. Αντίστροφα, αν $P = P^T$ έχει θετικές ιδιοτιμές: $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, τότε

$$x^T P x = x^T U \Lambda U^T x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|U^T x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|x\|^2 > 0 \ \text{ αν } \ x \neq 0$$

και άρα $P \succ 0$. Παρόμοια μπορούμε να δείξουμε ότι αν $P \in S^n$, τότε $P \succeq 0 \Leftrightarrow \lambda_i(P) \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

$I_3:$ Έστω $P \in S^n$. Τότε οι παρακάτω τρείς προτάσεις είναι ισοδύναμες: (α) $P \in S_+^n$. (β) $\det(E_i^T P E_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, όπου E_i ο πίνακας που ορίζεται από τις i-πρώτες στήλες του μοναδιαίου πίνακα I_n. (γ) $P = U^T U$ (παραγοντοποίηση Cholesky), $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$, U άνω τριγωνικός με θετικά διαγώνια στοιχεία.

Απόδειξη: (γ) $\Rightarrow$ (α): Η ορίζουσα του πίνακα U είναι θετική ως το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του και άρα ο U είναι μη-ιδιάζων. Αν $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, τότε $x^T P x = x^T U^T U x = \|Ux\|^2 > 0$ και επομένως $P \in \mathcal{S}_+^n$.

(α) $\Rightarrow$ (β): Γιά $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ γράφουμε:

$$P = \begin{bmatrix} E_i^T \\ \hat{E}_i^T \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} E_i & \hat{E}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_i^T P E_i & E_i^T P \hat{E}_i \\ \hat{E}_i^T P E_i & \hat{E}_i^T P \hat{E}_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

όπου $[E_i \mid \hat{E}_i] = I_n$. Έστω $y \in \mathbb{R}^i$, $y \neq 0$. Εφόσον $P = P^T \succ 0$,

$$\begin{bmatrix} y^T & 0^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i^T P E_i & E_i^T P \hat{E}_i \\ \hat{E}_i^T P E_i & \hat{E}_i^T P \hat{E}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} > 0 \Rightarrow y^T E_i^T P E_i y > 0$$

Εφόσον y αυθαίρετο, $E_i^T P E_i \succ 0$ και επομένως $\lambda_j(E_i^T P E_i) > 0$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, i$. Επομένως, $\prod_{j=1}^{i} \lambda_j(E_i^T P E_i) = \det(E_i^T P E_i) > 0$. Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. (*Παρατήρηση:* Αν $P \in \mathcal{S}$ ισχύει ότι $P \in \bar{\mathcal{S}}_+^n$ αν και μόνο αν όλες οι $2^n - 1$ κύριες ελάσσονες ορίζουσες (principal minor determinants) του πίνακα P είναι μη-αρνητικές).

(β) $\Rightarrow$ (γ): Η απόδειξη είναι με επαγωγή ως προς την διάσταση n του πίνακα P. Αν $n = 1$, $A > 0$ από το (β) και η συνεπαγωγή ισχύει αν θέσουμε $U = \sqrt{A}$. Έστω ότι η συνεπαγωγή ισχύει για τετραγωνικούς πίνακες διάστασης $n-1$. Έστω $P \in \mathcal{S}^n$ με $\det(E_i^T P E_i) > 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Ορίζουμε επίσης πίνακα $Q = E_{n-1}^T P E_{n-1} \in \mathcal{S}^{n-1}$. Από την επαγωγική υπόθεση $Q = U^T U$, $U \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ και άνω τριγωνικός πίνακας με θετικά διαγώνια στοιχεία. Ο πίνακας P είναι της μορφής:

$$P = \begin{bmatrix} Q & p \\ p^T & q \end{bmatrix}, \quad p \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad q \in \mathbb{R}$$

Τότε

$$P = \begin{bmatrix} U^T U & p \\ p^T & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^T & 0 \\ p^T U^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & U^{-T} p \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{όπου} \quad c = q - (U^{-T} p)^T (U^{-T} p)$$

Επομένως, από την ανισότητα $\det(E_i^T P E_i) > 0$ για $i = n$:

$$\det(P) = c \det U^T \det U = c(\det(U))^2 > 0 \Rightarrow c > 0$$

Γράφουμε:

$$P = \begin{bmatrix} U^T & 0 \\ p^T U^{-1} & \sqrt{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & U^{-T} p \\ 0 & \sqrt{c} \end{bmatrix}$$

που είναι η επιθυμητή παραγοντοποίηση Cholesky για πίνακες διάστασης n.

I_4 : Έστω $P \in \bar{\mathcal{S}}_+^n$. Τότε $x^T P x = 0 \Leftrightarrow Px = 0$: *Απόδειξη*: Η αριστερή συνεπαγωγή είναι προφανής. Έστω $x^T P x = 0$ για κάποιον πίνακα $P \in \mathcal{S}^n$, $P \succeq 0$. Γράφουμε $P = U \mathrm{diag}\{\Lambda_1, 0\} U^T$ όπου $\Lambda_1 = \mathrm{diag}(\Lambda_1) \succ 0$ και $UU^T = U^T U = I_n$. Έστω $U = [U_1 \mid U_2]$, $U_1 = \mathbb{R}^{n \times r}$, $r = \mathrm{rank}(P)$. Τότε $Px = 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{R}(U_2)$. Επίσης $P = U_1 \Lambda_1 U_1^T = U_1 \Lambda_1^{1/2} U_1^T U_1 \Lambda_1^{1/2} U_1^T = P^{1/2} P^{1/2}$ όπου $P^{1/2} := U_1 \Lambda_1^{1/2} U_1^T = (P^{1/2})^T \succeq 0$, $\Lambda_1^{1/2} = \mathrm{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\}$. Επομένως $x^T P x = 0 \Leftrightarrow \|P^{1/2} x\| = 0 \Leftrightarrow P^{1/2} x = 0 \Rightarrow Px = 0$.

I_5 : Αν $P(t) = \int_0^t Q(\tau) Q^T(\tau) d\tau$, $t > 0$ και $Q \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times m})$, τότε $P(t) = P^T(t) \succeq 0$ και $x^T P(t) x = \int_0^t \|Q^T(\tau) x\|^2 d\tau$. Επομένως $x^T P(t) x = 0 \Leftrightarrow Q^T x(\tau) = 0$ για κάθε $\tau \in [0\ t]$ λόγω συνέχειας. Επίσης $t_2 \geq t_1 \Rightarrow P(t_2) \succeq P(t_1)$ (που εξ΄ορισμού σημαίνει ότι $P(t_2) - P(t_1) \succeq 0$).

I_6 : Έστω

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{S}^n$$

όπου $P_{11} \in \mathcal{S}^m$ και $P_{11} \in \mathcal{S}^{n-m}$. Τότε: $P \succ 0 \Leftrightarrow (P_{22} \succ 0$ και $P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^T \succ 0)$. Ο πίνακας $P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^T$ λέγεται συμπλήρωμα Schur του P_{22}. *Απόδειξη:* Εφόσον $P \in \mathcal{S}_+^n$, τότε $P_{11} \in \mathcal{S}_+^m$ και $P_{22} \in \mathcal{S}_+^{n-m}$. Επίσης αν $X \in \mathbb{R}^{m,(n-m)}$:

$$\begin{bmatrix} I_m & X \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ X^T & I_{n-m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} + XP_{12}^T + P_{12}X^T + XP_{22}X^T & P_{12} + XP_{22} \\ P_{12}^T + P_{22}X^T & P_{22} \end{bmatrix}$$

που είναι συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας. Επιλέγοντας $X = -P_{12}P_{22}^{-1}$ έχουμε:

$$\begin{bmatrix} P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^T & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_+^n \Rightarrow (P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^T \in \mathcal{S}_+^m \text{ και } P_{22} \in \mathcal{S}_+^{n-m})$$

Αντιστρέφοντας την σειρά των συνεπαγωγών αποδεικνύει το αντίστροφο αποτέλεσμα.

1.2 Θεώρημα Cauley-Hamilton

Θεώρημα: Κάθε πίνακας ικανοποιεί την χαρακτηριστική του εξίσωση, δηλ. αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n \ \Rightarrow\ \phi(A) = a_0I_n + a_1A + \ldots + a_nA^n = 0$$

Απόδειξη: Έστω $B(\lambda) = \mathrm{adj}(A - \lambda I_n)$. Τότε $\partial B_{ij}(\lambda) \leq n-1$ για κάθε $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Έστω ότι

$$B(\lambda) = B_0 + B_1\lambda + \ldots + B_{n-1}\lambda^{n-1},\ B_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

. Επομένως:

$$(A - \lambda I_n)B(\lambda) = \phi(\lambda)I_n \Rightarrow (A - \lambda I_n)(B_0 + B_1\lambda + \ldots + B_{n-1}\lambda^{n-1}) = (a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n)I_n$$

Ισοδύναμα:

$$AB_0 + (AB_1 - B_0)\lambda + (AB - 2 - B_1)\lambda^2 + \ldots + (AB_{n-1} - B_{n-2})\lambda^{n-1} - B_{n-1}\lambda^n = (a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n)I_n$$

Εξισώνοντας τους πολυωνυμικούς όρους και πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις με $A^n, A^{n-1}, \ldots, I$, αντίστοιχα:

$$\left.\begin{aligned} -B_{n-1} &= a_nI_n \\ AB_{n-1} - B_{n-2} &= a_{n-1}I_n \\ &\vdots \\ AB_1 - B_0 &= a_1I_n \\ AB_0 &= a_0I_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -A^nB_{n-1} &= a_nA^n \\ A^nB_{n-1} - A^{n-1}B_{n-2} &= a_{n-1}A^{n-1} \\ &\vdots \\ A^2B_1 - AB_0 &= a_1A \\ AB_0 &= a_0I_n \end{aligned}\right\}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $\phi(A) = 0$. □

Πόρισμα: Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε $A^k \in < I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1} >$ για $k \geq n$.

1.3 A-αναλλοίωτοι υπόχωροι

Ορισμός: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ένας υπόχωρος $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι A-αναλλοίωτος (συμβολισμός: $A\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$) αν $x \in \mathcal{V} \Rightarrow Ax \in \mathcal{V}$.

Παραδείγματα: (i) $\mathcal{N}_r(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$. (ii) $\mathcal{R}(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$. (iii) $\mathcal{N}_r(A^m) = \{x \in \mathbb{R}^n : A^mx = 0\}$. (iv) $\mathcal{R}(A^m) = \{A^mx : x \in \mathbb{R}^n\}$. (v) Έστω $J_n(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}$

πίνακας Jordan με ιδιοτιμή λ. Ο υπόχωρος $\mathcal{M} =< e_1, e_2, \ldots, e_k >$, $1 \leq k \leq n$, όπου e_k η k-στήλη του μοναδιαίου πίνακα I_n, είναι $J_n(\lambda)$-αναλλόιωτος. (v) Έστω $A = \lambda I$ και $\mathcal{V}$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Τότε ο $\mathcal{V}$ είναι A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. (vi) Έστω $A = \mathrm{diag}\{A_1, A_2\}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Τότε $\mathcal{M}_1 =< e_1 >$, $\mathcal{M}_2 =< e_1, e_2 >$ είναι A-αναλλοίωτοι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$. (vii) Έστω $\{v_i\}_{i=1}^m$ σύνολο (δεξιών) ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε ο υπόχωρος $< v_1, v_2, \ldots v_m >$ είναι A-αναλλοίωτος. (vii) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ block-τριγωνικός:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \;\; A_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}, \;\; r < n \;\; \text{και} \;\; \mathcal{V} = \left\{ \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R}^r \right\}$$

Τότε ο υπόχωρος $\mathcal{V}$ είναι A-αναλλοίωτος.

Πρόταση: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\mathcal{V}$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ με βάση $\{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$. Τότε ο $\mathcal{V}$ είναι A-αναλλοίωτος αν και μόνο αν $Av_i \in \mathcal{V}$ για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$): Κατευθείαν από τον ορισμό. ($\Leftarrow$): Έστω $x \in \mathcal{V}$. Το x γράφεται (μονοσήμαντα) ως γραμμικός συνδιασμός των $\{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$, δηλαδή $x = \sum_{i=1}^d \alpha_i v_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Τότε $Ax = \sum_{i=1}^d \alpha_i (Av_i)$ και επομένως $Ax \in \mathcal{V}$ αφού $Av_i \in \mathcal{V}$. Αρα ο $\mathcal{V}$ είναι A-αναλλοίωτος. $\square$

Έστω $\mathcal{V}$ A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Έστω

$$M = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_{k-1} & t_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times k}, \;\; \mathcal{V} = \mathcal{R}(M) =< t_1, t_2, \ldots, t_k >$$

Εφόσον $At_1 \in \mathcal{V}$ μπορούμε να γράψουμε:

$$At_1 = x_{11}t_1 + x_{21}t_2 + \ldots + x_{k1}t_k = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{k1} \end{bmatrix}$$

και γενικά

$$AM = A \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kk} \end{bmatrix} := MX$$

δηλαδή αν $\mathcal{R}(M)$ είναι A-αναλλοιωτος υπόχωρος, τότε υπάρχει πίνακας X τέτοιος ώστε $AM = MX$. Το αντίστροφο ισχύει επίσης: Αν $AM = MX$ για κάποιον πίνακα X, τότε $\mathcal{R}(M)$ είναι A-αναλλοίωτος υπόχωρος.

Έστω ότι $\mathrm{Rank}(M) = k$, δηλαδή $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ βάση του $\mathcal{V}$. Τότε κάθε ιδιοτιμή του $X \in \mathbb{R}^{k\times k}$ είναι ιδιοτιμή του A και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα ανήκει στον $\mathcal{V}$: Αν $Xu = \lambda u$, $u \neq 0$, τότε $Mu \neq 0$ και $A(Mu) = M(Xu) = \lambda(Mu)$ και άρα $\lambda \in \sigma(A)$. Γενικότερα, αν $AM = MX$ τότε $X = A|_{\mathcal{R}(M)}$ και οι πίνακες A και M έχουν (τουλάχιστον) $\mathrm{Rank}(M)$ κοινές ιδιοτιμές.

Πρόταση: Έστω $x' = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε ο $\mathcal{V}$ είναι A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν $x(0) \in \mathcal{V} \Rightarrow x(t) \in \mathcal{V}$ για κάθε $t \geq 0$.

1.4 Εικόνα και μηδενόχωρος συμμετρικού, θετικά-ημιορισμένου πίνακα

Το παρακάτω αποέλεσμα είναι χρήσιμο στην απόδειξη ιδιοτήτων ελεγξιμότητας που περιλαμβάνεται στην επόμενη ενότητα.

Λήμμα: Έστω $W_c \in \bar{\mathcal{S}}_+^n$, $W_c \notin \mathcal{S}_+^n$. Τότε ο πίνακας W_c γράφεται ως:

$$W_c = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0_{n-m,n-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} = U_1 \Lambda U_1^T, \ \Lambda = \mathrm{diag}(\Lambda) \succ 0$$

όπου

$$\begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix}, \ U_1 U_1^T + U_2 U_2^T = I_n$$

και όπου $m = \mathrm{Rank}(W_c)$. Τότε: (α) $\mathcal{R}(W_c) = \mathcal{R}(U_1)$ και οι στήλες του U_1 είναι ορθογώνια βάση του $\mathcal{R}(W_c)$. (β) $\mathrm{Ker}(W_c) = \mathcal{R}(U_2)$ και οι στήλες του U_2 είναι ορθογώνια βάση του $\mathrm{Ker}(W_c)$. (γ) $\mathcal{R}(W_c) \oplus \mathrm{Ker}(W_c) = \mathbb{R}^n$. (δ) $\mathcal{R}(W_c)^\perp = \mathrm{Ker}(W_c)$.

Απόδειξη: Η μορφή γινομένου του πίνακα W_c στην διατύπωση του Λήμματος είναι η φασματική του αποσύνθεση (spectral decomposition).

(α) Έστω $x \in \mathcal{R}(W_c)$. Τότε $x = W_c \theta$ για κάποιο $\theta \in \mathbb{R}^n$ και άρα,

$$x = U_1 \Lambda U_1^T \theta = U_1(\Lambda U_1^T \theta) \in \mathcal{R}(U_1) \Rightarrow \mathcal{R}(W_c) \subseteq \mathcal{R}(U_1)$$

Αντίστροφα, αν $x \in \mathcal{R}(U_1)$, τότε $x = U_1 \theta$ για κάποιο $\theta \in \mathbb{R}^m$ και

$$x = U_1 \Lambda \Lambda^{-1} \theta = (U_1 \Lambda U_1^T) U_1 \Lambda^{-1} \theta = W_c(U_1 \Lambda^{-1} \theta) \Rightarrow x \in \mathcal{R}(W_c) \Rightarrow \mathcal{R}(U_1) \subseteq \mathcal{R}(W_c)$$

Επομένως $\mathcal{R}(W_c) = \mathcal{R}(U_1)$. Εφόσον ο πίνακας $[U_1 \ U_2]$ είναι ορθογώνιος, οι στήλες του U_1 είναι ορθογώνια βάση του $\mathcal{R}(W_c)$.

(β) Έστω $x \in \mathcal{R}(U_2)$. Τότε $x = U_2 \theta$ για κάποιο $\theta \in \mathbb{R}^{n-m}$, και

$$W_c x = U_1 \Lambda U_1^T U_2 \theta = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(W_c) \Rightarrow \mathcal{R}(U_2) \subseteq \mathrm{Ker}(W_c)$$

Αντίστροφα, έστω $x \in \mathrm{Ker}(W_c)$. Τότε $W_c x = U_1 \Lambda U_1^T x = 0$. Γράφουμε $x = U_1 \theta_1 + U_2 \theta_2$ όπου $\theta_1 \in \mathbb{R}^m$ και $\theta_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$. Τότε:

$$W_c x = U_1 \Lambda U_1^T (U_1 \theta_1 + U_2 \theta_2) = 0 \Rightarrow U_1 \Lambda \theta_1 = 0 \Rightarrow \Lambda^{-1} U_1^T U_1 \Lambda \theta_1 = 0 \Rightarrow \theta_1 = 0$$

Άρα $x = U_2 \theta_2$ και επομένως $x \in \mathcal{R}(U_2) \Rightarrow \mathrm{Ker}(W_c) \subseteq \mathcal{R}(U_2)$. Επομένως $\mathrm{Ker}(W_c) = \mathcal{R}(U_2)$.

(γ) Εφόσον $[U_1 \ U_2]$ ορθογώνιος,

$$\mathcal{R}(U_1) \oplus \mathcal{R}(U_2) = \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathcal{R}(W_c) \oplus \mathrm{Ker}(W_c) = \mathbb{R}^n$$

(δ) Εφόσον $U_2^T U_1 = 0$, $\mathcal{R}(U_2) \perp \mathcal{R}(U_1) \Rightarrow \mathcal{R}(W_c)^\perp = \mathrm{Ker}(W_c)$.

2. Ελεγξιμότητα

Έστω το σύστημα $\Sigma_i(A,B) : x' = Ax + Bu$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$,

Ορισμός: Το διάνυσμα κατάστασης $x_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ελέγξιμο αν υπάρχει $t_1 > 0$ (πεπερασμένο) και $u \in C([0,t_1], \mathbb{R}^m)$ που μεταφέρει το διάνυσμα κατάστασης $x(0) = x_0$ στο διάνυσμα κατάστασης $x(t_1) = 0$. Αν κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ελέγξιμο διάνυσμα κατάστασης τότε λέμε ότι το σύστημα $\Sigma_i(A,B)$ είναι (πλήρως) ελέγξιμο.

Παρατήρηση: Επιλέγουμε το t_1 ως πεπερασμένο για να διαχωρίσουμε τις έννοιες της ελεγξιμότητας και ασυμπτωτικής ευστάθειας. Αν επιτρέπαμε $t_1 = \infty$, τότε αν ο πίνακας A ήταν Hurwitz, το σύστημα $\Sigma_i(A,B)$ θα ήταν πλήρως ελέγξιμο, ακόμα και αν $B = 0$.

Έστω ότι η κατάσταση x_0 είναι ελέγξιμη. Τότε υπάρχει $t_1 > 0$ και $u \in C([0,t_1],\mathbb{R}^m)$ τέτοια ώστε

$$0 = e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau \Rightarrow -x_0 = \int_0^{t_1} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

Ορίζουμε τον γραμμικό τελεστή

$$L_c(0,t_1) : C([0,t_1],\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n,\ \ L_c(0,t_1)u = \int_0^{t_1} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

Τότε η κατάσταση x_0 είναι ελέγξιμη αν και μόνο αν $x_0 \in \mathcal{R}[L_c(0,t_1)]$ για κάποιο $t_1 > 0$. Το σύνολο των ελέγξιμων καταστάσεων:

$$\mathcal{X}_c = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : x_0 \in \mathcal{R}[L_c(0,t_1)],\ t_1 \in (0,\infty)\}$$

είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Το σύστημα $\Sigma_i(A,B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\mathcal{X}_c = \mathbb{R}^n$.

Ορίζουμε την Gramian ελεγξιμότητας του συστήματος:

$$W_c(0,t_1) = \int_0^{t_1} e^{-A\tau}BB^Te^{-A^T\tau}d\tau \quad (t_1 > 0)$$

για την οποία ισχύει ότι $W_c(0,t_1) = W_c^T(0,t_1) \succeq 0$ για κάθε $t_1 > 0$. Ορίζουμε επίσης τον πίνακα ελεγξιμότητας:

$$\Gamma_c = \left[\begin{array}{ccccc} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n\times nm}$$

Θεώρημα: Γιά κάθε $t_1 > 0$ έχουμε: $\mathcal{X}_c = \mathcal{R}[L_c(0,t_1)] = \mathcal{R}[W_c(0,t_1)] = \mathcal{R}(\Gamma_c)$.

Απόδειξη: (i) Αποδεικνύεται πρώτα ότι $\mathcal{R}[L_c(0,t_1)] = \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]$. Έχουμε:

$$L_c(0,t_1)u = \int_0^{t_1} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

Ορίζουμε συνάρτηση εισόδου: $u(\tau) = B^Te^{-A^T\tau}\xi \in C([0,t_1],\mathbb{R}^m)$ όπου $\xi \in \mathbb{R}^n$ αυθαίρετο διάνυσμα. Τότε:

$$L_c(0,t_1)u = \int_0^{t_1} e^{-A\tau}BB^Te^{-A^T\tau}d\tau \cdot \xi = W_c(0,t_1)\xi$$

και επομένως (εφόσον ξ αυθαίρετο), $\mathcal{R}[W_c(0,t_1)] \subseteq \mathcal{R}[L_c(0,t_1)]$.

Αντίστροφα, έστω ότι $x_0 \in \mathcal{R}[L_c(0,t_1)]$. Τότε υπάρχει $u \in C([0,t_1],\mathbb{R}^m)$ τέτοια ώστε $L_c(0,t_1)u = x_0$. Καθώς $W_c(0,t_1) = W_c^T(0,t_1) \succeq 0$ έχουμε (δείτε Λήμμα στην ενότητα 1.4) ότι

$$\mathcal{R}[W_c(0,t_1)] \oplus \mathcal{N}[W_c(0,t_1)] = \mathbb{R}^n \ \text{ και } \ \mathcal{N}[W_c(0,t_1)] = \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]^\perp$$

Επομένως το x_0 γράφεται (κατά μοναδικό τρόπο) ως:

$$x_0 = x_c + x_n,\ \ x_c \in \mathcal{R}[W_c(0,t_1)],\ \ x_n \in \mathcal{N}[W_c(0,t_1)]$$

Έχουμε:

$$W_c(0,t_1)x_n = 0 \Rightarrow x_n^TW_c(0,t_1)x_n = 0 \Rightarrow \int_0^{t_1} x_n^Te^{-A\tau}BB^Te^{-A^T\tau}x_nd\tau = 0$$
$$\Rightarrow \int_0^{t_1} \|x_n^Te^{-A\tau}B\|^2d\tau = 0$$

και επομένως (λόγω συνέχειας) συμπεραίνουμε ότι:

$$x_n^Te^{-A\tau}B = 0 \ \text{ για κάθε } \ \tau \in [0,t_1]$$

Επίσης:

$$\mathcal{N}[W_c(0,t_1)] = \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]^{\perp} \Rightarrow x_n^T x_c = 0$$

και επομένως:

$$x_n^T x_0 = x_n^T(x_c + x_n) = \|x_n\|^2 \Rightarrow x_n^T L_c(0,t_1)u = \|x_n\|^2 \Rightarrow \int_0^{t_1} x_n^T e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau = \|x_n\|^2 = 0$$

(αφού $x_n^T e^{-A\tau}B \equiv 0$ στο διάστημα $[0,t_1]$). Επομένως $x_n = 0$ και $x_0 = x_c \in \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]$. Άρα $\mathcal{R}[L_c(0,t_1)] \subseteq \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]$ και από το πρώτο μέρος $\mathcal{R}[L_c(0,t_1)] = \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]$.

(ii) Σε αυτό το βήμα της απόδειξης θα δείξουμε ότι για κάθε $t_1 > 0$ έχουμε $\mathcal{R}[W_c(0,t_1)] = \mathcal{R}[\Gamma_c]$. Αρχικά θα δείξουμε ότι $\mathcal{R}[W_c(0,t_1)] \subseteq \mathcal{R}[\Gamma_c]$: Έστω $x_0 \in \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]$. Τότε από το (i) $x_0 \in \mathcal{R}[L_c(0,t_1)]$, άρα υπάρχει $u \in C([0,t_1],\mathbb{R}^m)$ τ.ω.

$$x_0 = \int_0^{t_1} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

Από το Θεώρημα Cauley-Hamilton (δείτε ενότητα 1.2), $A^n \in < I, A, \ldots, A^{n-1} >$ και άρα

$$e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1}\beta_k(\tau)A^k \quad \Rightarrow \quad x_0 = \int_0^{t_1}\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k(\tau)A^kBu(\tau)d\tau = \sum_{k=0}^{n-1}A^kB\int_0^{t_1}\beta_k(\tau)u(\tau)d\tau$$

Θέτοντας

$$\alpha_k(t_1) = \int_0^{t_1}\beta_k(\tau)u(\tau)d\tau, \;\; k = 0,1,\ldots,n-1$$

έχουμε:

$$x_0 = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(t_1)A^kB = \left[\begin{array}{ccccc} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \alpha_0(t_1) \\ \alpha_1(t_1) \\ \alpha_2(t_1) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t_1) \end{array}\right]$$

και άρα $x_0 \in \mathcal{R}(\Gamma_c) \Rightarrow \mathcal{R}[W_c(0,t_1)] \subseteq \mathcal{R}[\Gamma_c]$.

Αντίστροφα, θα δείξουμε ότι: $\mathcal{R}[\Gamma_c] \subseteq \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]$ (για κάθε $t_1 > 0$): Έστω $x_0 \in \mathcal{R}(\Gamma_c)$. Τότε $x_0 = \Gamma_c\eta$, $\eta \in \mathbb{R}^{nm}$. Υποθέτουμε (για αντίφαση) ότι $x_0 \notin \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]$. Τότε $x_0 = x_c + x_n$, $x_c \in \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]$, $x_n \in \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]^{\perp}$, $x_n \neq 0$. Έχουμε (παρόμοια με προηγούμενο μέρος της απόδειξης):

$$W_c(0,t_1)x_n = 0 \Rightarrow x_n^T W_c(0,t_1)x_n = 0 \Rightarrow \int_0^{t_1} x_n^T e^{-A\tau}BB^Te^{-A^T\tau}x_n d\tau = 0$$

Επομένως

$$\int_0^{t_1}\|x_n^Te^{-A\tau}B\|^2 d\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad x_n^Te^{-A\tau}B = 0 \;\forall\; \tau \in [0,t_1] \;\; \Rightarrow \;\; x_n^Te^{-A\tau}B\big|_{\tau=0} = x_n^TB = 0$$

Παραγωγίζοντας την ταυτότητα αυτή έχουμε:

$$(x_n^Te^{-A\tau}B)'|_{\tau=0} = 0 \;\; \Rightarrow x_n^Te^{-A\tau}(-A)B\big|_{\tau=0} = 0 \;\; \Rightarrow x_n^TAB = 0$$

και επαγωγικά:

$$x_n^Te^{-A\tau}A^kB|_{\tau=0} = (-1)^kx_n^TA^kB = 0, \;\; k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

Επομένως

$$x_n^TB = x_n^TAB = \ldots = x_n^TA^{n-1}B = 0 \Rightarrow x_n^T\left[\begin{array}{ccccc} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{array}\right] = x_n^T\Gamma_c = 0$$

και άρα

$$x_n^T \Gamma_c \eta = 0 \Rightarrow x_n^T x_0 = 0 \Rightarrow x_n^T (x_c + x_n) = 0 \Rightarrow \|x_n\|^2 = 0 \Rightarrow x_n = 0 \;\text{ αφού }\; x_n^T x_c = 0$$

πού αντιβαίνει στην προηγούμενη υπόθεση ότι $x_n \neq 0$. Επομένως $\mathcal{R}(\Gamma_c) \subseteq \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]$ που μαζί με τον αντίστροφο εγκλεισμό συνεπάγεται ότι $\mathcal{R}(\Gamma_c) = \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]$. □

Παρατήρηση: Παρατηρούμε ότι $\mathcal{R}[L_c(0,t_1)] = \mathcal{R}[W_c(0,t_1)] = \mathcal{R}(\Gamma_c)$ ανεξάρτητα από την επιλογή της (θετικής) παραμέτρου t_1 και επομένως ο ελέγξιμος υπόχωρος $\mathcal{X}_c$ δεν εξαρτάται από το t_1.

Παρατήρηση: Στην βιβλιογραφία πολλές φορές διακρίνεται η έννοια της ελεγξιμότητας (controllability) από την έννοια της προσβασιμότητας (reachability), η ισοδύναμα η έννοια ελεγξιμότητας *προς* την μηδενική κατάσταση από την έννοια ελεγξιμότητας *από* την μηδενική κατάσταση. Για συστήματα συνεχούς χρόνου τα οποία εξετάζουμε οι δύο έννοιες είναι ισοδύναμες.

Θεώρημα: $\mathcal{X}_c = \mathcal{R}(\Gamma_c)$ είναι ο μικρότερος A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το $\mathcal{R}(B)$.

Απόδειξη: Ότι $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{X}_c$ είναι προφανές (εφόσον οι στήλες του πίνακα B είναι οι m πρώτες στήλες του Γ_c). Έστω $x \in \mathcal{X}_c$. Τότε υπάρχει $y \in \mathbb{R}^{mn}$ τέτοιο ώστε $x = \Gamma_c y$. Έχουμε

$$Ax = A \left[\begin{array}{cccc} B & AB & \cdots & A^{n-2}B & A^{n-1}B \end{array}\right] y = \left[\begin{array}{ccccc} AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B & A^nB \end{array}\right] y$$

Οι στήλες των πινάκων $AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B$ είναι στήλες του Γ_c. Οι στήλες του πίνακα A^nB είναι γραμμικοί συνδιασμοί στηλών του Γ_c (Cauley-Hamilton) και επομένως $Ax \in \mathcal{X}_c$, δηλαδή $A\mathcal{X}_c \subseteq \mathcal{X}_c$.

Υποθέτουμε ότι $\mathcal{V}$ είναι επίσης A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ τ.ω. $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{X}_c$. Τότε οι στήλες του B είναι στον $\mathcal{V}$. Εφόσον ο $\mathcal{V}$ είναι A-αναλλοίωτος, οι στήλες του AB είναι στον $\mathcal{V}$, και με το ίδιο σκεπτικό το ίδιο ισχύει και για τις στήλες των $A^2B,\ A^3B, \ldots, A^{n-1}B$. Συμπεραίνουμε ότι οι στήλες του Γ_c είναι στον $\mathcal{V}$ που συνεπάγεται ότι $\mathcal{X}_c \subseteq \mathcal{V}$. Άρα ο $\mathcal{X}_c$ είναι ο μικρότερος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το $\mathcal{R}(B)$. □

Λήμμα (Kalman): Έστω $\Sigma_i(A,B)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, που δεν είναι πλήρως ελέγξιμο. Τότε υπάρχει $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(Q) \neq 0$, τέτοιος ώστε: $\Sigma_i(A,B) \sim \Sigma_i(\hat{A},\hat{B})$, όπου

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \left[\begin{array}{cc} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{array}\right],\ \ \hat{B} = Q^{-1}B = \left[\begin{array}{c} \hat{B}_1 \\ 0 \end{array}\right]$$

όπου $\hat{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n_c\times n_c}$, $\hat{B}_1 \in \mathbb{R}^{n_c\times m}$, $n_c = \mathrm{Rank}(\Gamma_c)$, όπου $\Gamma_c = [B\ \ AB\ \ \ldots\ \ A^{n-1}B]$ ο πίνακας ελεγξιμότητας και όπου $\Sigma_i(\hat{A}_{11},\hat{B}_1)$ πλήρως ελέγξιμο.

Απόδειξη: Έστω $n_c = \mathrm{Rank}(\Gamma_c) < n$. Ορίζουμε τον πίνακα:

$$Q = [Q_1 \mid Q_2] \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \ Q_1 = [v_1\ v_2\ \ldots v_{n_c}] \in \mathbb{R}^{n\times n_c}$$

όπου $\{v_i\}_{i=1}^{n_c}$ βάση του $\mathcal{X}_c = \mathcal{R}(\Gamma_c)$ και $\det Q \neq 0$ (δηλαδή οι στήλες του Q_2 συμπληρώνουν την βάση του $\mathcal{X}_c$ στον $\mathbb{R}^n$). Θα δείξουμε ότι $Q\hat{A} = AQ$ και $B = Q\hat{B}$, δηλαδή

$$[v_1\ v_2\ \ldots\ v_{n_c}|Q_2] \left[\begin{array}{cc} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{array}\right] = A[v_1\ v_2\ \ldots\ v_{n_c}|Q_2], \quad B = [v_1\ v_2\ \ldots\ v_{n_c}|Q_2] \left[\begin{array}{c} \hat{B}_1 \\ 0 \end{array}\right]$$

Εφόσον $\mathcal{R}(Q_1) = \mathcal{R}(\Gamma_c) = \mathcal{R}([B\ \ AB\ \ \ldots\ \ A^{n-1}B])$, ο υπόχωρος $\mathcal{R}(Q_1)$ είναι A-αναλλοίωτος και επομένως $Av_i \in \mathcal{R}(Q_1)$, $i = 1,2,\ldots,n_c$. Επομένως, κάθε μία απο τις n_c στήλες του πίνακα AQ_1 γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός των $\{v_i\}_{i=1}^{n_c}$, δηλαδή $AQ_1 = Q_1\hat{A}_{11}$ για κάποιον πίνακα $\hat{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n_c\times n_c}$. Επίσης, εφόσον $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(\Gamma_c) = \mathcal{R}(Q_1)$ κάθε στήλη του B γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός των $\{v_i\}_{i=1}^{n_c}$ μέσω των αντίστοιχων στοιχείων κάθε στήλης του $\hat{B}_1$.

Ο πίνακας ελεγξιμότητας του συστήματος $\Sigma_i(\hat{A},\hat{B})$ γράφεται ως:

$$\hat{\Gamma}_c = \left[\ \hat{B} \mid \hat{A}\hat{B} \mid \ldots \mid \hat{A}^{n-1}\hat{B}\ \right] = \left[\ Q^{-1}B \mid Q^{-1}AB \mid \ldots \mid Q^{-1}A^{n-1}B\ \right] = Q^{-1}\Gamma_c$$

Όμως:

$$\hat{\Gamma}_c = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \hat{B}_1 & \hat{A}_{11}\hat{B}_1 & \ldots & \hat{A}_{11}^{n-1}\hat{B}_1 \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right]$$

και επομένως

$$\mathrm{Rank}(\Gamma_c) = n_c = \mathrm{Rank}(\hat{\Gamma}_c) = \mathrm{Rank}\left(\left[\ \hat{B}_1 \mid \hat{A}_{11}\hat{B}_1 \mid \ldots \mid \hat{A}_{11}^{n-1}\hat{B}_1\ \right]\right)$$

$$= \mathrm{Rank}\left(\left[\ \hat{B}_1 \mid \hat{A}_{11}\hat{B}_1 \mid \ldots \mid \hat{A}_{11}^{n_c-1}\hat{B}_1\ \right]\right)$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το Θεώρημα Cauley-Hamilton. Επομένως το σύστημα $\Sigma_i(\hat{A}_{11},\hat{B}_1)$ είναι πλήρως ελέγξιμο. □

Θεώρημα: Έστω σύστημα $\Sigma_i(A,B)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(α) Το σύστημα $\Sigma_i(A,B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο.

(β) Ο πίνακας Gramian $W_c(0,t_1) \succ 0$ για κάθε $t_1 > 0$.

(γ) $\mathrm{Rank}(\Gamma_c) = n$.

(δ) $\mathrm{Rank}[L_c(0,t_1)] = n$ για κάθε $t_1 > 0$.

(ε) $\mathrm{Rank}[sI_n - A|B] = n$ για κάθε $s \in \mathbb{C}$. Ισοδύναμα $\mathrm{Rank}[\lambda I_n - A|B] = n$ για κάθε $\lambda \in \sigma(A)$.

Απόδειξη: Εφόσον όπως έχουμε ήδη δείξει:

$$\mathcal{X}_c = \mathcal{R}[L_c(0,t_1)] = \mathcal{R}[W_c(0,t_1)] = \mathcal{R}(\Gamma_c)$$

η ισοδυναμία (α) ⇔ (β) ⇔ (γ) ⇔ (δ) είναι άμεση.

(γ) ⇒ (ε): Έστω ότι $\mathrm{Rank}(\Gamma_c) = n$ και ότι υπάρχει $\lambda \in \sigma(A)$ και $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\xi \neq 0$, ώστε

$$\xi^*[\lambda I_n - A \mid B] = 0 \Rightarrow \xi^* A = \lambda\xi^*, \ \ \xi^* B = 0$$

Επιπλέον,

$$\xi^* A^2 = (\xi^* A)A = \lambda\xi^* A = \lambda^2\xi^* \ \text{ και γενικά } \ \xi^* A^k = \lambda^k\xi^*, \ k = 1,2,\ldots,n-1$$

Επομένως,

$$\xi^*\Gamma_c = \xi^*\left[\ B \mid AB \mid \ldots \mid A^{n-1}B\ \right] = \left[\ 0 \mid \lambda\xi^* B \mid \ldots \mid \lambda^{n-1}\xi^* B\ \right] = 0$$

(άτοπο, καθώς $\mathrm{Rank}(\Gamma_c) = n$ και $\xi \neq 0$).

(ε) ⇒ (α): Εξ΄ υποθέσεως ισχύει ότι $\mathrm{Rank}[\lambda I_n - A\ |B] = n$ για κάθε $\lambda \in \sigma(A)$. Υποθέτουμε για αντίφαση ότι $\Sigma_i(A,B)$ δεν είναι πλήρως ελέγξιμο. Τότε, από το προηγούμενο Θεώρημα υπάρχει πίνακας $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(Q) \neq 0$, τέτοιος ώστε:

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \ \ \hat{B} = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου $\hat{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n_c\times n_c}$, $\hat{B}_1 \in \mathbb{R}^{n_c\times m}$, $n_c = \mathrm{Rank}(\Gamma_c) < n$, όπου $\Gamma_c = [B\ AB\ \ldots\ A^{n-1}B]$ ο πίνακας ελεγξιμότητας και όπου $\Sigma_i(\hat{A}_{11},\hat{B}_1)$ πλήρως ελέγξιμο. Παρατηρούμε ότι $\sigma(A) = \sigma(\hat{A}) = \sigma(\hat{A}_{11}) \cup \sigma(\hat{A}_{22})$.

Έστω $\lambda \in \sigma(\hat{A}_{22})$ με αντίστοιχο αριστερό ιδιοδιάνυσμα $\beta^* \neq 0$, δηλαδή $\beta^* \hat{A}_{22} = \lambda \beta^*$. Κατασκευάζουμε το διάνυσμα $\alpha^* = [0_{n_c}^T \mid \beta^*] \neq 0$. Τότε:

$$\alpha^*[\lambda I_n - \hat{A} \mid \hat{B}] = [0^T \mid \beta^*] \left[\begin{array}{cc|c} \lambda I_{n_c} - \hat{A}_{11} & -\hat{A}_{12} & B_1 \\ 0 & \lambda I_{n-n_c} - \hat{A}_{22} & 0 \end{array} \right] = 0^T$$

Επομένως,

$$\alpha^*[\lambda I_n - Q^{-1}AQ \mid Q^{-1}B] = 0 \Rightarrow \alpha^* Q^{-1}[\lambda I_n - A \mid B] \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha^* Q^{-1}[\lambda I_n - A \mid B] = 0$$

που είναι άτοπο γιατί αντιβαίνει στην υπόθεση. □

Θεώρημα: Αν $\Sigma_i(A, B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο τότε μπορούμε να μεταφέρουμε αυθαίρετη αρχική κατάσταση $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ σε αυθαίρετη τελική κατάσταση $x(t_1) = x_f \in \mathbb{R}^n$ σε αυθαίρετο χρόνο $t_1 > 0$.

Απόδειξη: Έστω ότι $\Sigma_i(A, B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο. Θα δείξουμε ότι μπορούμε να μεταφέρουμε την (αυθαίρετη) αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$ στην (αυθαίρετη) τελική κατάσταση $x_f \in \mathbb{R}^n$ σε (αυθαίρετο) χρόνο $t_1 > 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $u \in C([0, t_1], \mathbb{R}^m)$ τέτοια ώστε:

$$x(t_1) = x_f = e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau \Leftrightarrow e^{At_1}(x_0 - e^{-At_1}x_f) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau = 0$$

Έστω $\xi = x_0 - e^{-At_1}x_f$. Εφόσον το σύστημα $\Sigma_i(A, B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο υπάρχει $u \in C([0, t_1], \mathbb{R}^m)$ που μεταφέρει την (αυθαίρετη) αρχική κατάσταση $x(0) = \xi$ στην κατάσταση $x(t_1) = 0$. Η ίδια συνάρτηση μεταφέρει την κατάσταση $x(0) = x_0$ στην κατάσταση $x(t_1) = x_f$. □

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο ελέγξιμος υπόχωρος του συστήματος $\Sigma_i(A, B)$ όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Έχουμε:

$$\text{Rank}(\Gamma_c) = \text{Rank}[B \; AB \; A^2B] = \text{Rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 2$$

και το σύστημα δεν είναι πλήρως ελέγξιμο. Ο ελέγξιμος υπόχωρος είναι:

$$\mathcal{X}_c = \mathcal{R}(\Gamma_c) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Παρατήρηση: Αν το Rank ενός πίνακα δεν είναι προφανές, μία συστηματική μέθοδος για τον υπολογισμό του είναι ο μετασχηματισμός του πίνακα σε μορφή echelon με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών που αφήνουν αναλλοίωτο το Rank. Ένας πίνακας είναι σε μορφή echelon όταν, αρχίζοντας από την πρώτη γραμμή, ο αριθμός των αρχικών μηδενικών της γραμμής όταν μεταβαίνουμε από κάθε γραμμή στην επόμενη αυξάνεται (αυστηρά), μέχρι να καταλήξουμε στην τελευταία γραμμή η σε έναν συνεχόμενο αριθμό μηδενικών γραμμών που επεκτείνεται έως το τέλος του πίνακα (αν υπάρχει). Το Rank του πίνακα σε αυτή την περίπτωση είναι ο αριθμός των μη-μηδενικών γραμμών του πίνακα echelon. Οι τρείς στοιχειώδεις μετασχηματισμοί είναι: (α) Πολλαπλασιασμός των στοιχείων μίας γραμμής με μη μηδενική σταθερά, (β) Πρόσθεση ενός πολλαπλάσιου μίας γραμμής σε άλλη, και (γ) εναλλαγή δύο γραμμών.

Παράδειγμα: Εξετάζοντας το προηγούμενο παράδειγμα:

$$\Gamma_c = [B\ AB\ A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και άρα $\mathrm{Rank}(\Gamma_c) = 2$.

2.1 Ελεγξιμότητα Διαγωνίων μορφών:

Οι ιδιότητες ελεγξιμότητας του $\Sigma_i(A, B)$ παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς ισοδυναμίας: Έστω $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(Q) \neq 0$, και $\Sigma_i(A, B) \sim \Sigma_i(Q^{-1}AQ, Q^{-1}B)$. Οι πίνακες ελεγξιμότητας που αντιστοιχούν στα δύο ισοδύναμα συστήματα είναι:

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \text{ και } \hat{\Gamma}_c = \begin{bmatrix} Q^{-1}B & Q^{-1}AB & Q^{-1}A^2B & \dots & Q^{-1}A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

και άρα $\hat{\Gamma}_c = Q^{-1}\Gamma_c \Rightarrow \mathrm{Rank}(\Gamma_c) = \mathrm{Rank}(\hat{\Gamma}_c)$.

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ απλής δομής. Αν $\{\lambda_i\}$ οι ιδιοτιμές του A, τότε

$$AP = P\Lambda, \text{ όπου } \Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

όπου Λ και P οι πίνακες ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων, αντίστοιχα. Εφόσον A απλής δομής ο P είναι μή ιδιάζων και $\Lambda = P^{-1}AP$. Ορίζουμε τον μετασχηματισμό:

$$x = Pz \Rightarrow x' = Pz' = Ax + Bu \Rightarrow z' = P^{-1}APz + P^{-1}Bu = \Lambda z + \hat{B}u, \text{ όπου } \hat{B} = P^{-1}B$$

Άρα, $z_i' = \lambda_i z_i + \hat{b}_i^T u$, $i = 1, 2, \dots, n$, όπου $\hat{b}_i^T$ η i-γραμμή του $\hat{B}$. Επομένως το σύστημα $\Sigma_i(A, B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\Sigma_i(\Lambda, \hat{B})$ είναι πλήρως ελέγξιμο, η, ισοδύναμα, αν και μόνο αν ο πίνακας:

$$[\lambda I - \Lambda \mid \hat{B}] = \left[\begin{array}{cccc|c} \lambda-\lambda_1 & 0 & \dots & 0 & \hat{b}_1^T \\ 0 & \lambda-\lambda_2 & \dots & 0 & \hat{b}_2^T \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda-\lambda_n & \hat{b}_n^T \end{array}\right]$$

έχει rank ίσο με n για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$. Εφόσον ο πίνακας $[\lambda I - \Lambda \mid \hat{B}]$ μπορεί να χάσει rank μονο αν $\lambda \in \sigma(A)$, δηλαδή αν $\lambda = \lambda_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, συμπεραίνουμε ότι $\Sigma_i(A, B)$ πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\hat{b}_i^T \neq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.

Στην γενική περίπτωση ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ δεν είναι απλής δομής: Έστω:

$$\phi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (\lambda - \lambda_1)^{\tau_1}(\lambda - \lambda_2)^{\tau_2} \cdots (\lambda - \lambda_\rho)^{\tau_\rho}$$

όπου $\lambda_i \neq \lambda_j$ αν $i \neq j$ και $\sum_{i=1}^{\rho} \tau_i = n$. Ο ακέραιος τ_i είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i. Τότε υπάρχει μη-ιδιάζων πίνακας P (πίνακας γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων) τέτοιος ώστε: $P^{-1}AP = J$, όπου J πίνακας Jordan, $J = \mathrm{diag}\{J_1, J_2, \dots, J_\rho\}$, $J_i \in \mathbb{C}^{\tau_i\times\tau_i}$, $i = 1, 2, \dots, \rho$ και $J_i = \mathrm{diag}\{J_{i1}, J_{i2}, \dots, J_{id_i}\}$, και όπου $d_i = \dim \mathcal{N}(\lambda_i I_n - A)$, η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i, $i = 1, 2, \dots, \rho$. Έστω $J_{ij} \in \mathbb{C}^{q_{ij}\times q_{ij}}$, $j = 1, 2, \dots d_i$, $i = 1, 2, \dots, \rho$. Οι ακέραιαι q_{ij} υπολογίζονται απο την χαρακτηριστική Segre και το διάγραμμα Ferrer. Έστω ότι:

$$P^{-1}B = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ \vdots \\ \hat{B}_\rho \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times m}, \quad \hat{B}_i = \begin{bmatrix} \hat{B}_{i1} \\ \hat{B}_{i2} \\ \vdots \\ \hat{B}_{id_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{\tau_i\times m} \text{ και } \hat{B}_{ij} = \begin{bmatrix} \hat{b}_{1ij}^T \\ \hat{b}_{2ij}^T \\ \vdots \\ \hat{b}_{q_{ij}ij}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{q_{ij}\times m}$$

Θέτουμε: $\hat{b}^T_{q_{ij}ij} = \hat{b}^T_{\epsilon ij}$ (η έσχατη γραμμή του $\hat{B}_{ij}$) και ορίζουμε: ως $\hat{B}_{\epsilon i}$ τον υποπίνακα του $\hat{B}_i$, διαστάσεων $d_i \times m$, αποτελούμενο απο τις d_i έσχατες γραμμές έκαστου $\hat{B}_{ij}$, δηλαδή:

$$\hat{B}_{\epsilon i} = \begin{bmatrix} \hat{b}^T_{\epsilon i1} \\ \hat{b}^T_{\epsilon i2} \\ \vdots \\ \hat{b}^T_{\epsilon i d_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{d_i \times m}$$

Τότε έχουμε το παρακάτω Θεώρημα:

Θεώρημα: Το σύστημα $\Sigma_i(A, B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \rho$, οι γραμμές κάθε πίνακα $\hat{B}_{\epsilon,i}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Απόδειξη: Το σύστημα $\Sigma_i(A, B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν γιά κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $\mathrm{Rank}[\lambda I - A \mid B] = n$. Η απόδειξη βασίζεται στο παρακάτω παράδειγμα που αντιστοιχεί σε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ με $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, από το οποίο η γενική περίπτωση προκύπτει εύκολα (αλλά με βασανιστικά πολύπλοκο συμβολισμό). Έστω ότι η δέσμη (A, B) σε μορφή Jordan είναι

$$[\lambda I_7 - A \mid B] = \left[\begin{array}{cc|ccc|cc||c} \lambda-\lambda_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}^T_{111} \\ 0 & \lambda-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}^T_{\epsilon 11} \\ \hline 0 & 0 & \lambda-\lambda_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}^T_{112} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-\lambda_1 & -1 & 0 & 0 & \hat{b}^T_{212} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-\lambda_1 & 0 & 0 & \hat{b}^T_{\epsilon 12} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-\lambda_2 & -1 & \hat{b}^T_{121} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-\lambda_2 & \hat{b}^T_{\epsilon 21} \end{array}\right]$$

Η δέσμη μπορεί να χάσει rank μόνο αν $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$. Θέτοντας $\lambda = \lambda_1$ έχουμε:

$$[\lambda_1 I_7 - A \mid B] = \left[\begin{array}{cc|ccc|cc||c} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}^T_{111} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}^T_{\epsilon 11} \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}^T_{112} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \hat{b}^T_{212} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}^T_{\epsilon 12} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1-\lambda_2 & -1 & \hat{b}^T_{121} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1-\lambda_2 & \hat{b}^T_{\epsilon 21} \end{array}\right]$$

Εκτελούμε με την σειρά τους παρακάτω στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών που αφήνουν το Rank αναλλοίωτο:

- Προσθέτουμε $\hat{b}^T_{111}$ επί την δεύτερη στήλη στις τελευταίες m στήλες.
- Προσθέτουμε $\hat{b}^T_{112}$ επί την τέταρτη στήλη στις τελευταίες m στήλες.
- Προσθέτουμε $\hat{b}^T_{212}$ επί την πέμπτη στήλη στις τελευταίες m στήλες.
- Προσθέτουμε $-(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}\hat{b}^T_{121}$ επί την έκτη στήλη στις τελευταίες m στήλες.
- Προσθέτουμε $(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}$ επί την έκτη στήλη στην έβδομη στήλη.
- Προσθέτουμε $-(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}\hat{b}^T_{\epsilon 21}$ επί την έβδομη στήλη στις τελευταίες m στήλες.

Ο rank-ισοδύναμος πίνακας που προκύπτει από τους παραπάνω στοιχειώδεις μετασχηματισμούς είναι:

$$[\lambda_1 I_7 - A \mid B] \sim \left[\begin{array}{cc|ccc|cc||c} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}_{\epsilon 11}^T \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}_{\epsilon 12}^T \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & 0 & 0^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & 0^T \end{array}\right]$$

Με εναλλαγές γραμμών,

$$[\lambda_1 I_7 - A \mid B] \sim \left[\begin{array}{ccccccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0^T \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & 0 & 0^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & 0^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}_{\epsilon 11}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}_{\epsilon 12}^T \end{array}\right]$$

Έχουμε ότι $\mathrm{Rank}[\lambda_1 I_7 - A \mid B] \geq 5$ και $\mathrm{Rank}[\lambda_1 I_7 - A \mid B] = 7$ αν και μόνο αν οι δύο γραμμές: $\hat{b}_{\epsilon 11}^T$ και $\hat{b}_{\epsilon 12}^T$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Θέτοντας $\lambda = \lambda_2$:

$$[\lambda_2 I_7 - A \mid B] = \left[\begin{array}{cc|ccc|cc||c} \lambda_2 - \lambda_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}_{111}^T \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}_{\epsilon 11}^T \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}_{112}^T \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & -1 & 0 & 0 & \hat{b}_{212}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & 0 & 0 & \hat{b}_{\epsilon 12}^T \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \hat{b}_{121}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}_{\epsilon 21}^T \end{array}\right]$$

Εκτελούμε με τη σειρά τους παρακάτω στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών που αφήνουν το Rank αναλλοίωτο:

- Προσθέτουμε $(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}$ επί την πρώτη στήλη στην δεύτερη.
- Προσθέτουμε $-(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}\hat{b}_{111}^T$ επί την πρώτη στήλη στις τελευταίες m στήλες.
- Προσθέτουμε $-(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}\hat{b}_{\epsilon 11}^T$ επί την δεύτερη στήλη στις τελευταίες m στήλες
- Προσθέτουμε $-(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}\hat{b}_{112}^T$ επί την τρίτη στήλη στις τελευταίες m στήλες
- Προσθέτουμε $(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}$ επί την τρίτη στήλη στην τέταρτη.
- Προσθέτουμε $-(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}\hat{b}_{212}^T$ επί την τέταρτη στήλη στις τελευταίες m στήλες
- Προσθέτουμε $(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}$ επί την τέταρτη στήλη στην πέμπτη.
- Προσθέτουμε $-(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}\hat{b}_{\epsilon 12}^T$ επί την πέμπτη στήλη στις τελευταίες m στήλες
- Προσθέτουμε $\hat{b}_{121}^T$ επί την έβδομη στήλη στις τελευταίες m στήλες

Ο rank-ισοδύναμος πίνακας που προκύπτει από τους παραπάνω στοιχειώδεις μετασχηματισμούς είναι:

$$[\lambda_2 I_7 - A \mid B] \sim \left[\begin{array}{cc|ccc|cc||c} \lambda_2-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0^T \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0^T \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0^T \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2-\lambda_1 & 0 & 0 & 0^T \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}_{\epsilon 21}^T \end{array}\right]$$

Είναι σαφές ότι $\text{Rank}[\lambda_2 I_7 - A \mid B] \geq 6$ και $\text{Rank}[\lambda_2 I_7 - A \mid B] = 7$ αν και μόνο αν $\hat{b}_{\epsilon 21}^T \neq 0$.

Συνοψίζοντας, ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε $\text{Rank}[\lambda I_7 - A \mid B] = 7$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι

$$\text{Rank}\begin{bmatrix} \hat{b}_{\epsilon 11}^T \\ \hat{b}_{\epsilon 12}^T \end{bmatrix} = 2 \;\text{ και }\; \hat{b}_{\epsilon 21}^T \neq 0$$

όπως απαιτεί το Θεώρημα. Η γενική περίπτωση προκύπτει παρομοίως. $\square$

Παρατήρηση: Αν $m = 1$ (μία είσοδος), τότε αναγκαία συνθήκη για να είναι το $\Sigma_i(A, b)$ πλήρως ελέγξιμο είναι $d_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, \rho$.

3. Παρατηρησιμότητα

Θεωρούμε το σύστημα $\Sigma_o(A, C) : x'(t) = Ax(t), x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n,\ y(t) = Cx(t)$ με $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$. Το σύστημα αντιστοιχεί σε γραμμικό χρονικά ανεξάρτητο σύστημα με μηδενική είσοδο.

Ορισμός: Έστω το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$. Η κατάσταση $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι παρατηρήσιμη αν καθορίζεται μονοσήμαντα από την έξοδο του συστήματος $y(t)$, $t \in [0, t_1]$ για κάποιο πεπερασμένο $t_1 > 0$. Το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ είναι (πλήρως) παρατηρήσιμο αν κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι παρατηρήσιμη, δηλαδή αν κάθε αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$ καθορίζεται μονοσήμαντα απο την έξοδο σε πετερασμένο διάστημα $[0, t_1]$.

Έστω $y(\tau) = Ce^{A\tau}x_0$ η έξοδος του συστήματος στο διάστημα $\tau \in [0, t_1]$. Επομένως,

$$e^{A^T\tau}C^T y(\tau) = e^{A^T\tau}C^T C e^{A\tau}x_0 \Rightarrow \int_0^{t_1} e^{A^T\tau}C^T y(\tau)d\tau = \int_0^{t_1} e^{A^T\tau}C^T C e^{A\tau}d\tau \cdot x_0 := W_o(0, t_1)x_0$$

όπου $W_o(0, t_1)$ είναι ο πίνακας Gramian παρατηρησιμότητας. Έχουμε ότι $W_o(0, t_1) = W_o^T(0, t_1) \succeq 0$. Αν επιπλέον $W_o(0, t_1) \succ 0$, τότε

$$x_0 = W_o^{-1}(0, t_1)\int_0^{t_1} e^{A^T\tau}C^T y(\tau)d\tau$$

και η κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι παρατηρήσιμη. Επιπλέον, εφόσον η ιδιότητα αυτή ισχύει γιά αυθαίρετο ζεύγος $\big(x_0, y_{[0,t_1]}\big)$, η συνθήκη $W_o(0, t_1) \succ 0$ συνεπάγεται ότι το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο. Στην περίπτωση που ο πίνακας $W_o(0, t_1)$ είναι ιδιάζων, τότε υπάρχει $\xi \neq 0$, $W_o(0, t_1)\xi = 0$. Επομένως, αν η εξίσωση έχει λύση x_0, τότε $x_0 + \xi$ είναι επίσης λύση και η κατάσταση x_0 δεν μπορεί να καθορισθεί μονοσήμαντα και άρα δεν είναι παρατηρήσιμη.

Θεώρημα: Έστω $\Sigma_o(A, C)$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$. Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(α) $\Sigma_o(A, C)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο.

(β) Ο πίνακας Gramian παρατηρησιμότητας είναι θετικά ορισμένος, δηλ. $W_o(0, t_1) \succ 0$ για κάθε $t_1 > 0$.

(γ) Ο πίνακας παρατηρησιμότητας,

$$\Gamma_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{np \times n}$$

έχει $\text{Rank}(\Gamma_o) = n$, δηλαδή οι στήλες του είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Ισοδύναμα $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{N}_r(CA^{i-1}) = \{0\}$.

(δ) Ο πίνακας $[\lambda I_n - A^T \mid C^T]$ έχει Rank n για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ (Ισοδύναμα για κάθε $\lambda \in \sigma(A)$).

(ε) Το σύστημα $\Sigma_i(A^T, C^T)$ είναι πλήρως ελέγξιμο.

Απόδειξη: Πρώτα αποδεικνύεται η ισοδυναμία (α) ⇔ (γ). Η ισοδυναμία με τις υπόλοιπες σχέσεις βασίζεται στην δυικότητα που μας δίνει η (ε).

(γ) ⇒ (α): Από την σχέση $y(t) = Ce^{At}x_0$, $t \in [0, t_1]$ έχουμε

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_0 := \Gamma_o x_0$$

Εφόσον $\text{Rank}(\Gamma_o) = n$ η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση και επομένως η κατάσταση x_0 είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Εφόσον $x_0 \in \mathbb{R}^n$ αυθαίρετο, $\Sigma_o(A, C)$ πλήρως παρατηρήσιμο.

(α) ⇒ (γ): Έστω ότι $\Sigma_o(A, C)$ πλήρως παρατηρήσιμο αλλά $\text{Rank}(\Gamma_o) < n$. Τότε υπάρχει $x_0 \neq 0$ τέτοιο ώστε: $\Gamma_o x_0 \Rightarrow CA^i x_0 = 0$, $i \in \mathbb{N}_0$ (Cauley-Hamilton). Επομένως $y(t) = Ce^{At}x_0 = 0$ για κάθε $t \geq 0$. Συμπεραίνουμε ότι το σύστημα Σ_o δεν είναι πλήρως παρατηρήσιμο. (Η κατάσταση $x(0) = 0$ δεν μπορεί να διακριθεί απο την κατάσταση $x(0) = x_0$ με χρήση της εξόδου $y(t)$, $t \in [0, t_1]$, όσο μεγάλο $t_1 > 0$ και αν διαλέξουμε.

(α) ⇔ (ε): Απο την ισοδυναμία (α) ⇔ (γ) έχουμε ότι $\Sigma_o(A, C)$ πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνο αν:

$$\text{Rank}(\Gamma_o) = n \Leftrightarrow \text{Rank}(\Gamma_o^T) = n \Leftrightarrow \Sigma_i(A^T, C^T) \text{ πλήρως ελέγξιμο}$$

Η ισοδυναμία με τις άλλες προτάσεις προκύπτει τώρα από το Θεώρημα Ελεγξιμότητας. □

Παρατήρηση: Από την απόδειξη (γ) ⇒ (α) προκύπτει ότι το μήκος του διαστήματος $[0, t_1]$, $t_1 > 0$ μπορεί να είναι αυθαίρετα μικρό.

3.1 Μή παρατηρήσιμος υπόχωρος

Το σύνολο των μή-παρατηρήσιμων καταστάσεων $\mathcal{X}_{\bar{o}}$ ορίζεται ως το σύνολο των καταστάσεων $x_0 \in \mathbb{R}^n$ για κάθε μία από τις οποίες η αντίστοιχη συνάρτηση εξόδου $y(t) = Ce^{At}x_0 = 0$ για κάθε $t \geq 0$. Προκύπτει εύκολα λόγω γραμμικότητας ότι $\mathcal{X}_{\bar{o}}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και $M(x_0)$ το αντίστοιχο ομοσύνολο (coset)

$$M(x_0) = x_0 + \mathcal{X}_{\bar{o}} = \{x_0 + \xi : \xi \in \mathcal{X}_{\bar{o}}\}$$

Τότε κάθε αρχική κατάσταση $x(0) \in M(x_0)$ είναι συμβατή με την έξοδο $y(t) = Ce^{At}x_0$, $t \geq 0$ και επομένως όλες οι καταστάσεις $x(0) \in M(x_0)$ είναι μη-παρατηρήσιμες αν $\mathcal{X}_{\bar{o}} \neq \{0\}$. Το επόμενο Θεώρημα ταυτίζει τον $\mathcal{X}_{\bar{o}}$ με τον πυρήνα του πίνακα παρατηρησιμότητας.

Θεώρημα: Ισχύει ότι:

$$\mathcal{X}_{\bar{o}} = \mathcal{N}_r(\Gamma_o) \;\text{ όπου }\; \Gamma_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Επομένως το σύστημα $\Sigma_0(A,C)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνο αν $\mathcal{X}_{\bar{o}} = \{0\}$.

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in \mathcal{N}_r(\Gamma_o)$, $t \geq 0$. Τότε $CA^k x_0 = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, που συνεπάγεται ότι $CA^k x_0 = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ (Cauley-Hamilton) και άρα $Ce^{At}x_0 = 0$, $t \geq 0 \Rightarrow x_0 \in \mathcal{X}_{\bar{o}}$. Αντίστροφα, $x_0 \in \mathcal{X}_{\bar{o}}$ συνεπάγεται ότι $Ce^{At}x_0 = 0$, $t \geq 0$, και επομένως $[Ce^{At}x_0]^{(k)}|_{t=0} = CA^k x_0 = 0$, $k \geq 0$, και άρα $x_0 \in \mathcal{N}_r(\Gamma_o)$.

Έχουμε επίσης: $\dim(\mathcal{X}_{\bar{o}}) = \dim \mathcal{N}_r(\Gamma_o) = n - \mathrm{Rank}(\Gamma_o)$. Άρα $\mathcal{X}_{\bar{o}} = \{0\}$ αν και μόνο αν $\mathrm{Rank}(\Gamma_o) = n$, η, ισοδύναμα αν και μόνο αν το σύστημα $\Sigma_o(A,C)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο. $\square$

Θεώρημα: Οι ιδιότητα πλήρους παρατηρησιμότητας διατηρείται σε ισοδύναμα συστήματα.

Απόδειξη: Έστω $\Sigma_o(A,C) \sim \Sigma_o(Q^{-1}AQ, CQ)$. Τότε: $CQ(Q^{-1}AQ)^i = CQQ^{-1}A^iQ = CA^iQ$ για κάθε $i \geq 0$ και επομένως $\hat{\Gamma}_o = \Gamma_o Q \Leftrightarrow \mathrm{Rank}(\hat{\Gamma}_o) = \mathrm{Rank}(\Gamma_o)$. $\square$

Θεώρημα: Ο μή παρατηρήσιμος υπόχωρος $\mathcal{X}_{\bar{o}}$ του $\Sigma_o(A,C)$ είναι ο μεγαλύτερος A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που περιέχεται στον $\mathcal{N}_r(C)$.

Απόδειξη: Έχουμε ότι $x \in \mathcal{N}_r(\Gamma_o) \Rightarrow CA^k x = 0$ $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Επομένως $(k=0)$ $x \in \mathcal{N}_r(C)$. Επιπλέον, $A^n x \in < x, Ax, \ldots, A^{n-1}x >$ και επομένως $\Gamma_o Ax = 0 \Rightarrow Ax \in \mathcal{N}_r(\Gamma_o) = \mathcal{X}_{\bar{o}}$. Άρα $A\mathcal{X}_{\bar{o}} \subseteq \mathcal{X}_{\bar{o}} \subseteq \mathcal{N}_r(C)$. Έστω ότι $\mathcal{V}$ είναι επίσης A-αναλλοίωτος υπόχωρος που περιέχεται στο $\mathcal{N}_r(C)$. Τότε $x \in \mathcal{V} \Rightarrow Cx = 0$ και επομένως $CAx = CA^2x = \ldots = CA^{n-1}x = 0$. Άρα $x \in \mathcal{X}_{\bar{o}} = \mathcal{N}_r(\Gamma_o)$ και επομένως $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}_{\bar{o}}$. $\square$

Λήμμα (Kalman): Έστω ότι $\Sigma_o(A,C)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ δεν είναι πλήρως παρατηρήσιμο. Τότε υπάρχει μετασχηματισμός ισοδυναμίας, $\Sigma_o(A,C) \sim \Sigma_o(Q^{-1}AQ, CQ)$, $\det Q \neq 0$, τέτοιος ώστε:

$$\hat{A} := Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \;\; \hat{C} := CQ = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

όπου $\hat{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$, $\hat{C}_1 \in \mathbb{R}^{p\times n_o}$, $n_o = \mathrm{Rank}(\Gamma_o)$ και $\Sigma_o(\hat{A}_{11}, \hat{C}_1)$ πλήρως παρατηρήσιμο.

Απόδειξη: Με χρήση δυικότητας ελεγξιμότητας - παρατηρησιμότητας. $\square$

4. Κανονική μορφή Kalman

Έστω σύστημα $\Sigma(A,B,C,D)$: $x' = Ax + Bu$, $x(0) = x_0$, $y = Cx + Du$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ και $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$. Έστω επίσης ότι $\dim(\mathcal{X}_c) = \mathrm{Rank}(\Gamma_c) < n$ και $\dim(\mathcal{X}_{\bar{o}}) = n - \mathrm{Rank}(\Gamma_o) < n$. Τότε το σύστημα δεν είναι πλήρως ελεγξιμο ούτε πλήρως παρατηρήσιμο. Στην περίπτωση αυτη μπορούμε να γράψουμε τον χώρο κατάστασης ως:

$$\mathcal{X} = \mathbb{R}^n = \mathcal{X}_{co} \oplus \mathcal{X}_{c\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}o} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}}$$

όπου: $\mathcal{X}_{co} \oplus \mathcal{X}_{c\bar{o}} = \mathcal{X}_c$, $\mathcal{X}_{c\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} = \mathcal{X}_{\bar{o}}$, $\mathcal{X}_{\bar{c}o} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} = \mathcal{X}_{\bar{c}}$, $\mathcal{X}_{co} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}o} = \mathcal{X}_o$ και όπου $\mathcal{X}_c \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}} = \mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ και $\mathcal{X}_o \oplus \mathcal{X}_{\bar{o}} = \mathcal{X} = \mathbb{R}^n$. Παρατηρούμε ότι οι υπόχωροι $\mathcal{X}_c$ και $\mathcal{X}_{\bar{o}}$ είναι μονοσήμαντα ορισμένοι και αντιστοιχούν στο $\mathcal{R}(\Gamma_c)$ και τον $\mathcal{N}_r(\Gamma_o)$, αντίστοιχα. Οι υπόλοιποι ορίζονται ως εξής: (α) Ο $\mathcal{X}_{c\bar{o}}$ ορίζεται ως $\mathcal{X}_{c\bar{o}} = \mathcal{X}_c \cap \mathcal{X}_{\bar{o}}$, (β) ο $\mathcal{X}_{co}$ συμπληρώνει την βάση του $\mathcal{X}_{c\bar{o}}$ στον $\mathcal{X}_c$, και (γ) ο $\mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}}$ συμπληρώνει την βάση του $\mathcal{X}_{c\bar{o}}$ στον $\mathcal{X}_{\bar{o}}$. Επομένως ο $\mathcal{X}_{c\bar{o}}$ είναι μονοσήμαντα ορισμένος, ενώ οι $\mathcal{X}_{co}$ και $\mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}}$ δεν είναι.

Θα δείξουμε την ανάλυση του $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ στο παραπάνω ευθές άθροισμα των τεσσάρων υποχώρων με αλλαγή συντεταγμένων μέσω ενός μετασχηματισμού ισοδυναμίας $\Sigma(A,B,C,D) \sim \Sigma(\hat{A},\hat{B},\hat{C},D)$. Στις νέες συντεταγμένες το διάνυσμα κατάστασης $\hat{x}$ αναλύεται ως άθροισμα διανυσμάτων :

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{co} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{x}_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{x}_{\bar{c}o} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

που ανήκουν, αντίστοιχα, στους υπόχωρους $\mathcal{X}_{co}$, $\mathcal{X}_{c\bar{o}}$, $\mathcal{X}_{\bar{c}o}$ και $\mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}}$. Στις νέες συντεταγμένες το σύστημα $\Sigma(\hat{A},\hat{B},\hat{C},D)$ αναλύεται σε τέσσερα συστήματα (Σ_{co}, $\Sigma_{c\bar{o}}$, $\Sigma_{\bar{c}o}$ και $\Sigma_{\bar{c}\bar{o}}$ που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους όπως αναλύεται στο παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα (Κανονική μορφή Kalman): Έστω σύστημα $\Sigma(A,B,C,D)$. Υπάρχει μετασχηματισμός ισοδυναμίας $\Sigma(A,B,C,D) \ \sim^{Q} \ \Sigma(\hat{A},\hat{B},\hat{C},D)$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det Q \neq 0$, τέτοιος ώστε:

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 & \hat{A}_{13} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \hat{A}_{23} & \hat{A}_{24} \\ 0 & 0 & \hat{A}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{A}_{43} & \hat{A}_{44} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = CQ = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & 0 & \hat{C}_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Επιπλέον ισχύουν οι κάτωθι ιδιότητες:

(i) Το σύστημα:
$$\Sigma_i\left(\begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix}\right)$$
είναι πλήρως ελέγξιμο.

(ii) Το σύστημα:
$$\Sigma_o\left(\begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{13} \\ 0 & \hat{A}_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_3 \end{bmatrix}\right)$$
είναι πλήρως παρατηρήσιμο.

(iii) Το σύστημα: $\Sigma(\hat{A}_{11},\hat{B}_1,\hat{C}_1)$ είναι πλήρως ελέγξιμο και πλήρως παρατηρήσιμο.

Απόδειξη: Η απόδειξη βασίζεται στην κατασκευή βάσεων για τους κάτωθι υπόχωρους:

(i) Αρχικά ορίζουμε βάση για τον υπόχωρο $\mathcal{X}_{c\bar{o}} = \mathcal{R}(\Gamma_c) \cap \mathcal{N}_r(\Gamma_o)$.

(ii) Στην συνέχεια επιλέγουμε βάση για τον υπόχωρο $\mathcal{X}_{co}$ έτσι ώστε $\mathcal{X}_{co} \oplus \mathcal{X}_{c\bar{o}} = \mathcal{R}(\Gamma_c)$, δηλαδή επεκτείνουμε την βάση του $\mathcal{X}_{c\bar{o}}$ σε αυτήν του $\mathcal{R}(\Gamma_c)$.

(iii) Στην συνέχεια επιλέγουμε βάση για τον υπόχωρο $\mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}}$ έτσι ώστε $\mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{c\bar{o}} = \mathcal{N}_r(\Gamma_o)$, δηλαδή επεκτείνουμε την βάση του $\mathcal{X}_{c\bar{o}}$ σε αυτήν του $\mathcal{N}_r(\Gamma_o)$.

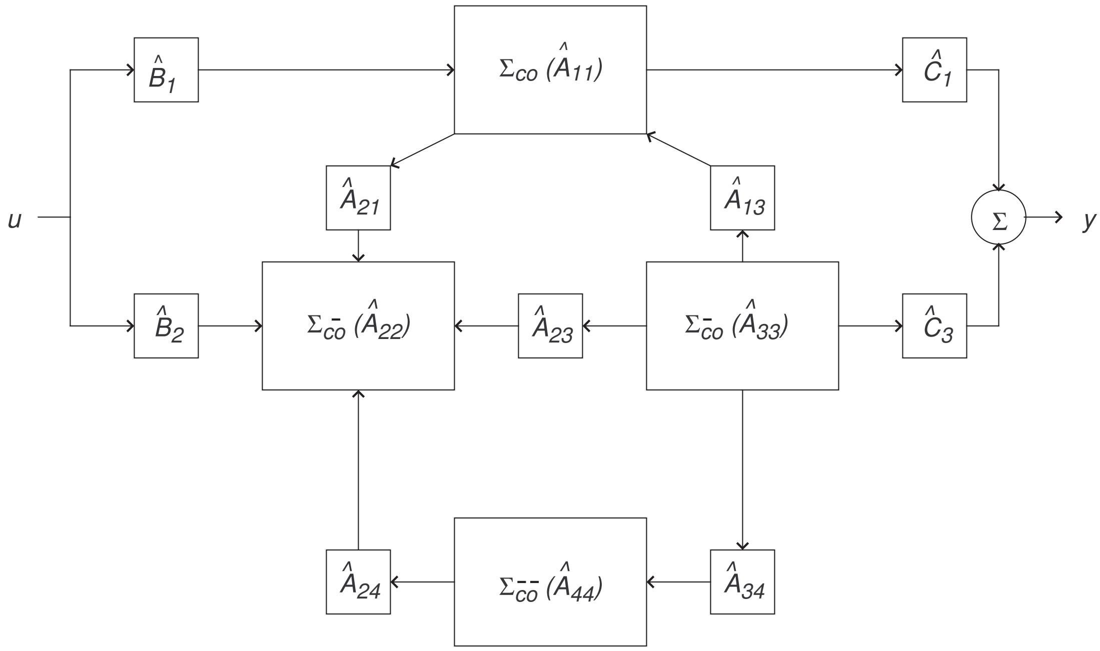
(iv) Τέλος επιλέγουμε βάση για τον υπόχωρο $\mathcal{X}_{\bar{c}o}$ έτσι ώστε $\mathcal{X}_{\bar{c}o} \oplus \mathcal{R}(\Gamma_c) \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} = \mathbb{R}^n$, δηλαδή επεκτείνουμε την βάση του $\mathcal{R}(\Gamma_c) \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}}$ σε αυτήν του $\mathbb{R}^n$.

Ορίζουμε πίνακα $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det Q \neq 0$, ως εξής:

$$Q = \left[\, Q_1 \mid Q_2 \mid Q_3 \mid Q_4 \,\right] = \left[\, q_1 \ \ldots \ q_j \mid q_{j+1} \ \ldots \ q_k \mid q_{k+1} \ \ldots \ q_l \mid q_{l+1} \ \ldots \ q_n \,\right]$$

όπου

(i) $\{q_{j+1},\ldots,q_k\}$ βάση του $\mathcal{X}_{c\bar{o}} = \mathcal{R}(\Gamma_c) \cap \mathcal{N}_r(\Gamma_o)$.



Σχήμα 1: *Υποσυστήματα της κανονικής μορφής Kalman*

(ii) $\{q_1, \ldots, q_j\}$ βάση του $\mathcal{X}_{co}$ ώστε $\mathcal{X}_{co} \oplus \mathcal{X}_{c\bar{o}} = \mathcal{R}(\Gamma_c)$.

(iii) $\{q_{l+1}, \ldots, q_n\}$ βάση του $\mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}}$ ώστε $\mathcal{X}_{c\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} = \mathcal{N}_r(\Gamma_o)$.

(iv) $\{q_{k+1}, \ldots, q_l\}$ βάση του $\mathcal{X}_{\bar{c}o}$ ώστε $\mathcal{R}(\Gamma_c) \cap \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}o} = \mathbb{R}^n$.

Ορίζουμε επίσης

$$T = Q^{-1} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}, \; T_1 \in \mathbb{R}^{j\times n}, \; T_2 \in \mathbb{R}^{(k-j)\times n}, \; T_3 \in \mathbb{R}^{(l-k)\times n}, \; T_4 \in \mathbb{R}^{(n-l)\times n}$$

δηλαδή αντίστοιχα με τον διαμερισμό του πίνακα Q. Έχουμε:

$$TQ = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{k-j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{l-k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-l} \end{bmatrix}]$$

Ορίζουμε επίσης $\hat{A} = Q^{-1}AQ = TAQ$, $\hat{B} = Q^{-1}B = TB$, $\hat{C} = CQ = CT^{-1}$ και $\hat{A}_{ij} = T_iAQ_j$, $\hat{B}_i = T_iB$, $\hat{C}_j = CQ_j$, $(i,j) \in \{1,2,3,4\}^2$, δηλαδή:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \hat{A}_{13} & \hat{A}_{14} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \hat{A}_{23} & \hat{A}_{24} \\ \hat{A}_{31} & \hat{A}_{32} & \hat{A}_{33} & \hat{A}_{34} \\ \hat{A}_{41} & \hat{A}_{42} & \hat{A}_{43} & \hat{A}_{44} \end{bmatrix}, \; \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ \hat{B}_3 \\ \hat{B}_4 \end{bmatrix} \; \hat{C} = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 & \hat{C}_3 & \hat{C}_4 \end{bmatrix}$$

(α) Έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_{31} & \hat{A}_{32} \\ \hat{A}_{41} & \hat{A}_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}$$

Εκ' κατασκευής ο υπόχωρος $\Gamma_c = \mathcal{R}([Q_1\ Q_2])$ είναι A-αναλλοίωτος και επομένως $A[Q_1\ Q_2] = [Q_1\ Q_2]X$ για κάποιον πίνακα X. Επομένως:

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_{31} & \hat{A}_{32} \\ \hat{A}_{41} & \hat{A}_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} X = 0$$

(β) Ισχύει ότι: $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(\Gamma_c) \subseteq \mathcal{R}([Q_1\ Q_2])$ και άρα $B = [Q_1\ Q_2]Y$ για κάποιον πίνακα Y. Επομένως:

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_3 \\ \hat{B}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(γ) Ο υπόχωρος $\mathcal{X}_{\bar{o}} = \mathcal{R}([Q_2\ Q_4])$ είναι A-αναλλοίωτος και συνεπώς $A[Q_2\ Q_4] = [Q_2\ Q_4]Z$ για κάποιον πίνακα Z. Άρα:

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_{12} & \hat{A}_{14} \end{bmatrix} = T_1 A \begin{bmatrix} Q_2 & Q_4 \end{bmatrix} = T_1 \begin{bmatrix} Q_2 & Q_4 \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(δ) Έχουμε: $\hat{A}_{34} = T_3 A Q_4$. Όπως στο (γ) ο υπόχωρος $\mathcal{X}_{\bar{o}} = \mathcal{R}([Q_2\ Q_4])$ είναι A-αναλλοίωτος και συνεπώς $A[Q_2\ Q_4] = [Q_2\ Q_4]Z$ για κάποιον πίνακα Z. Άρα

$$\hat{A}_{34} = T_3 A Q_4 = T_3 A \begin{bmatrix} Q_2 & Q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = T_3 \begin{bmatrix} Q_2 & Q_4 \end{bmatrix} Z \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = 0$$

(ε) Έχουμε: $[C_2\ C_4] = C[Q_2\ Q_4]$. Όμως $\mathcal{X}_{\bar{o}} = \mathcal{R}([Q_2\ Q_4]) \subseteq \mathcal{N}_r(C)$ που συνεπάγεται ότι

$$\begin{bmatrix} \hat{C}_2 & \hat{C}_4 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} Q_2 & Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιότητες ελεγξιμότητας/παρατηρησιμότητας των συστημάτων

$$\Sigma_i\left(\begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} \right), \ \Sigma_o\left(\begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{13} \\ 0 & \hat{A}_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_3 \end{bmatrix} \right) \ \text{και} \ \Sigma(\hat{A}_{11}, \hat{B}_1, \hat{C}_1)$$

που αναφέρονται στο Θεώρημα προκύπτουν απο το Λήμμα ελεγξιμότητας και το Λήμμα παρατηρησιμότητας του Kalman. □

5. Ελάχιστη πραγματοποίηση συναρτήσεων μεταφοράς

Επιστρέφουμε στο πρόβλημα ελάχιστης πραγματοποίησης προηγούμενης ενότητας, το οποίο συνδέεται άμεσα με τις έννοιες της ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας:

Θεώρημα: Έστω $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}$, ρητή, αυστηρά κανονική συνάρτηση μεταφοράς. Μία πραγματοποίηση $(A, B, C) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^{p\times n}$ της $\hat{G}(s)$ είναι ελάχιστη, αν και μόνο αν το σύστημα $\Sigma_i(A, B)$ είναι ελέγξιμο και το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ είναι παρατηρήσιμο.

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι το σύστημα $\Sigma_i(A, B)$ δεν είναι ελέγξιμο η το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ δεν είναι παρατηρήσιμο (η και κα δύο) αν και μόνο αν η πραγματοποίηση (A, B, C) του $\hat{G}(s)$ δεν είναι ελάχιστη.

($\Rightarrow$): Αν το $\Sigma_i(A, B)$ δεν είναι ελέγξιμο η το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ δεν είναι παρατηρήσιμο (η και τα δύο), τότε προκύπτει άμεσα από το προηγούμενο Θεώρημα (Kalman) ότι (A, B, C) δεν είναι ελάχιστη πραγματοποίηση του $\hat{G}(s)$.

($\Leftarrow$): Αντίστροφα, έστω ότι (A, B, C) είναι πραγματοποίηση της $\hat{G}(s)$ διάστασης n η οποία δεν είναι ελάχιστη. Τότε υπάρχει μία άλλη πραγματοποίηση της $\hat{G}(s)$, $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ διάστασης $\tilde{n} < n$. Επομένως:

$$\hat{G}(s) = C(sI_n - A)^{-1}B = \tilde{C}(sI_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} \Leftrightarrow Ce^{At}B = \tilde{C}e^{\tilde{A}t}\tilde{B} \ \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Παραγωγίζοντας k φορές ($k \in \mathbb{N}_0$) και υπολογίζοντας την παράγωγο στο $t = 0$ έχουμε:

$$CA^kB = \tilde{C}\tilde{A}^k\tilde{B}, \;\; k \in \mathbb{N}_0$$

Ορίζουμε

$$\tilde{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pn\times\tilde{n}} \;\text{ και }\; \tilde{\Gamma}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B} & \cdots & \tilde{A}^{n-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}\times mn}$$

(Παρατηρούμε ότι εφόσον $n > \tilde{n}$, ο πίνακας $\tilde{\Gamma}_1$ και ο πίνακας $\tilde{\Gamma}_2$ *δεν* είναι ο πίνακας παρατηρησιμότητας και ο πίνακας ελεγξιμότητας του $\Sigma_i(\tilde{A}, \tilde{B})$ και $\Sigma_o(\tilde{A}, \tilde{C})$, αντίστοιχα). Έστω Γ_o και Γ_c ο πίνακας παρατηρησιμότητας και ελεγξιμότητας του $\Sigma_o(A, C)$ και $\Sigma_i(A, B)$, αντίστοιχα, δηλ.

$$\Gamma_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pn\times\tilde{n}} \;\text{ και }\; \Gamma_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}\times mn}$$

Τότε $\tilde{\Gamma_1}\tilde{\Gamma_2} \in \mathbb{R}^{pn\times mn}$, $\Gamma_o\Gamma_c \in \mathbb{R}^{pn\times mn}$, και τα (i, j) $p \times m$ blocks των πινάκων $\tilde{\Gamma_1}\tilde{\Gamma_2}$ και $\Gamma_o\Gamma_c$ είναι ίσα, δηλ:

$$[\tilde{\Gamma_1}\tilde{\Gamma_2}]_{ij} = \tilde{C}\tilde{A}^{i+j-2}B = CA^{i+j-2}B = [\Gamma_o\Gamma_c]_{ij}$$

για κάθε $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2$. Επομένως $\tilde{\Gamma_1}\tilde{\Gamma_2} = \Gamma_o\Gamma_c$.

Αν το $\Sigma_o(A, C)$ δεν είναι παρατηρήσιμο το Θεώρημα έχει αποδειχθεί, οπότε υποθέτουμε ότι $\Sigma(A, C)$ είναι παρατηρήσιμο. Τότε $\mathrm{Rank}[\Gamma_o] = n$ (οι n στήλες του Γ_o είναι γραμμικά ανεξάρτητες) και άρα ο πίνακας Γ_o έχει αριστερό αντίστροφο, δηλ.

$$\Gamma_o^L\Gamma_o = I_n$$

Πολλαπλασιάζοντας την σχέση $\tilde{\Gamma_1}\tilde{\Gamma_2} = \Gamma_o\Gamma_c$ από αριστερά με τον πίνακα Γ_o^L έχουμε:

$$\Gamma_c = \Gamma_o^L\tilde{\Gamma}_1\tilde{\Gamma}_2$$

Όμως

$$\mathrm{Rank}[\tilde{\Gamma}_1] \leq \tilde{n} \Rightarrow \mathrm{Rank}[\Gamma_o^L\tilde{\Gamma}_1\tilde{\Gamma}_2] \leq \tilde{n} \Rightarrow \mathrm{Rank}[\Gamma_c] \leq \tilde{n} < n$$

και επόμένως το σύστημα $\Sigma_i(A, B)$ δεν είναι πλήρως ελέγξιμο. □

Το επόμενο Θεώρημα δείχνει ότι όλες οι ελάχιστες πραγματοποιήσεις συνδέονται μέσω μετασχηματισμών ισοδυναμίας.

Θεώρημα: Έστω $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}(s)$ ρητή, αυστηρά κανονική συνάρτηση μεταφοράς. Αν (A, B, C) και $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ είναι δύο ελάχιστες πραγματοποιήσεις της $\hat{G}(s)$ (διάστασης έστω n), τότε υπάρχει πίνακας $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(Q) \neq 0$, τέτοιος ώστε: $\tilde{A} = Q^{-1}AQ$, $\tilde{B} = Q^{-1}B$ και $\tilde{C} = CQ$.

Απόδειξη: Όπως και στην απόδειξη του προηγούμενου Θεωρήματος έχουμε ισότητα των παραμέτρων Markov των δύο πραγματοποιήσεων, δηλαδή $CA^kB = \tilde{C}\tilde{A}^k\tilde{B}$ γιά κάθε $k \in \mathbb{N}_0$. Έστω Γ_c και $\tilde{\Gamma}_c$ οι πίνακες ελεγξιμότητας των $\Sigma_i(A, B)$ και $\Sigma_i(\tilde{A}, \tilde{B})$, αντίστοιχα και έστω Γ_o και $\tilde{\Gamma}_o$ οι πίνακες παρατηρησιμότητας των $\Sigma_o(A, C)$ και $\Sigma_o(\tilde{A}, \tilde{B})$, αντίστοιχα. Τότε:

$$\Gamma_o\Gamma_c = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CB & CAB & \cdots & CA^{n-1}B \\ CAB & CA^2B & \iddots & CA^nB \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ CA^{n-1}B & CA^nB & \cdots & CA^{2n-2}B \end{bmatrix}$$

και

$$\tilde{\Gamma}_o\tilde{\Gamma}_c = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B} & \cdots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \cdots & \tilde{C}\tilde{A}^{n-1}\tilde{B} \\ \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^2\tilde{B} & \iddots & \tilde{C}\tilde{A}^{n}\tilde{B} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^{n}\tilde{B} & \cdots & \tilde{C}\tilde{A}^{2n-2}\tilde{B} \end{bmatrix}$$

και άρα $\Gamma_o\Gamma_c = \tilde{\Gamma}_o\tilde{\Gamma}_c$. Παρόμοια $\Gamma_o A\Gamma_c = \tilde{\Gamma}_o\tilde{A}\tilde{\Gamma}_c$. Από το προηγούμενο Θεώρημα, εφόσον (A, B, C) και $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{B})$ ελάχιστες πραγματοποιήσεις της $\hat{G}(s)$, συμπεραίνουμε ότι $\Sigma_i(A, B)$ και $\Sigma_i(\tilde{A}, \tilde{B})$ ελέγξιμα και $\Sigma_o(A, C)$ και $\Sigma_o(\tilde{A}, \tilde{C})$ παρατηρήσιμα. Επομένως $\text{Rank}(\Gamma_o) = \text{Rank}(\tilde{\Gamma}_o) = n$ και επομένως οι πίνακες Γ_o και $\tilde{\Gamma}_o$ έχουν αριστερό αντίστροφο, έστω Γ_o^L και $\tilde{\Gamma}_o^L$ αντίστοιχα. Παρόμοια $\text{Rank}(\Gamma_c) = \text{Rank}(\tilde{\Gamma}_c) = n$ και επομένως οι πίνακες Γ_c και $\tilde{\Gamma}_c$ έχουν δεξιό αντίστροφο, έστω Γ_c^R και $\tilde{\Gamma}_c^R$ αντίστοιχα. Επομένως:

$$\Gamma_o\Gamma_c = \tilde{\Gamma}_o\tilde{\Gamma}_c \Rightarrow \tilde{\Gamma}_o^L\Gamma_o\Gamma_c\tilde{\Gamma}_c^R = I_n$$

και άρα οι πίνακες $\tilde{\Gamma}_o^L\Gamma_o \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\Gamma_c\tilde{\Gamma}_c^R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι μη-ιδιάζοντες. Ορίζουμε:

$$Q = \Gamma_c\tilde{\Gamma}_c^R = [\tilde{\Gamma}_o^L\Gamma_o]^{-1}$$

Τότε $\det(Q) \neq 0$ και

$$\Gamma_o Q = \Gamma_o\Gamma_c\tilde{\Gamma}_c^R = (\Gamma_o\Gamma_c)\tilde{\Gamma}_c^R = (\tilde{\Gamma}_o\tilde{\Gamma}_c)\tilde{\Gamma}_c^R = \tilde{\Gamma}_o$$

και επόμένως από το πρώτο $p \times n$ block της παραπάνω εξίσωσης $\Gamma_o Q = \tilde{\Gamma}_o$ έχουμε $CQ = \tilde{C}$. Παρόμοια:

$$Q^{-1}\Gamma_c = \tilde{\Gamma}_o^L\Gamma_o\Gamma_c = \tilde{\Gamma}_o^L(\Gamma_o\Gamma_c) = \tilde{\Gamma}_o^L(\tilde{\Gamma}_o\tilde{\Gamma}_c) = \tilde{\Gamma}_c$$

και επομένως από το πρώτο $n\times m$ block της παραπάνω εξίσωσης $Q^{-1}\Gamma_c = \tilde{\Gamma}_c$ έχουμε $Q^{-1}B = \tilde{B}$. Επίσης:

$$Q^{-1}AQ = \tilde{\Gamma}_o^L\Gamma_o A\Gamma_c\tilde{\Gamma}_c^R = \tilde{\Gamma}_o^L(\Gamma_o A\Gamma_c)\tilde{\Gamma}_c^R = \tilde{\Gamma}_o^L(\tilde{\Gamma}_o\tilde{A}\tilde{\Gamma}_c)\tilde{\Gamma}_c^R = \tilde{A}$$

και επομένως $\Sigma(A, B, C) \sim \Sigma(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$. □

Παρατήρηση: Παρατηρούμε ότι ο πίνακας $\Gamma_o\Gamma_c$ έχει κοινό πίνακα σε κάθε block-αντιδιαγώνιο στοιχείο. Πίνακες με αυτή τη δομή ονομάζονται πίνακες block-Hankel.

Γ. Χαλικιάς, 27-3-2026