Θεωρία Ελέγχου: Συστήματα καταστάσεων χώρου

1.1 Γραμμικά και μη-γραμμικά συστήματα καταστάσεων χώρου

Μη-γραμμικά χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα καταστάσεων χώρου περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t),\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

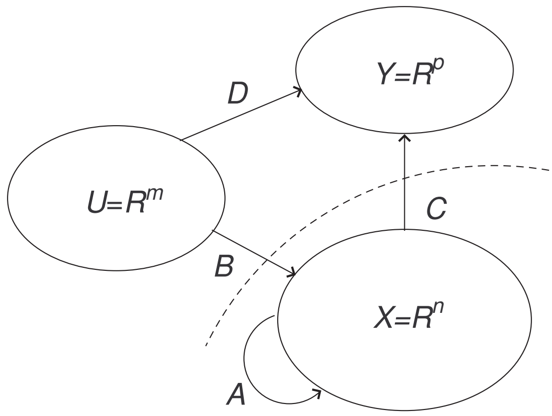
όπου $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ (διάνυσμα κατάστασης), $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ (διάνυσμα εισόδου), $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ (διάνυσμα εξόδου) και $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$. Το σύστημα είναι χρονικά αναλλοίωτο αν η μεταβλητή του χρόνου t δεν εμφανίζεται ως ανεξάρτητη μεταβλητή των συναρτήσεων $\mathbf{f}$ και $\mathbf{h}$, δηλ.

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

Στην περίπτωση αυτή η αρχική κατάσταση ορίζεται χωρίς βλάβη γενικότητας στο σημείο $t_0 = 0$. Σε γραμμικά συστήματα οι συναρτήσεις $\mathbf{f}$ και $\mathbf{h}$ είναι γραμμικές. Γραμμικά χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα περιγράφονται από εξισώσεις της μορφής:

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t),\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,\ \mathbf{y}(t) = C(t)\mathbf{x}(t) + D(t)\mathbf{u}(t)$$

όπου οι πίνακες $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ και $D(t)$ συνήθως θεωρούνται συνεχείς συναρτήσεις του t. Σε γραμμικά, χρονικά αναλλοίωτα συστήματα έχουμε $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ και $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ (σύστημα με n μεταβλητές κατάστασης, m εισόδους και p εξόδους. Διαγραμματικά (Σχήμα 1(:

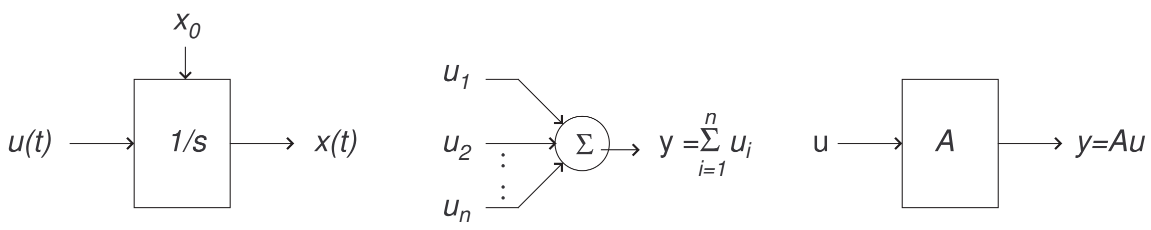


Σχήμα 1: *Χώρος καταστάσεων, εισόδου και εξόδου*

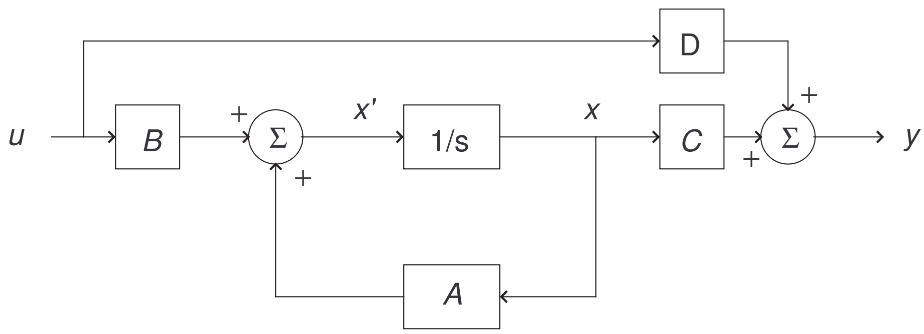
1.2 Διαγράμματα βαθμίδων

Τα διαγράμματα βαθμίδων χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση της συνδεσμολογίας συστημάτων και (σε προηγούμενα χρόνια) τη προσομοίωση τους μέσω αναλογικού υπολογιστή. Για γραμμικά συστήματα τα τρία βασικά στοιχεία διαγράμματος βαθμίδων είναι: (α) Ολοκληρωτής, (β) Αθροιστής και (γ) Πολλαπλασιαστής (Σχήμα 2).

- Ολοκληρωτής: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{u}(\tau)d\tau$ όπου $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Αν $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, τότε $\hat{\mathbf{x}}(s) = \frac{\hat{\mathbf{u}}(s)}{s}$.
- Αθροιστής: Η έξοδος είναι $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i$, όπου $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Πολλαπλασιαστής: Αν η είσοδος είναι $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ και $A \in \mathbb{R}^{p\times m}$ η έξοδος είναι $\mathbf{y} = A\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$.



Σχήμα 2: *Ολοκληρωτής, Αθροιστής, Πολλαπλασιαστής*



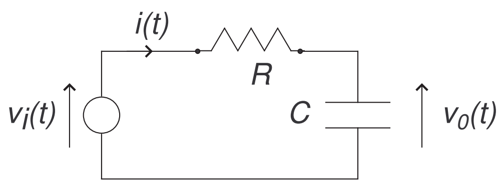
Σχήμα 3: *Διαγραμμα βαθμίδω, Σύστημα καταστάσεων χώρου*

Το διάγραμμα βαθμίδων του γενικού γραμμικού, χρονικά αναλλοίωτου συστήματος καταστάσεων χώρου είναι ως εξής (Σχήμα 3):

1.3 Στοιχεία μοντελοποίησης

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε το πρόβλημα κατασκευής μοντέλου καταστάσεων χώρου που αντιστοιχεί σε φυσικά συστήματα (μηχανικά, ηλεκτρικά, κλπ).

Παράδειγμα: Κύκλωμα RC (Σχήμα 4) όπου: $i(t)$ ηλεκτρικό ρεύμα, $v_i(t)$ τάση εισόδου και $v_o(t)$ τάση εξόδου.



Σχήμα 4: *Κύκλωμα RC*

Από τον νόμο Kirchoff έχουμε:

$$i(t) = \frac{v_i(t) - v_o(t)}{R} = C\frac{dv_o}{dt} \Rightarrow \frac{dv_o(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}v_o(t) + \frac{1}{RC}v_i(t)$$

Ορίζοντας: $x(t) = y(t) = v_o(t)$ και $u(t) = v_i(t)$ έχουμε:

$$x'(t) = -\frac{1}{RC}x(t) + \frac{1}{RC}u(t),\ y(t) = x(t)$$

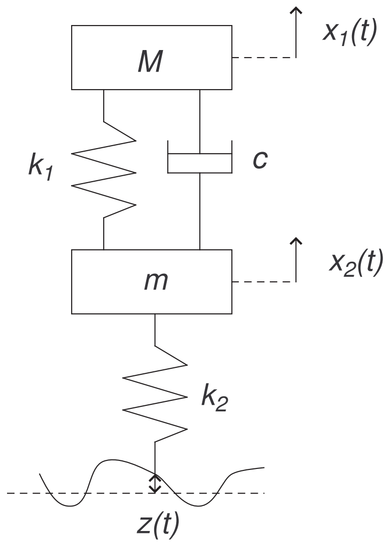
και άρα $A = -\frac{1}{RC}$, $B = \frac{1}{RC}$, $C = 1$ και $D = 0$.

Παράδειγμα: Μηχανικό σύστημα ανάρτησης (1/4 αυτοκινήτου, Σχήμα 5)

Εδώ M είναι η μάζα 1/4 οχήματος, m η μάζα συστήματος τροχού, k_1 και k_2 οι σταθερές Hook ελατηρίων και c ο συντελεστής απόσβεσης. Επίσης, x_1 και x_2 η μετατοπίση της μάζας M και m, αντίστοιχα, από τις θέσεις ισορροπίας και z η διαταραχή δρόμου. Δυναμικές εξισώσεις:

$$Mx_1'' = -k_1(x_1 - x_2) - c(x_1' - x_2'), \quad mx_2'' = k_1(x_1 - x_2) + c(x_1' - x_2') - k_2(x_2 - z)$$

Ορίζοντας διάνυσμα κατάστασης: $\mathbf{x}^T = [x_1\ x_1'\ x_2\ x_2']$ και είσοδο διαταραχής $u = z$ έχουμε:



Σχήμα 5: *Παθητική ανάδραση 1/4 αυτοκινήτου*

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_1'' \\ x_2' \\ x_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{M} & -\frac{c}{M} & \frac{k_1}{M} & \frac{c}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m} & \frac{c}{m} & -\frac{k_1+k_2}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1' \\ x_2 \\ x_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2}{m} \end{bmatrix} z$$

που είναι της μορφής $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + B_d z(t)$. Οι πίνακες εξόδου εξαρτώνται από ποιούς αισθητήρες έχουμε. Έστω ότι μετράμε: (α) Σχετική μετατόπιση $x_1 - x_2$ και (β) επιτάχυνση x_1'' μάζας m_1. Τότε:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{k_1}{M} & -\frac{c}{M} & \frac{k_1}{M} & \frac{c}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1' \\ x_2 \\ x_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} z$$

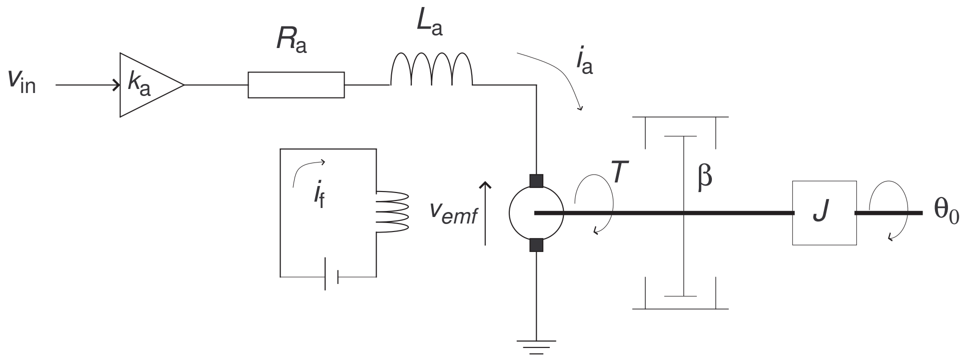
που είναι της μορφής $\mathbf{y} = C\mathbf{x} + Dz$.

Παράδειγμα: Ηλεκτροκινητήρας συνεχούς ρεύματος (DC servo-motor), Sq’hma 6

Οι μεταβλητές του συστήματος είναι:

- v_{in}: Τάση εισόδου
- i_a: Επαγωγικό ρεύμα κινητήρα

- R_a, L_a: Παράμετροι αντίστασης και επαγωγής κινητήρα
- k_a: Συντελεστής ενίσχυσης (κέρδους) ενισχυτή
- i_f: Ρεύμα πεδίου ηλεκτρομαγνήτη
- k_T: Σταθερά ροπής κινητήρα
- k_v: Σταθερά αντίθετης ηλεκτροδυναμικής δύναμης (back e.m.f.) κινητήρα
- J: Αδρανειακό φορτίο
- β: Συντελεστής απόσβεσης



Σχήμα 6: *Ηλεκτροκινητήρας συνεχούς ρεύματος*

Οι εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα είναι:

- $J\theta_0'' = T - \beta\theta_0'$: (Νόμος του Νεύτονα για περιστροφική κίνηση).
- $v_a - v_{emf} = R_a i_a + L_a i_a'$: Νόμος του Kirchoff, ιδανικές εξισώσεις αντίστασης και πηνίου
- $T = k_T i_a$, $v_{emf} = k_v \theta_0'$: Ηλεκτρο-μηχανική σύνδεση, νόμος Faraday

Επιλέγοντας ως μεταβλητές κατάστασης: $x_1 = \theta_0$, $x_2 = \theta_0'$, $x_3 = i_a$, $u = v_{in}$ και $y = \theta_0$, οι εξισώσεις του συστήματος γράφεται σε μορφή καταστάσεων χώρου ως:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta/J & k_t/J \\ 0 & -k_v/L_a & -R_a/L_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_a/L_a \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

2.1 Μεταχηματισμός Laplace:

Ορισμός: Έστω $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης y ορίζεται από το γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\hat{y}(s) = \int_0^\infty y(t) e^{-st} dt$$

αν αυτό συγκλίνει για κάποιο $s \in \mathbb{C}$. Αν το ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάθε $s \in \Omega \subseteq \mathbb{C}$, τότε το Ω είναι περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού. Ισοδύναμοι συμβολισμοί για τον μετασχηματισμό $\hat{y}(s)$ είναι $Y(s)$ και $\mathcal{L}(y(t))$.

Παράδειγμα: Έστω $y(t) = 1$, $t \geq 0$ (συνάρτηση μοναδιαίου βήματος). Τότε:

$$\hat{y}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = -\left.\frac{e^{st}}{s}\right|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s} - \lim_{t\to\infty} \frac{e^{st}}{s} = \frac{1}{s}$$

με περιοχή σύγκλισης $\Omega = \{s : \mathrm{Re}(s) > 0\}$.

Παράδειγμα: Έστω $y(t) = e^{at}$, $t \geq 0$ (εκθετική συνάρτηση). Τότε:

$$\hat{y}(s) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = -\left.\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s-a} - \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} = \frac{1}{s-a}$$

με περιοχή σύγκλισης $\Omega = \{s : \mathrm{Re}(s) > a\}$.

Ένας πίνακας μετασχηματισμού Laplace συνηθισμένων συναρτήσεων είναι ο παρακάτω:

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
1	$1/s$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
t	$1/s^2$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
t^2	$2/s^3$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t^{n-1}e^{-at}$	$\frac{(n-1)!}{(s+a)^n}$

Πίνακας μετασχηματισμού Laplace

Ορισμός: Μία συνάρτηση $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ονομάζεται εκθετικής τάξης καθώς $t \to \infty$ αν και μόνο αν υπάρχουν μη αρνητικές σταθερές M, c και T τέτοιες ώστε $|f(t)| \leq Me^{ct}$ για κάθε $t \geq T$. Η σταθερά c ονομάζεται εκθέτης φραγής.

Το επόμενο Θεώρημα δίνει μία ικανή συνθήκη για την ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace:

Θεώρημα: Εάν η συνάρτηση $f(t)$, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης καθώς $t \to \infty$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{f}(s)$ υπάρχει. Ειδικότερα, αν η $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης καθώς $t \to \infty$ με εκθέτη φραγής c, τότε η $\hat{f}(s)$ υπάρχει για κάθε $s \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}(s) > c$.

Μερικές χρήσιμες ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace δίνονται στην συνέχεια αυτής της ενότητας (χωρίς αποδείξεις):

Θεώρημα: Ο μετασχηματισμός Laplace είναι γραμμικός τελεστής, δηλ. $\mathcal{L}(f + g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$ και $\mathcal{L}(cf) = c\mathcal{L}(f)$, $c \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα: Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(t)$ και $g(t)$ είναι τμηματικά συνεχείς και εκθετικής τάξης καθώς $t \to \infty$ (και άρα οι συναρτήσεις $\hat{f}(s)$ και $\hat{g}(s)$ υπάρχουν). Αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\hat{f}(s) = \hat{g}(s)$ για κάθε s σε περιοχή $\mathrm{Re}(s) > c$, τότε $f(t) = g(t)$ σε όλα τα υποδιαστήματα του $[0, \infty)$ στα οποία οι f και g είναι συνεχείς.

Παρατήρηση: Από το παραπάνω Θεώρημα, δύο τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις f και g με $\hat{f} = \hat{g}$ μπορεί να διαφέρουν μόνο στα σημεία ασυνέχειας. Επόμένως στο σύνολο των συνεχών συναρτήσεων εκθετικής τάξης καθώς $t \to \infty$, ο μετασχηματισμός Laplace είναι $1 - 1$ και ο αντίστροφος μετασχηματισμός υπάρχει (και είναι επίσης γραμμικός τελεστής).

Θεώρημα (μετασχηματισμός Laplace παραγώγου): Έστω ότι η συνάρτηση $f(t)$ και $f'(t)$ είναι συνεχής και τμηματικά συνεχής, αντίστοιχα, στο διάστημα $[0, T]$ για όλα τα $T > 0$. Έστω ακόμα ότι η f είναι εκθετικής τάξης καθώς $t \to \infty$. Τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της $f'(t)$ και δίνεται από την σχέση: $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$.

Παρατήρηση: Αν οι υποθέσεις του παραπάνω Θεωρήματος ισχύουν για την συνάρτηση $g(t) = f'(t)$, τότε με διπλή εφαρμογή του Θεωρήματος έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) = s[s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)] - f'(0) \\ &= s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

και γενικά, κάτω από αντίστοιχη υπόθεση:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Η μέθοδος μετασχηματισμού των παραγώγων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων μετατρέποντας την διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική, επιλύοντας την αλγεβρική εξίσωση ως προς $\mathcal{L}\{f(t)\}$ και αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό.

Παράδειγμα: Έστω το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών: $y'' + 3y' + 2y = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Λόγω γραμμικότητας και εφόσον η (μοναδική) λύση είναι εκθετικής τάξης και κλάσης $\mathcal{C}^\infty$,

$$(s^2\hat{y}(s) - s) + 3(s\hat{y}(s) - 1) + 2\hat{y}(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow (s^2 + 3s + 2)\hat{y} = \frac{1}{s} + s + 3 \Rightarrow (s+1)(s+2)\hat{y} = \frac{1}{s} + s + 3$$

Ισοδύναμα,

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

Αναλύοντας σε απλά κλάσματα,

$$\hat{y}(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1/2}{s+2} + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1/2}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1/2}{s+2}$$

Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό,

$$y(t) = \frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

για $t \geq 0$.

Θεώρημα (μετασχηματισμός Laplace ολοκληρώματος): Αν $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής συνάρτηση για $t \geq 0$ και εκθετικής τάξης, δηλ. $|f(t)| \leq Me^{ct}$, για $t \geq T$, τότε

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s}, \text{ για } \mathrm{Re}(s) > c,$$

όπου $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, η ισοδύναμα

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

Θεώρημα (μετατόπισης): Αν για μία συνάρτηση $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace: $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ για $\mathrm{Re}(s) > c$, τότε ο $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}$ υπάρχει για $\mathrm{Re}(s) > a + c$ και $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$.

Θεώρημα: Αν $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, τότε $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^s} F(s)$.

Θεώρημα: Έστω οτι $f : [0, \infty)$ είναι εκθετικής τάξης καθώς $t \to \infty$ και $\hat{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Τότε $\hat{f}(s) \to 0$ καθώς $\mathrm{Re}(s) \to \infty$.

Ορισμός (συνέλιξη συναρτήσεων): Η συνέλιξη δύο τμηματικά συνεχών συναρτήσεων $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως: $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$.

Παρατήρηση: Η συνέλιξη ικανοποιεί την αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλ. $f * g = g * f$.

Θεώρημα (συνέλιξης): Αν οι συναρτήσεις $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι τμηματικά συνεχείς και εκθετικής τάξης καθώς $t \to \infty$, τότε η συνέλιξη $f * g$ είναι εκθετικής τάξης και $\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}$.

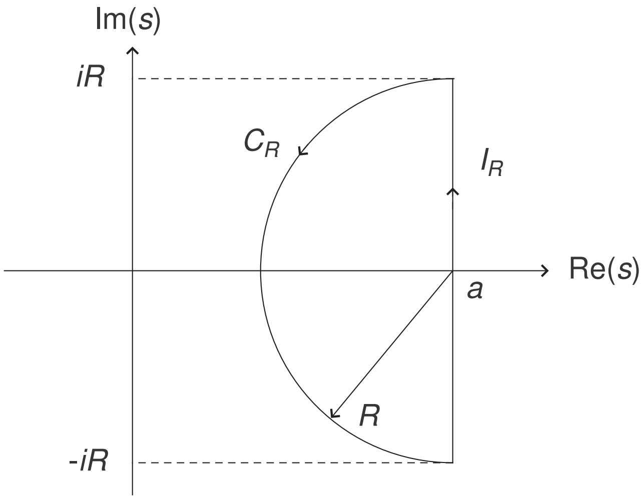
Θεώρημα (αρχικής τιμής): Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{f}(s)$ υπάρχει. Αν η f είναι φραγμένη στο διάστημα $(0, \infty)$ και το όριο $\lim_{t \to 0^+} f(t)$ υπάρχει, τότε $\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} s\hat{f}(s)$.

Θεώρημα (τελικής τιμής): Έστω ότι $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ και ότι η $\hat{f}(s)$ υπάρχει. Έστω ότι κάθε πόλος της $\hat{f}(s)$ είναι στο $\mathbb{C}_- = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) < 0\}$ η στο σημείο $s = 0$ και ότι αν η $\hat{f}(s)$ έχει πόλο στο σημείο $s = 0$, τότε ο πόλος αυτός είναι απλός. Τότε $s\hat{f}(s) \to L \in \mathbb{R}$ καθώς $s \to 0$ και $\lim_{t \to \infty} f(t) = L$.

Αντίστροφος μετασχηματισμός μέσω μιγαδικής ανάλυσης: Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην εξίσωση Fourier-Mellin

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \hat{f}(s)e^{st}ds$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται κατά μήκος της ευθείας $\mathrm{Re}(s) = a$, όπου η παράμετρος a επιλέγεται έτσι ώστε η συνάρτηση $\hat{f}(s)$ να είναι αναλυτική στο ημιεπίπεδο $\mathrm{Re}(s) \geq a$. Εξετάζουμε την καμπύλη D_R με κέντρο το σημείο $(a, 0)$ και ακτίνα R (Σχήμα 7). Στο όριο $R \to \infty$, η καμπύλη περιέχει την περιοχή



Σχήμα 7: *Διαδρομή επικαμπύλιου ολοκληρώματος Fourier-Mellin*

$\mathrm{Re}(s) < a$ η οποία (λόγω της επιλογής της παραμέτρου a) περιέχει όλα τα σημεία s_i $i = 1, 2, \cdots, m$, στα οποία η συνάρτηση $\hat{f}(s)$ δεν είναι αναλυτική. Εφόσον $D_R = I_R \cup C_R$ έχουμε,

$$\oint_{D_R} \hat{f}(s)e^{st}ds = \int_{I_R} \hat{f}(s)e^{st}ds + \int_{C_R} \hat{f}(s)e^{st}ds$$

Από το Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων του Cauchy το ολοκλήρωμα είναι ίσο στο όριο $R \to \infty$ με $2\pi i \sum_{i=1}^m \mathrm{Res}(\hat{f}(s)e^{st}, s_i)$. Κάτω από την υπόθεση ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος της καμπύλης C_R τείνει στο μηδέν καθώς $R \to \infty$, έχουμε

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \hat{f}(s) e^{st} ds = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Res}(\hat{f}(s) e^{st}, s_i)$$

Ικανή συνθήκη ώστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος της καμπύλης C_R να τείνει στο μηδέν καθώς $R \to \infty$ είναι

$$\lim_{R\to\infty} \max_{s\in C_R} |\hat{f}(s)| = 0$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν μία συνάρτηση $\Phi(s)$ έχει πόλο πολλαπλότητας k στο σημείο $s = s_i$, το αντίστοιχο ολοκληρωτικό υπόλοιπο είναι

$$\frac{1}{(k-1)!} \lim_{s\to s_i} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \Big((s - s_i)^k \Phi(s) \Big)$$

Η παραπάνω ανάλυση συνοψίζεται στο παρακάτω Θεώρημα:

Θεώρημα: Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ με μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}(s)$, $\mathrm{Re}(s) \geq a$. Τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός $f(t) = \mathcal{L}\{\hat{f}(s)\}$ δίνεται ως:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{a-iT}^{a+iT} e^{st} \hat{f}(s) ds$$

όπου το ολοκλήρωμα υπολογίζεται στην ευθεία $\mathrm{Re}(s) = a$ του μιγαδικού επιπέδου, όπου το a είναι μεγαλύτερο από το πραγματικό μέρος κάθε ιδιάζοντος σημείου της $\hat{f}(s)$ και όπου η $\hat{f}$ είναι φραγμένη πάνω στην ευθεία (π.χ. η ευθεία ανήκει στην περιοχή σύγκλισης).

Παρατήρηση: Για ρητές συναρτήσεις ο υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού μέσω απλών κλασμάτων είναι απλούστερος από την μέθοδο Fourier-Mellin.

Παρατήρηση: Στην συνέχεια θα εξετάσουμε συναρτήσεις $f(t)$ (συναρτήσεις Bohl) ο μεταχηματισμός Laplace των οποίων, $\hat{f}(s)$, ορίζει ρητές και κανονικές συναρτήσεις. (Μία συνάρτηση $\hat{f}(s)$ είναι ρητή αν είναι το πηλίκο δύο πολυωνύμων $p(s)$ και $q(s)$, δηλ. αν $\hat{f}(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$. Στη περίπτωση αυτή η συνάρτηση λέγεται κανονική αν $\partial p(s) \leq \partial q(s)$, δηλ. αν ο βαθμός του πολυωνύμου $p(s)$ δεν υπερβαίνει το βαθμό του $q(s)$ - και αυστηρά κανονική αν $\partial p(s) < \partial q(s)$. Η κλάση των συναρτήσεων αυτών μπορεί να περιγράψει την συμπεριφορά όλων των γραμμικών, χρονικά αναλλοίωτων δυναμικών συστημάτων.

Έστω $\hat{f}(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ ρητή και κανονική συνάρτηση, όπου τα πολυώνυμα p και q είναι πρώτα μεταξύ τους. Τότε, ένας μιγαδικός αριθμός $\lambda \in \mathbb{C}$ λέγεται πόλος της $\hat{f}(s)$ αν $\lim_{s\to\lambda} \hat{f}(s) = \infty$. Λέμε επίσης ότι ο $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι πόλος τάξης m της $\hat{f}$ αν είναι πόλος της $\hat{f}$ και ο m είναι ο μικρότερος ακέραιος τέτοιος ώστε ο λ δεν είναι πόλος της $(s - \lambda)^m \hat{f}(s)$.

Ορισμός (Συνάρτήσεις Bohl): Συνάρτηση $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ που είναι γραμμικός συνδιασμός συναρτήσεων της μορφής: $t^k e^{\lambda t}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, ονομάζεται συνάρτηση Bohl. Οι αριθμοί λ που εμφανίζονται στον γραμμικό συνδιασμό (δεν απαλείφονται) λέγονται χαρακτηριστικοί εκθέτες της συνάρτησης. Το σύνολο των χαρακτηριστικών εκθετών συνάρτησης Bohl $p(t)$ ονομάζεται το φάσμα της συνάρτησης και συμβολίζεται ως $\sigma(p)$.

Θεώρημα: Αν p και q συναρτήσεις Bohl, τότε $p + q$, pq και p' είναι επίσης συναρτήσεις Bohl. Επίσης: $\sigma(pq) \subseteq \sigma(p)+\sigma(q)$, $\sigma(p+q) \subseteq \sigma(p)\cup\sigma(q)$ και $\sigma(p') \subseteq \sigma(p)$. Επιπλέον, $r(t) = \int_0^t p(\tau)d\tau$ είναι συνάρτηση Bohl και $\sigma(r) \subseteq \sigma(p) \cup \{0\}$.

Παρατήρηση: Κάθε συνάρτηση Bohl είναι κλάσης $\mathcal{C}^\infty$ και εκθετικής τάξης. Άρα οι υποθέσεις των Θεωρημάτων της ενότητας αυτομάτως ικανοποιούνται.

Παράδειγμα: Έστω $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $u(t) = e^{at}$. Από προηγούμενο Θεώρημα:

$$u'(t) = au(t) \Rightarrow s\hat{u}(s) - u(0) = a\hat{u}(s) \Rightarrow \hat{u}(s) = \frac{1}{s-a}$$

Γενικότερα, αν $u_k(t) := t^k e^{at}$, $k \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$, τότε

$$u_k'(t) = kt^{k-1}e^{at} + at^k e^{at} \Rightarrow u_k'(t) = ku_{k-1}(t) + au_k(t)$$

και επομένως

$$s\hat{u}_k(s) = k\hat{u}_{k-1}(s) + a\hat{u}_k(s) \Rightarrow \hat{u}_k(s) = \frac{k}{s-a}\hat{u}_{k-1}(s)$$

Επαγωγικά, $\hat{u}_k(s) = \frac{k!}{(s-a)^{k+1}}$.

Θεώρημα: Μιά συνάρτηση $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ εκθετικής τάξης καθώς $t \to \infty$ είναι συνάρτηση Bohl αν και μόνο αν η $\hat{u}(s)$ είναι ρητή συνάρτηση, δηλ. πηλίκο δύο πολυωνύμων.

Απόδειξη: Από το προηγούμενο παράδειγμα $\mathcal{L}\{t^k e^{at}\} = \frac{k!}{(s-a)^{k+1}}$ που είναι ρητή συνάρτηση. Επομένως, λόγω γραμμικότητας, κάθε συνάρτηση Bohl έχει ρητό μετασχηματισμό Laplace. Αντίστροφα, έστω ότι η f είναι εκθετικής τάξης καθώς $t \to \infty$ και ότι η $\hat{f}(s)$ είναι ρητή συνάρτηση. Τότε, από προηγούμενη ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace: $\hat{f}(s) \to 0$ καθώς $\mathrm{Re}(s) \to \infty$, δηλαδή ο βαθμός του πολυωνύμου στον αριθμητή της $\hat{f}(s)$ είναι αυστηρά μικρότερος από τον βαθμό του πολυωνύμου στον παρανομαστή της $\hat{f}(s)$. Συνεπώς η $\hat{f}(s)$ γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός κλασμάτων της μορφής $c(s-a)^{-k}$, $c \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Κάθε όρος αυτού του αθροίσματος είναι συνάρτηση Bohl (της μορφής $ct^{k-1}e^{at}/(k-1)!$) και επομένως το ίδιο ισχύει για τον γραμμικό συνδιασμό τους. $\square$

Στην συνέχεια εξετάζουμε την εκθετική συνάρτηση e^{At} όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Η συνάρτηση προκύπτει από τη λύση $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$ του αυτόνομου γραμμικού, χρονικά αναλλοίωτου συστήματος: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Από την γραμμικότητα του μετασχηματισμού Laplace και την ιδιότητα της παραγώγου προκύπτει ότι (εφόσον $e^{At} \in \mathcal{C}^\infty$): $s\hat{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{x}_0 = A\hat{\mathbf{x}}(s)$, και επομένως $\hat{\mathbf{x}}(s) = (sI - A)^{-1}\mathbf{x}_0$, $\mathrm{Re}(s) > \max\{\mathrm{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$.

Θεώρημα: Τα στοιχεία της συνάρτησης e^{At}, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, είναι συναρτήσεις Bohl.

Απόδειξη: Από την επόμενη ενότητα προκύπτει ότι:

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI_n - A)^{-1}, \ \ \mathrm{Re}(s) > \max\{\mathrm{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$$

Επομένως,

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = \frac{\mathrm{adj}(sI_n - A)}{\det(s_nI - A)} := \frac{N(s)}{\det(sI - A)}, \ \ \mathrm{Re}(s) > \max\{\mathrm{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$$

και

$$\mathcal{L}\{(e^{At})_{ij}\} = \frac{N_{ij}(s)}{\det(sI - A)} = \frac{N_{ij}(s)}{\phi(s)}, \ \ \mathrm{Re}(s) > \max\{\mathrm{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$$

όπου $\phi(s)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A. Έχουμε $\partial N_{ij}(s) < \partial\phi(s) = n$ για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$ και από το προηγούμενο Θεώρημα κάθε στοιχείο της e^{At} είναι συνάρτηση Bohl. Εφόσον το πολυώνυμο $\phi(s)$ εμφανίζεται στον παρονομαστή κάθε στοιχείου του $(sI_n - A)^{-1}$, οι χαρακτηριστικοί εκθέτες είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A. $\square$

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την (γενικευμένη) συνάρτηση κρούσης $\delta(t)$ και τον μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}\{\delta(t)\}$.

Ορισμός (Ακολουθία Dirac): Μία ακολουθία συναρτήσεων (d_n), $d_n : \mathrm{PC}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ (τμηματικά συνεχών συναρτήσεων από το $[0, \infty)$ στο $\mathbb{R}$), τέτοια ώστε:

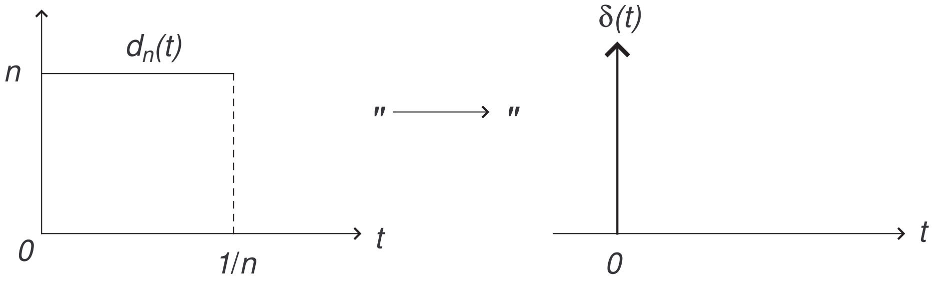
(i) $d_n(t) \geq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Υπάρχει ακολουθία (τ_n), $\tau_n > 0$ και $\tau_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(iii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $d_n(t) = 0$ αν $t > \tau_n$ και $\int_0^\infty d_n(\tau)d\tau = 1$

Ένα παράδειγμα ακολουθίας Dirac είναι η εξής. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε:

$$d_n(t) = \begin{cases} n \text{ αν } \ t \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 \ \ t > \frac{1}{n} \end{cases}$$



Σχήμα 8: *Παράδειγμα ακολουθίας Dirac*

Η ακολουθία $d_n(t)$ έχει τις επιθυμητές ιδιότητες του ορισμού. Επίσης:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty d_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} ndt = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{n} = 1$$

Συμβολικά γράφουμε:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty d_n(t)dt = 1 \ \ \text{“}=\text{”} \ \int_0^\infty \text{“} \lim_{n\to\infty} d_n(t)\text{”} dt = \int_0^\infty \delta(t)dt$$

Η έκφραση αυτή έχει αυστηρά συμβολικό χαρακτήρα. Η εναλλαγή ορίου και ολοκληρώματος δεν έχει νόημα καθως το όριο “$\lim_{n\to\infty} d_n(t)$” δεν ορίζει συνάρτηση. Η $\delta(t)$ ορίζεται ως γενικευμένη συνάρτηση (κατανομή).

Αν $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f(t)d_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} nf(t)dt$$

Από το Θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα, υπάρχει $t_n \in [0, \frac{1}{n}]$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} nf(t)dt = \lim_{n\to\infty} f(t_n) \int_0^{\frac{1}{n}} ndt = \lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(0)$$

εφόσον η f είναι συνεχής και $t_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Συμβολικά πάλι γράφουμε:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f(t)d_n(t)dt \text{“}=\text{”} \int_0^\infty f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

Παρόμοια για $a \in \mathbb{R}_+$ συμβολικά γράφουμε: $\int_0^\infty f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$.

Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace της $\delta(t)$. Έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-st}d_n(t)dt = e^{-st}\big|_{t=0} = 1$$

και συμβολικά γραφουμε $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ με περιοχή σύγκλισης όλο το $\mathbb{C}$.

3.1. Απόκριση γραμμικών, χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων καταστάσεων χώρου

Έστω το αυτόνομο σύστημα $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Είναι γνωστό (Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις) ότι η λύση του συστήματος είναι μοναδική σε όλο το $\mathbb{R}$ και δίνεται ως $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$. (Επαλήθευση: Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης e^{At} έχουμε: $\mathbf{x}' = Ae^{At}\mathbf{x}_0 = A(e^{At}\mathbf{x}_0) = A\mathbf{x}(t)$ και επομένως $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$ είναι λύση του διαφορικού συστήματος. Επιπλέον, αφού $e^{At}\mathbf{x}_0\big|_{t=0} = e^{A0}\mathbf{x}_0 = I_n\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$, η λύση αυτή ικανοποιεί και την αρχική συνθήκη και άρα είναι (η μοναδική) λύση του Π.Α.Τ.

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace:

$$s\hat{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{x}_0 = A\mathbf{x}(s) \Rightarrow (sI_n - A)\hat{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0$$

και άρα

$$\hat{\mathbf{x}}(s) = (sI_n - A)^{-1}\mathbf{x}_0,\ \ \mathrm{Re}(s) > \max\{\mathrm{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$$

Επομένως,

$$\hat{\mathbf{x}}(s) = (sI_n - A)^{-1}\mathbf{x}_0 = \mathcal{L}\{e^{At}\}\mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI_n - A)^{-1}$$

εφόσον το $\mathbf{x}_0$ είναι αυθαίρετο διάνυσμα σου $\mathbb{R}^n$. Από αποτέλεσμα της προηγούμενης ενότητας, τα στοιχεία του πίνακα $e^{At} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι συναρτήσηεις Bohl (και τα στοιχεια του $\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI_n - A)^{-1}$ ρητές, αυστηρά κανονικές συναρτήσεις).

Στη συνέχεια εξετάζουμε το συνολικό σύστημα καταστάσεων χώρου (με είσοδο και έξοδο):

$$\Sigma(A, B, C, D) : \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ και $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

Η λύση του συστήματος προκύπτει με την μέθοδο “μεταβολής σταθερών ”:

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \Rightarrow e^{-At}\mathbf{x}'(t) - e^{-At}A\mathbf{x}(t) = e^{-At}B\mathbf{u}(t) \Rightarrow (e^{-At}\mathbf{x}(t))' = e^{-At}B\mathbf{u}(t)$$

Ολοκληρώνοντας:

$$e^{-At}\mathbf{x}(t) = e^{-At}\mathbf{x}(t))\big|_{t=0} + \int_0^t e^{-A\tau}B\mathbf{u}(\tau)d\tau = \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{-A\tau}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

και επομένως:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau = e^{At}\mathbf{x}_0 + e^{At}B * \mathbf{u}(t)$$

όπου “ * ”συμβολίζει την συνέλιξη συναρτήσεων. Επίσης

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau + D\mathbf{u}(t)$$

Ισοδύναμα

$$\mathbf{y}(t) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 + Ce^{At}B * \mathbf{u}(t) + D\mathbf{u}(t) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 + (Ce^{At}B + D\delta(t)) * \mathbf{u}(t)$$

3.2 Συνάρτηση μεταφοράς

Εξετάζουμε το σύστημα καταστάσεων χώρου:

$$\Sigma(A,B,C,D) : \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ και $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$. Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace:

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \Rightarrow s\hat{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{x}_0 = A\hat{\mathbf{x}}(s) + B\hat{\mathbf{u}}(s) \Rightarrow (sI_n - A)\hat{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0 + B\hat{\mathbf{u}}(s)$$

και επομένως

$$\hat{\mathbf{x}}(s) = (sI_n - A)^{-1}\mathbf{x}_0 + (sI_n - A)^{-1}B\hat{\mathbf{u}}(s),\ \ \mathrm{Re}(s) > \max\{\mathrm{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$$

και

$$\hat{\mathbf{y}}(s) = C(sI_n - A)^{-1}\mathbf{x}_0 + (C(sI_n - A)^{-1}B + D)\hat{\mathbf{u}}(s)$$

Έστω $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Τότε

$$\hat{\mathbf{y}}(s) = \hat{G}(s)\hat{\mathbf{u}}(s),\ \ \hat{G}(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$$

όπου $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}(s)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος. Η συνάρτηση μεταφοράς είναι χρήσιμη στην Θεωρία γραμμικών συστημάτων και γραμμικού ελέγχου για δύο κυρίως λόγους: (i) Μετατρέπει το πρόβλημα σχεδίασης αντισταθμιστή ανάδρασης σε αλγεβρικό πρόβλημα, και (ii) επιτρέπει την ανάλυση του προβλήματος στο πεδίο των συχνοτήτων.

Γράφουμε:

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(sI_n - A)}{\det(sI_n - A)} = \frac{\mathrm{adj}(sI_n - A)}{\phi(s)}$$

όπου $\phi(s)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A. Επομένως:

$$\hat{G}(s) = \frac{C\mathrm{adj}(sI_n - A)B}{\phi(s)} + D = \frac{C\mathrm{adj}(sI_n - A)B + \phi(s)D}{\phi(s)} := \frac{N(s)}{\phi(s)}$$

όπου $N(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}[s]$. Έχουμε: $\partial\phi(s) = n$ και $\partial[\mathrm{adj}(sI_n - A)]_{ij} \le n-1,\ (i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2$. Επομένως:

$$D_{ij} \ne 0 \Rightarrow \partial N_{ij}(s) = n = \partial\phi(s),\ \ D_{ij} = 0 \Rightarrow \partial N_{ij}(s) \le n-1 < \partial\phi(s) = n$$

Αν για κάθε ζεύγος $(i,j) \in \{1,2,\dots,p\}\times\{1,2,\dots,m\}$, έχουμε $D_{ij} = 0$, τότε $\partial N_{ij}(s) < \partial\phi(s) = n$ γιά κάθε (i,j) και η συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s)$ λεγεται αυστηρά κανονική. Αν για ένα τουλάχιστον ζεύγος $(i,j) \in \{1,2,\dots,p\}\times\{1,2,\dots,m\}$ έχουμε $D_{ij} \ne 0$, τότε για αυτό το ζεύγος έχουμε $\partial N_{ij}(s) = \partial\phi(s) = n$ και η συνάρτηση μεταφοράς λεγεται (απλά) κανονική

Παράδειγμα: Έστω σύστημα $\Sigma(A,B,C,0)$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Τότε:

$$\phi(s) = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{1}{2} & s+\frac{3}{2} \end{bmatrix} = s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{1}{2} = (s+1)(s+\frac{1}{2})\ \text{ και }\ \mathrm{adj}(sI_2 - A) = \begin{bmatrix} s+\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & s \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}\frac{1}{(s+1)(s+\frac{1}{2})} = \frac{1/2}{(s+1)(s+\frac{1}{2})} = \frac{1}{(s+1)(2s+1)}$$

Παρατηρούμε ότι οι πόλοι του συστήματος $\{-1, -\frac{1}{2}\}$ ταυτίζονται με το $\sigma(A)$ (στην γενική περίπτωση $\{$πόλοι του $\hat{G}(s)\} \subseteq \sigma(A)$).

3.3 Κρουστική απόκριση: Εξετάζουμε πάλι γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα καταστάσεων χώρου:

$$\Sigma(A, B, C, D) : \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ και $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$. Από προηγούμενη ανάλυση η λύση του συστήματος είναι:

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = e^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau = e^{At}\mathbf{x}_0 + (e^{At}B) * u(t)$$

και

$$\mathbf{y}(\mathbf{t}) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau + Du(t) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 + (Ce^{At}B) * \mathbf{u}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

Έστω ότι $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Τότε:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^{(1)}(t) + \mathbf{y}^{(2)}(t),\ \ \mathbf{y}^{(1)}(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau = (Ce^{At}B) * \mathbf{u}(t),\ \ \mathbf{y}^{(2)}(t) = D\mathbf{u}(t)$$

Εξετάζουμε πρώτα την συνάρτηση $\mathbf{y}^{(1)}(t)$ που είναι η συνάρτηση εξόδου του συστήματος όταν $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ και $D = 0$. Έστω $g(t) = Ce^{At}B$. Τότε:

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = \int_0^t g(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Έστω ότι $\mathbf{u}(t) = \mathbf{e}_l\delta(t)$ όπου $\mathbf{e}_l$ η l-στήλη του μοναδιαίου πίνακα I_m (δηλ. $\mathbf{e}_l = (I_m)_l$). Τότε:

$$\hat{\mathbf{y}}^{(1)}(s) = \mathcal{L}\{[g(t)]\} \cdot \mathcal{L}\{\mathbf{e}_l\delta(t)\} = C(sI - A)^{-1}B\mathbf{e}_l,\ l = 1, 2, \ldots, m$$

Επομένως η k-συνιστώσα της $\mathbf{y}^{(1)}(t)$ είναι:

$$y_k^{(1)}(t) = [g(t)]_{kl} := g_{kl}(t) = \mathbf{C}_k^T e^{At}\mathbf{B}_l(t),\ \ k \in \{1, 2, \ldots, p\},\ l \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

όπου $\mathbf{C}_k^T$ η k-γραμμή του πίνακα C και $\mathbf{B}_l$ η l-στήλη του πίνακα B.

Με την επιλογή $\mathbf{u}(t) = \mathbf{e}_l\delta(t)$ έχουμε $\mathbf{y}^{(2)}(t) = D\mathbf{e}_l\delta(t) = \mathbf{D}_l\delta(t)$ όπου $\mathbf{D}_l$ η l-στήλη του πίνακα D και επομένως $y_k^{(2)}(t) = D_{lk}\delta(t)$.

Συνεπώς, η k συνάρτηση εξόδου όταν εφαρμόζουμε κρουστική συνάρτηση εισόδου $\delta(t)$ στην l-είσοδο (και με $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$) είναι

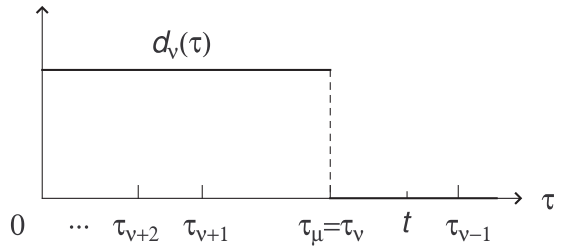
$$y_k^{(1)}(t) + y_k^{(2)}(t) = \mathbf{C}_k^T e^{At}\mathbf{B}_l(t) + D_{lk}\delta(t),\ \ t \geq 0,\ k \in \{1, 2, \ldots, p\},\ l \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

Η συνάρτηση $G(t) := Ce^{At}B + D\delta(t)$, $t \geq 0$, είναι ο πίνακας κρουστικής απόκρισης του συστήματος (με $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$).

Παρατήρηση: Επισημαίνεται ότι οι εξισώσεις στις οποίες εμφανίζεται η συνάρτηση $\delta(t)$ ερμηνεύονται συμβολικά (δείτε προηγούμενη ενότητα μετασχηματισμού Laplace). Μία αυστηρή διατύπωση της κρουστικής απόκρισης γραμμικών, χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων καταστάσεων χώρου δίνεται στο παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα: Έστω (d_ν) ακολουθία συναρτήσεων Dirac (π.χ. $d_\nu(t) = \nu$ για $t \in [0, \frac{1}{\nu}]$ και $d_\nu(t) = 0$ για $t > \frac{1}{\nu}$, Σχήμα 9). Ορίζουμε: $\boldsymbol{\delta}_{\nu,l} \in PC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$, $\boldsymbol{\delta}_{\nu,l}(t) = d_\nu(t)\mathbf{e}_l$ όπου $\mathbf{e}_l$ η l-στήλη του πίνακα I_m. Τότε αν $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ και $\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\delta}_{\nu,l}(t)$,

$$\lim_{\nu\to\infty} y_k^{(1)}(t) = [g(t)]_{kl} := g_{kl}(t),\ \ t > 0,\ k \in \{1, 2, \ldots, p\},\ l \in \{1, 2, \ldots, m\}$$



Σχήμα 9: *Ακολουθία συναρτήσεων Dirac*

όπου $y_k^{(1)}(t)$ η k-συνιστώσα της $\mathbf{y}^{(1)}(t)$.

Απόδειξη: Έστω $t > 0$ σταθεροποιημένο αλλά αυθαίρετο. Επιλέγουμε ακέραιο μ τέτοιον ώστε $\tau_\nu \leq t$ για κάθε $\nu \geq \mu$. Τότε, για κάθε $\nu \geq \mu$:

$$y_k^{(1)}(t) = \int_0^t g_{kl}(t-\tau)d_\nu(\tau)d\tau = \int_0^{\tau_\nu} g_{kl}(t-\tau)d_\nu(\tau)d\tau$$

Εφαρμόζουμε αλλαγή μεταβλητών: $\xi = t-\tau$, $\tau = 0 \Rightarrow \xi = t$, $\tau = \tau_\nu \Rightarrow \xi = t-\tau_\nu$, $d\xi = -d\tau$. Επομένως:

$$y_k^{(1)}(t) = \int_t^{t-\tau_\nu} g_{kl}(\xi)d_\nu(t-\xi)(-d\xi) = \int_{t-\tau_\nu}^t g_{kl}(\xi)d_\nu(t-\xi)d\xi$$

Επομένως, από το Θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα, υπάρχει $t_\nu \in [t-\tau_\nu, t]$ τέτοιο ώστε:

$$y_k^{(1)}(t) = g_{kl}(t_\nu)\int_{t-\tau_\nu}^t d_\nu(t-\xi)d\xi$$

Εφαρμόζουμε πάλι αλλαγή μεταβλητών: $\tau = t-\xi$, $\xi = t-\tau_\nu \Rightarrow \tau = \tau_\nu$, $\xi = t \Rightarrow \tau = 0$, $d\tau = -d\xi$. Επομένως:

$$y_k^{(1)}(t) = g_{kl}(t_\nu)\int_{\tau_\nu}^0 d_\nu(\tau)(-d\tau) = g_{kl}(t_\nu)\int_0^{\tau_\nu} d_\nu(\tau)d\tau = g_{kl}(t_\nu)\int_0^\infty d_\nu(\tau)d\tau = g_{kl}(t_\nu)$$

Το αποτέλεσμα προκύπτει παίρνοντας το όριο $\nu \to \infty$ στα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης, αφού $t_\nu \to t$ καθώς $\nu \to \infty$ και λόγω συνέχειας της συνάρτησης g_{kl}. □

3.4 Παράμετροι Markov: Έστω $\hat{G}(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$ συνάρτηση μεταφοράς γραμμικού, χρονικά αναλλοίωτου συστήματος καταστάσεων χώρου. Αν $|s| > \|A\|$ όπου $\|A\|$ μία επαγώμενη νόρμα του A (π.χ. $\|A\| = \sqrt{\rho(A^TA)}$ όπου $\rho(\cdot)$ η φασματική ακτίνα), τότε:

$$\hat{G}(s) = D + C\left[\frac{1}{s}\left(I - \frac{A}{s}\right)\right]B = D + C\left[\frac{1}{s}\left(I + \frac{A}{s} + \frac{A^2}{s^2} + \dots\right)\right] = D + \frac{CB}{s} + \frac{CAB}{s^2} + \frac{CA^2B}{s^3} + \dots$$

που αντιστοιχεί στην σειρά Laurent στο $\{s : |s| > \|A\|\}$. (Παρατηρούμε ότι αν περιορίσουμε την περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace στο σύνολο: $\Omega = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \|A\|\}$, τότε:

$$\begin{aligned} s \in \Omega \Leftrightarrow \mathrm{Re}(s) &> \|A\| \\ \Rightarrow \mathrm{Re}(s) &> \rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} \\ \Rightarrow \mathrm{Re}(s) &> \max\{\mathrm{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\} \end{aligned}$$

καθώς και

$$s \in \Omega \Leftrightarrow \mathrm{Re}(s) > \|A\| \Rightarrow |s| > \|A\|$$

και επόμένως οι δύο ιδιότητες σύγκλισης ικανοποιούνται ταυτόχρονα. Παίρνοντας αντίστροφο μεταχηματισμό Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\hat{G}(s)\right\} = G(t) = D\delta(t) + C\left[I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots\right]B = D\delta(t) + Ce^{At}B,\ t \geq 0$$

όπως περιμένουμε).

Η ακολουθία πινάκων $(G_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $G_k \in \mathbb{R}^{p\times n}$ όπου $G_0 = D$, $G_k = CA^{k-1}B$, $k \geq 1$, ονομάζεται ακολουθία Markov. Οι όροι της ακολουθίας σχετίζονται με τη κρουστική απόκριση του συστήματος μέσω της σχέσης:

$$G_k = CA^{k-1}B = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\, g(t)\big|_{t=0} = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\, Ce^{At}B\big|_{t=0}, k = 1, 2, \dots$$

3.5 Συνάρτηση συχνοτήτων

Μία ιδιαίτερα χρήσιμη ιδιότητα γραμμικών χρονικά-αναλλοίωτων συστημάτων αφορά την απόκριση των συστημάτων αυτών σε μονοχρωματικές (δηλ. μοναδικής συχνότητας) ημιτονοειδείς ταλαντώσεις. Κάτω από την υπόθεση ασυμπτωτικής ευστάθειας του συστήματος, το όριο (καθώς $t \to \infty$) της απόκριση της εξόδου σε συναρτήσεις είσοδου αυτού του είδους, είναι μία ημιτονοειδής ταλάντωση της ίδιας συχνότητας, αλλά με διαφορετικού πλάτους ταλάντωσης και γωνίας φάσης, σε σχέση με τα χαρακτηριστικά αυτά της συνάρτησης εισόδου. Η ιδιότητα αυτή έχει σημαντικές επιπτώσεις, τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο. Το βασικό αποτέλεσμα συνοψίζεται στο παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ πίνακας Hurwitz, δηλαδή $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ για κάθε $\lambda \in \sigma(A)$. Έστω:

$$\Sigma(A, B, C, D) : \mathbf{x}' = A\mathbf{x} + B\mathbf{u},\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u},\ B \in \mathbb{R}^{n\times m},\ C \in \mathbb{R}^{p\times n},\ D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

και έστω ότι $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Γιά $\omega \in \mathbb{R}$ ορίζουμε συνάρτηση εισόδου $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{l,\omega}(t) = \sin(\omega t)\mathbf{e}_l$ όπου $\mathbf{e}_l$ η l-στήλη του πίνακα I_m. Τότε, για κάθε $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{t\to\infty}(y_k(t) - M_{kl}(\omega)\sin(\omega t + \phi_{kl}(\omega))) = 0$$

όπου $\hat{G}(s) = C(sI_n - A)^{-1} + D$ η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος $\Sigma(A, B, C, D)$, $M_{kl}(\omega) = \hat{G}_{kl}(i\omega)$ και $\phi_{kl}(\omega) = \arg(\hat{G}_{kl}(i\omega))$, $0 \leq \phi_{kl} < 2\pi$.

Απόδειξη: Από προηγούμενη ανάλυση η έξοδος του συστήματος είναι:

$$\mathbf{y}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau + Du(t) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 + (Ce^{At}B) * \mathbf{u}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

(ο νέος συμβολισμός δίνει έμφαση στην εξάρτηση της $\mathbf{y}$ από την αρχική κατάσταση και την συνάρτηση εισόδυ). Εφόσον $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}_- = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) < 0\}$ έχουμε $e^{At} \to 0$ καθώς $t \to \infty$ (απόδειξη σε επόμενη ενότητα!) και επομένως μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη γενικότητας ότι $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Επομένως:

$$\mathbf{y}(t; \mathbf{0}, \mathbf{u}) = \int_0^t g(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau + D\mathbf{u}(t) = g(t) * \mathbf{u}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

όπου $g(t) = Ce^{At}B$. Έστω $\mathbf{u}(t) = \exp(i\omega t)\mathbf{e}_l$, $t \geq 0$. Τότε η k συνιστώσα της συνάρτησης εξόδου είναι:

$$y_k(t; \mathbf{0}, \exp(i\omega t)\mathbf{e}_l) = g_{kl}(t) * \exp(i\omega t) + D_{kl}\exp(i\omega t)$$

όπου $g_{kl}(t) = [Ce^{At}B]_{kl} = \mathbf{C}_k^T e^{At}\mathbf{B}_l$ και D_{kl} το (k, l) στοιχείο του πίνακα D. Ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} y_k(t; \mathbf{0}, \exp(i\omega t)\mathbf{e}_l) &= \int_0^t g_{kl}(\tau)\exp(i\omega(t-\tau))d\tau + D_{kl}\exp(i\omega t) \\ &= \exp(i\omega t)\left[\int_0^t g_{kl}(\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau + D_{kl}\right] \end{aligned}$$

Όμως:

$$\hat{g}_{kl}(s) = \int_0^\infty g_{kl}(\tau)e^{-s\tau}d\tau \Rightarrow \hat{g}_{kl}(i\omega) = \int_0^\infty g_{kl}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = \hat{g}_{kl}(s)|_{s=i\omega}$$

όπου $\hat{g}_{kl}(s) = [C(sI-A)^{-1}B]_{kl} = \mathbf{C}_k^T(sI-A)^{-1}\mathbf{B}_l$ και επομένως,

$$\begin{aligned} y_k(t;\mathbf{0},\exp(i\omega t)\mathbf{e}_l) &= \exp(i\omega t)\left[\int_0^\infty g_{kl}(\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau - \int_t^\infty g_{kl}(\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau + D_{kl}\right] \\ &= \exp(i\omega t)\left[\hat{g}_{kl}(i\omega) - \int_t^\infty g_{kl}(\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau + D_{kl}\right] \end{aligned}$$

Άρα,

$$y_k(t;\mathbf{0},\exp(i\omega t)\mathbf{e}_l) - (\hat{g}_{kl}(i\omega) + D_{kl})\exp(i\omega t) = -\int_t^\infty g_{kl}(\tau)\exp(i\omega(t-\tau))d\tau$$

η

$$y_k(t;\mathbf{0},\exp(i\omega t)\mathbf{e}_l) - \hat{G}_{kl}(i\omega)\exp(i\omega t) = -\int_t^\infty g_{kl}(\tau)\exp(i\omega(t-\tau))d\tau$$

όπου $\hat{G}_{kl}(s) = [C(sI-A)^{-1}B + D]_{kl} = \mathbf{C}_k^T(sI-A)^{-1}\mathbf{B}_l + D_{kl}$. Όμως,

$$\left|\int_t^\infty g_{kl}(\tau)\exp(i\omega(t-\tau))d\tau\right| \le \int_t^\infty |g_{kl}(\tau)|\cdot|\exp(i\omega(t-\tau))|d\tau = \int_t^\infty |g_{kl}(\tau)|d\tau \to 0$$

καθώς $t\to\infty$ και επομένως,

$$\lim_{t\to\infty}(y_k(t;\mathbf{0},\exp(i\omega t)\mathbf{e}_l) - \hat{G}_{kl}(i\omega)\exp(i\omega t)) = 0$$

Έστω $\hat{G}_{kl}(i\omega) = |\hat{G}_{kl}(i\omega)|\exp(i\phi_{kl})$ όπου $\phi_{kl} = \arg(\hat{G}_{kl}(i\omega))$. Τότε,

$$\lim_{t\to\infty}(y_k(t;\mathbf{0},\exp(i\omega t)\mathbf{e}_l) - |\hat{G}_{kl}(i\omega)|\exp(i(\omega t + \phi_{kl})) = 0$$

Εφόσον η παραπάνω μιγαδική συνάρτηση συγκλινει, το ίδιο συμβαινει για το φανταστικό (και το πραγματικό) της μέρος, και άρα

$$\lim_{t\to\infty}(y_k(t;\mathbf{0},Im(\exp(i\omega t))\mathbf{e}_l) - |\hat{G}_{kl}(i\omega)|Im(\exp(i(\omega t + \phi_{kl}))) = 0$$

η

$$\lim_{t\to\infty}(y_k(t;\mathbf{0},\sin(\omega t)\mathbf{e}_l) - |\hat{G}_{kl}(i\omega)|\sin(\omega t + \phi_{kl})) = 0$$

□

Η συνάρτηση $\omega \mapsto \hat{G}(i\omega)$, $\mathbb{R}\to\mathbb{C}^{p\times m}$, λέγεται συνάρτηση συχνοτήτων του συστήματος. Στις μεθόδους σχεδίασης που βασίζονται στο πεδίο των συχνοτήτων χρησιμοποιούμε τα γραφήματα των συναρτήσεων:

$$\omega \mapsto M_{kl}(\omega) := |\hat{G}_{kl}(i\omega)|,\ \ k=1,2,\ldots,p,\ \ l=1,2,\ldots,m\ \ \text{(συνάρτηση μέτρου συχνοτήτων)}$$

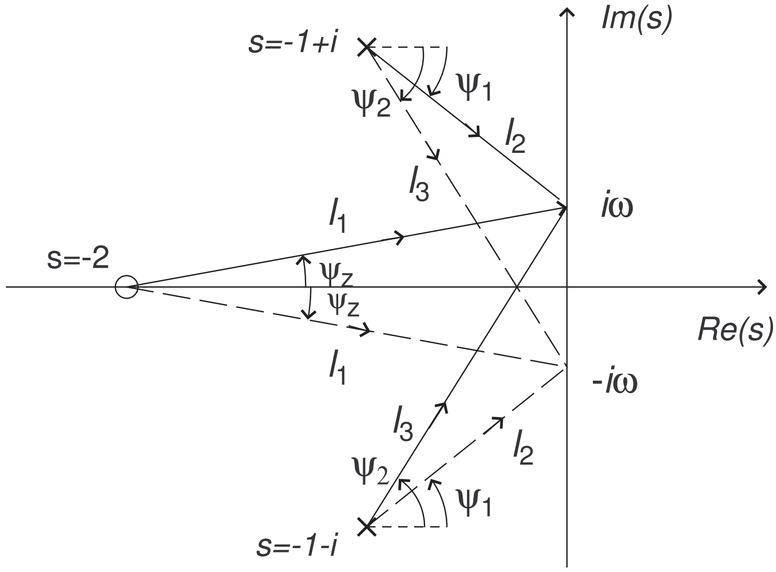
και

$$\omega \mapsto \phi_{kl}(\omega) := \arg\hat{G}_{kl}(i\omega),\ \ k=1,2,\ldots,p,\ \ l=1,2,\ldots,m\ \ \text{(συνάρτηση φάσης συχνοτήτων)}$$

Εφόσον η $G(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$ είναι πραγματική (γενικευμένη) συνάρτηση του t,

$$\hat{G}(i\omega) = \int_0^\infty G(t)e^{-i\omega t}dt \Rightarrow \hat{G}(-i\omega) = \int_0^\infty G(t)e^{i\omega t}dt = \overline{\int_0^\infty G(t)e^{-i\omega t}dt} = \overline{\hat{G}(i\omega)}$$

Άρα, αν $\hat{G}_{kl}(i\omega) = M_{kl}(\omega)e^{i\phi_{kl}(\omega)}$, τότε $\overline{\hat{G}_{kl}(i\omega)} = \hat{G}_{kl}(-i\omega) = M_{kl}(\omega)e^{i(-\phi_{kl}(\omega))}$ και $\hat{G}_{kl}(-i\omega) = M_{kl}(-\omega)e^{i\phi_{kl}(-\omega)}$ και άρα $M_{kl}(-\omega) = M_{kl}(\omega)$ (άρτια συνάρτηση του ω) και $\phi_{kl}(\omega) = -\phi_{kl}(-\omega)$ (περιττή



Σχήμα 10: *Παράδειγμα: Συνάρτηση συχνοτήτων*

συνάρτηση του ω). Επομένως τα γραφήματα των συναρτήσεων συχνοτήτων μέτρου και φάσης στην πράξη ορίζονται στο διάστημα $\omega \in [0, \infty)$ (και σχεδιάζονται συνήθως σε λογαριθμική κλίμακα).

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση μεταφοράς:

$$\hat{g}(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2+1} = \frac{s+2}{(s+1+i)(s+1-i)}$$

Γεωμετρικά, η τιμή της συνάρτηση μέτρου και φάσης σε συχνότητα $\omega \in \mathbb{R}_+$ είναι:

$$m(\omega) = |\hat{g}(i\omega)| = \frac{l_1}{l_2 l_3} = |\hat{g}(-i\omega)| = m(-\omega) \;\; \text{και} \;\; \phi(\omega) = \arg \hat{g}(i\omega) = \psi_z - (-\psi_1 + \psi_2) = -\phi(-\omega)$$

και άρα η $m(\omega)$ είναι άρτια και η $\phi(\omega)$ περιττή συνάρτηση.

Παράδειγμα: Έστω γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο και ασυμπτωτικά ευσταθές σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s) = \frac{1}{s+1}$. Η συνάρτηση συχνοτήτων είναι

$$\hat{G}(i\omega) = \frac{1}{i\omega+1} = m(\omega)e^{i\phi(\omega)}, \text{ όπου } m(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}} \text{ και } \phi(\omega) = -\tan^{-1}(\omega)$$

και επομένως αν $u(t) = \sin(\omega t)$, $t \geq 0$, έχουμε:

$$\lim_{t\to\infty} (y(t) - m(\omega)\sin(\omega t + \phi(\omega))) = \lim_{t\to\infty} \left(y(t) - \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}} \sin(\omega t - \tan^{-1}(\omega)) \right) = 0$$

π.χ. αν $\omega = 1$ rad/s,

$$\lim_{t\to\infty} (y(t) - m(1)\sin(\omega t + \phi(1))) = \lim_{t\to\infty} \left(y(t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\omega t - \frac{\pi}{4}) \right) = 0$$

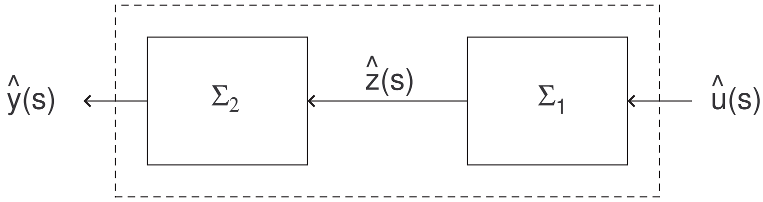
Συμβατικά πολλές φορές γράφουμε: $y_{ss}(t) = m(\omega)\sin(\omega t + \phi(\omega))$, όπου y_{ss} η έξοδος σε συνθήκες σταθερής κατάστασης (steady-state). Τα χαρακτηριστικά μέτρου και φάσης της συνάρτησης συχνοτήτων είναι αυτά φίλτρου low-pass: Το μέτρο φθίνει μονοτονικά από την τιμή $m(0) = 1$ και τείνει στο όριο

$\lim_{\omega\to\infty} m(\omega) = 0$. Η φάση είναι επίσης μονοτονικά φθίνουσα για $\omega \in \mathbb{R}_+$ από την τιμή $\phi(0) = 0$ και τείνει στο όριο $\lim_{\omega\to\infty} \phi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$ rads (καθυστέρηση φάσης).

3.6 Συνδεσμολογία συστημάτων

Η έννοια της συνάρτησης μεταφοράς επιτρέπει την ανάλυση συνδεδεμένων συστημάτων με αλγεβρικές μεθόδους. Εξετάζουμε τρεις σημαντικές περιπτώσεις:

1. Συστήματα σε σειρά $\Sigma = \Sigma_2\Sigma_1$ *(Σχήμα* 11*):*



Σχήμα 11: *Συστήματα σε σειρά*

Έστω $\hat{G}_1(s)$ και $\hat{G}_2(s)$ οι συναρτήσεις μεταφοράς των γραμμικών, χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων Σ_1 και Σ_2, αντίστοιχα. Τότε:

$$\hat{\mathbf{y}}(s) = \hat{G}_2(s)\hat{\mathbf{z}}(s) = \hat{G}_2(s)\hat{G}_1(s)\hat{\mathbf{u}}(s) = (\hat{G}_2(s)\hat{G}_1(s))\hat{\mathbf{u}}(s) := \hat{G}(s)\hat{\mathbf{u}}(s)$$

όπου $\hat{G}(s) := \hat{G}_2(s)\hat{G}_1(s)$ η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος $\Sigma := \Sigma_2\Sigma_1$. Αν $\Sigma_i = (A_i, B_i, C_i, D_i)$, $i = 1, 2$, τα αντίστοιχα μοντέλα καταστάσεων χώρου, δηλ.

$$\Sigma_1 : \ \mathbf{x}_1' = A_1\mathbf{x}_1 + B_1\mathbf{u},\ \mathbf{z}_1 = C_1\mathbf{x_1} + D_1\mathbf{u}$$

και

$$\Sigma_2 : \ \mathbf{x}_2' = A_2\mathbf{x}_2 + B_2\mathbf{z},\ \mathbf{y} = C_2\mathbf{x_2} + D_2\mathbf{z}$$

τότε

$$\Sigma_2 : \ \mathbf{x}_2' = A_2\mathbf{x}_2 + B_2(C_1\mathbf{x_1} + D_1\mathbf{u}),\ \mathbf{y} = C_2\mathbf{x_2} + D_2(C_1\mathbf{x_1} + D_1\mathbf{u})$$

και το συστήμα Σ έχει πραγματοποίηση:

$$\Sigma = \Sigma_2\Sigma_1 : \ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1' \\ \mathbf{x}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix} \mathbf{u},\ \ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + D_2D_1\mathbf{u}$$

2. Συστήματα σε παραλληλία $\Sigma = \Sigma_1 \parallel \Sigma_2$ *(Σχήμα* 12*):*
Έστω $\hat{G}_1(s)$ και $\hat{G}_2(s)$ οι συναρτήσεις μεταφοράς των γραμμικών, χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων Σ_1 και Σ_2, αντίστοιχα. Τότε:

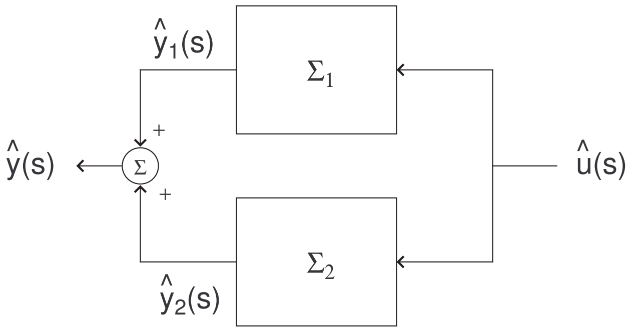
$$\hat{\mathbf{y}}(s) = \hat{\mathbf{y}}_1(s) + \hat{\mathbf{y}}_2(s) = \hat{G}_1(s)\hat{\mathbf{u}}(s) + \hat{G}_2(s)\hat{\mathbf{u}}(s) = (\hat{G}_1 + \hat{G}_2)(s)\hat{\mathbf{u}}(s) := \hat{G}(s)\hat{\mathbf{u}}(s)$$

όπου $\hat{G}(s) := \hat{G}_1(s) + \hat{G}_2(s)$ η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος $\Sigma := \Sigma_1 \parallel \Sigma_2$. Αν $\Sigma_i = (A_i, B_i, C_i, D_i)$, $i = 1, 2$, τα αντίστοιχα μοντέλα καταστάσεων χώρου, δηλ.

$$\Sigma_1 : \ \mathbf{x}_1' = A_1\mathbf{x}_1 + B_1\mathbf{u},\ \mathbf{y}_1 = C_1\mathbf{x_1} + D_1\mathbf{u}$$

και

$$\Sigma_2 : \ \mathbf{x}_2' = A_2\mathbf{x}_2 + B_2\mathbf{u},\ \mathbf{y} = C_2\mathbf{x_2} + D_2\mathbf{u}$$



Σχήμα 12: *Συστήματα σε παραλληλία*

τότε το συστήμα Σ έχει πραγματοποίηση:

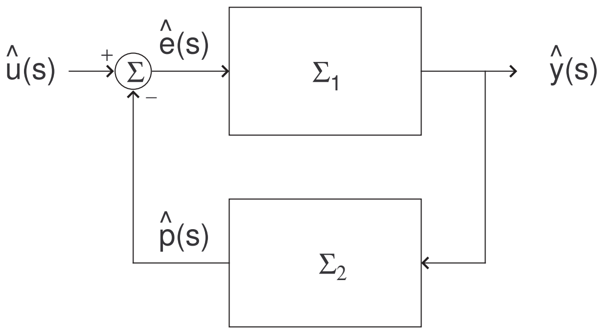
$$\Sigma = \Sigma_1 \parallel \Sigma_2 : \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1' \\ \mathbf{x}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \ \ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + (D_1 + D_2)\mathbf{u}$$

3. Σύνδεση αρνητικής ανάδρασης $\Sigma = (\Sigma_1, -\Sigma_2)$ (Σχήμα 13):

Έστω $\hat{G}_1(s)$ και $\hat{G}_2(s)$ οι συναρτήσεις μεταφοράς των γραμμικών, χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων Σ_1 και Σ_2, αντίστοιχα. Τότε:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}(s) = \hat{G}_1(s)(\hat{\mathbf{u}}(s) - \hat{G}_2(s)\hat{\mathbf{y}}(s)) \Rightarrow (I + \hat{G}_1(s)\hat{G}_2(s)) = \hat{G}_1(s)\hat{\mathbf{u}}(s) \\ \Rightarrow \hat{\mathbf{y}}(s) = (I + \hat{G}_1(s)\hat{G}_2(s))^{-1}\hat{G}_1(s)\hat{\mathbf{u}}(s) = \hat{G}(s)\hat{\mathbf{u}}(s) \end{aligned}$$

όπου $\hat{G}(s) = (I + \hat{G}_1(s)\hat{G}_2(s))^{-1}\hat{G}_1(s)$ η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος $\Sigma := (\Sigma_1, -\Sigma_2)$. Υποθέτουμε ότι η αντίστροφη συνάρτηση μεταφοράς $(I + \hat{G}_1(s)\hat{G}_2(s))^{-1}$ υπάρχει ως ρητή κανονική συνάρτηση, ισοδύναμα ότι $\det(I + \hat{G}_(\infty)\hat{G}_2(\infty)) \neq 0$ (στην περίπτωση αυτή το σύστημα ανάδρασης (κλειστού βρόγχου) λέγεται καλά τοποθετημένο (well posed).)



Σχήμα 13: *Σύνδεση αρνητικής ανάδρασης*

Αν $\Sigma_i = (A_i, B_i, C_i, D_i)$, $i = 1, 2$, τα αντίστοιχα μοντέλα καταστάσεων χώρου, δηλ.

$$\Sigma_1 : \ \ \mathbf{x}_1' = A_1\mathbf{x}_1 + B_1\mathbf{e}, \ \mathbf{y} = C_1\mathbf{x_1} + D_1\mathbf{e}$$

και

$$\Sigma_2 : \ \ \mathbf{x}_2' = A_2\mathbf{x}_2 + B_2\mathbf{y}, \ \mathbf{p} = C_2\mathbf{x_2} + D_2\mathbf{y}$$

Ισχύει επίσης: $\mathbf{e}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{p}(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Μπορούμε να υπολογίσουμε μία πραγματοποίηση του Σ ως εξής:

Εφόσον $\mathbf{e}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{p}(t)$, έχουμε:

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{x}_1 + D_1(\mathbf{u} - \mathbf{p}) = C_1\mathbf{x}_1 + D_1\mathbf{u} - D_1(C_2\mathbf{x}_2 + D_2\mathbf{y}) = C_1\mathbf{x}_1 + D_1\mathbf{u} - D_1C_2\mathbf{x}_2 - D_1D_2\mathbf{y}$$

Ισοδύναμα:

$$(I + D_1D_2)\mathbf{y} = C_1\mathbf{x}_1 + D_1\mathbf{u} - D_1C_2\mathbf{x}_2$$

και επομένως αν $\det(I + D_1D_2) \neq 0$,

$$\mathbf{y} = L_1C_1\mathbf{x}_1 - L_1D_1C_2\mathbf{x}_2 + L_1D_1\mathbf{u} \;\text{ όπου }\; L_1 := (I + D_1D_2)^{-1}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\mathbf{p} = C_2\mathbf{x_2} + D_2\mathbf{y} &= C_2\mathbf{x_2} + D_2(L_1C_1\mathbf{x}_1 - L_1D_1C_2\mathbf{x}_2 + L_1D_1\mathbf{u})\\ &= D_2L_1C_1\mathbf{x}_1 + (I - D_2L_1D_1)C_2\mathbf{x}_2 + D_2L_1D_1\mathbf{u}\end{aligned}$$

Επομένες οι εξισώσεις για το Σ_1 γράφονται:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1' &= A_1\mathbf{x}_1 + B_1\mathbf{u} - B_1\mathbf{p}\\ &= A_1\mathbf{x}_1 + B_1\mathbf{u} - B_1[D_2L_1C_1\mathbf{x}_1 + (I - D_2L_1D_1)C_2\mathbf{x}_2 + D_2L_1D_1\mathbf{u}]\\ &= (A_1 - B_1D_2L_1C_1)\mathbf{x}_1 - B_1(I - D_2L_1D_1)C_2\mathbf{x}_2 + B_1(I - D_2L_1D_1)\mathbf{u}\end{aligned}$$

και για το Σ_2:

$$\mathbf{x}_2' = A_2\mathbf{x}_2 + B_2\mathbf{y} = B_2L_1C_1\mathbf{x}_1 + (A_2 - B_2L_1D_1C_2)\mathbf{x}_2 + B_2L_1D_1\mathbf{u}$$

Σε διανυσματική μορφή:

$$\Sigma = (\Sigma_1, -\Sigma_2): \quad \begin{bmatrix}\mathbf{x}_1'\\ \mathbf{x}_2'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - B_1D_2L_1C_1 & -B_1(I - D_2L_1D_1)C_2\\ B_2L_1C_1 & A_2 - B_2L_1D_1C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1(I - D_2L_1D_1)\\ B_2L_1D_1\end{bmatrix}\mathbf{u}$$

και

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} L_1C_1 & -L_1D_1C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{bmatrix} + L_1D_1\mathbf{u}$$

όπου $L_1 := (I + D_1D_2)^{-1}$.

Στην περίπτωση όπου $D_1 = 0$ έχουμε $L_1 = I$ και οι εξισώσεις κατάστασης χώρου του συστήματος απλοποιούνται ως εξής:

$$\Sigma = (\Sigma_1, -\Sigma_2): \quad \begin{bmatrix}\mathbf{x}_1'\\ \mathbf{x}_2'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - B_1D_2C_1 & -B_1C_2\\ B_2C_1 & A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1\\ 0\end{bmatrix}\mathbf{u}$$

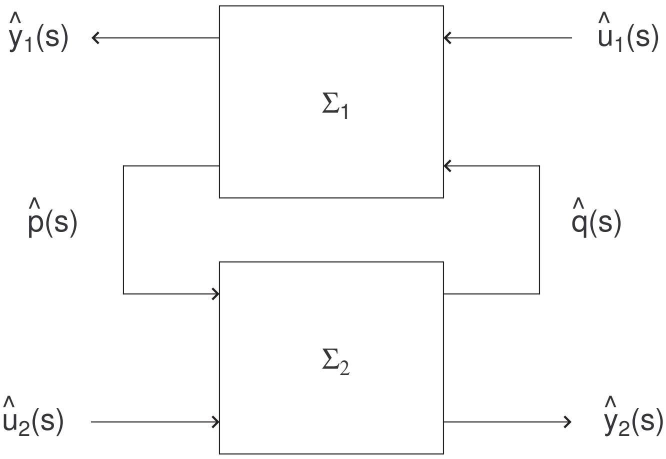
και

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} C_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{bmatrix}$$

Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας A κλειστού βρόγχου γραφεται ως:

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A_1 - B_1D_2C_1 & -B_1C_2\\ B_2C_1 & A_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -B_1\\ I & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_2 & B_2\\ C_2 & D_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & I\\ C_1 & 0\end{bmatrix}$$

και το πρόβλημα σταθεροποίησης με δυναμικό αντισταθμιστή ανάδρασης εξόδου ορίζεται ως: *Να βρεθεί (αν υπάρχει) δυναμικός αντισταθμιστής $\Sigma_k(A_2, B_2, C_2, D_2)$ τέτοιος ώστε $\sigma(A_{cl}) \subseteq \mathbb{C}_-$.* Τα αντίστοιχα προβλήματα σταθεροποίησης με στατική ανάδραση εξόδου και στατική ανάδραση καταστάσεων είναι: *Να*



Σχήμα 14: *Σύνδεση Redheffer star των Σ_1 και Σ_2*

βρεθεί (αν υπάρχει) στατικός αντισταθμιστής D_2 ώστε $\sigma(A_1 - B_1D_2C_1) \subseteq \mathbb{C}_-$, η $\sigma(A_1 - B_1D_2) \subseteq \mathbb{C}_-$, αντίστοιχα.

Άσκηση: Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς και σύστημα καταστάσεων χώρου κλειστού βρόγχου για την σύνδεση του Σχήματος 14 (σύνδεση Redheffer star).

3.7 Ισοδύναμα συστήματα

Έστω γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα καταστάσεων χώρου:

$$\Sigma(A, B, C, D) : \ \ \mathbf{x}' = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \ \ \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}$$

όπου $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ και $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$. Θέλουμε να ορίσουμε νέο διάνυσμα κατάστασης $\tilde{\mathbf{x}}$ ώστε η σχέση εισόδου-εξόδου να μείνει αναλλοίωτη.

Ορίζουμε γραμμικό μετασχηματισμό: $\mathbf{x} = P\tilde{\mathbf{x}}$, $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(P) \neq 0$. Τότε $\tilde{\mathbf{x}}' = P^{-1}\mathbf{x}'$ και

$$\tilde{\mathbf{x}}' = P^{-1}(A\mathbf{x} + B\mathbf{u}) = P^{-1}AP\tilde{\mathbf{x}} + P^{-1}B\mathbf{u} := \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{B}\mathbf{u}$$

Επίσης

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} = CP\tilde{\mathbf{x}} + D\mathbf{u}$$

Τα συστήματα $\Sigma(A, B, C, D)$ και $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$ λέγονται ισοδύναμα και γράφουμε: $\Sigma \sim \tilde{\Sigma}$.

Άσκηση: Δείξτε ότι η σχέση $\Sigma \sim \tilde{\Sigma}$ ικανοποιεί την ανακλαστική ($\Sigma \sim \Sigma$), συμμετρική ($\Sigma \sim \tilde{\Sigma} \Rightarrow \tilde{\Sigma} \sim \Sigma$) και μεταβατική ιδιότητα ($(\Sigma_1 \sim \Sigma_2) \wedge (\Sigma_2 \sim \Sigma_3) \Rightarrow (\Sigma_1 \sim \Sigma_3)$) και άρα είναι πράγματι σχέση ισοδυναμίας.

Τα παρακάτω χαρακτηριστικά παραμένουν αναλλοίωτα από τον μετασχηματισμό:

- $\sigma(A) = \sigma(P^{-1}AP)$: Το φάσμα πίνακα παραμένει αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμό ομοιότητας (καθώς και οι αλγεβρικές πολλαπλότητες κάθε ιδιοτιμής). Επομένως το ίδιο ισχύει και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\tilde{\phi}(s) = \det(sI - P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(sI - A)\det(P) = \det(sI - A) = \phi(s)$$

- Η συνάρτηση μεταφοράς, ως συνάρτηση μεταξύ εισόδου και εξόδου παραμένει αναλλοίωτη:

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{G}}(s) &= \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + D = CP[sI - P^{-1}AP]^{-1} + D \\ &= CPP^{-1}(sI - A)^{-1}PP^{-1} + D \\ &= C(sI - A)^{-1} + D = \hat{G}(s)\end{aligned}$$

- Η ακολουθία Markov, ως συνάρτηση μεταξύ εισόδου και εξόδου παραμένει αναλλοίωτη:

$$\tilde{G}_0 = G_0 = D,\ \tilde{G}_k = \tilde{C}\tilde{A}^{k-1}\tilde{B} = CP(P^{-1}AP)^{k-1}P^{-1}B = CP(P^{-1}A^{k-1}P)P^{-1}B = CA^{k-1}B,$$

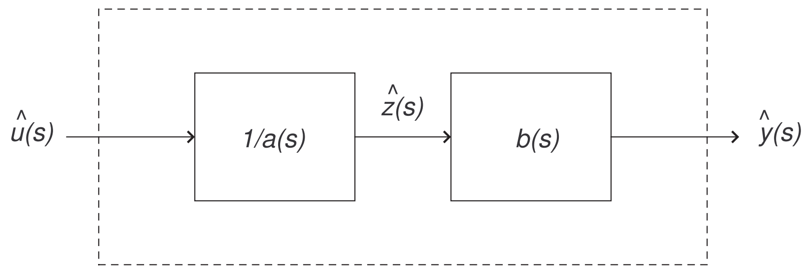
  για $k \geq 1$.

3.8 Πραγματοποίηση Συστημάτων καταστάσεων χώρου: Το πρόβλημα καθορισμού μιας τετράδας πινάκων $\Sigma(A, B, C, D)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$, από δοσμένη ρητή κανονική συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}(s)$. Εδώ δεν απαιτούμε η πραγματοποίηση να είναι ελάχιστου βαθμού, δηλαδή η διάσταση n του πίνακα A να είναι η ελάχιστη δυνατή (πρόβλημα ελάχιστης πραγματοποίησης που θα αναλύσουμε αργότερα).

Γνωρίζουμε από την προηγούμενη ενότητα ότι το πρόβλημα δεν έχει μοναδική λύση - αν $\Sigma(A, B, C, D)$ είναι λύση του προβλήματος, τότε κάθε ισοδύναμο σύστημα $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ με $\tilde{A} = P^{-1}AP$, $\tilde{B} = P^{-1}B$, $\tilde{C} = CP$, $\tilde{D} = D$, $\det(P) \neq 0$, είναι επίσης λύση. Αρχίζουμε την ανάλυση από προβλήματα μίας εισόδου και μίας εξόδου ($m = p = 1$).

Έστω $\hat{g}(s) \in \mathbb{R}(s)$, $\hat{g}(s) = \frac{\tilde{b}(s)}{a(s)}$, όπου $\tilde{b}, a \in \mathbb{R}[s]$ με $\partial\tilde{b}(s) \leq \partial a(s)$. Αν έχουμε $\partial\tilde{b}(s) = \partial a(s)$, τότε διαιρώντας τα δύο πολυώνυμα έχουμε $\hat{g}(s) = D + \hat{g}_1(s)$, όπου $D = \hat{g}(\infty) \in \mathbb{R}$ και $\hat{g}_1(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ όπου $b(s) \in \mathbb{R}[s]$ και $\partial b(s) < \partial a(s) = n$. Θα βρούμε μία πραγματοποίηση $\Sigma(A, B, C, 0)$ της $\hat{g}_1(s)$ - τότε μία πραγματοποίηση της $\hat{g}(s)$ θα είναι $\Sigma(A, B, C, D)$.

Έστω $a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$ και $b(s) = b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \ldots + b_1 s + b_0$. (Χωρίς βλάβη γενικότητας υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο $a(s)$ είναι μονικό). Επίσης ο βαθμός ∂b μπορεί να είναι μικρότερος από $n - 1$ αν οι πρώτοι συντελεστές του πολυωνύμου είναι ίσοι με 0). Γράφουμε το $\hat{g}_1(s)$ σαν σειρά δύο συστημάτων όπως δείχνει το διάγραμμα (Σχήμα 15).



Σχήμα 15: *Πραγματοποίηση ρητής, βαθμωτής, αυστηρά-κανονικής συνάρτησης μεταφοράς*

Αρχικά εξετάζουμε την συνάρτηση μεταφοράς $\frac{1}{a(s)}$ μεταξύ των $\hat{u}(s)$ και $\hat{z}(s)$. Έχουμε ότι

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0)\hat{z}(s) = \hat{u}(s)$$

Επομένως,

$$z^{(n)}(t) + a_{n-1}z^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 z'(t) + a_0 z(t) = u(t)$$

αντιστέφοντας τον μετασχηματισμό Laplace και θεωρώντας ότι όλες οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές. Ορίζουμε μεταβλητές κατάστασης:

$$x_1 = z, x_2 = x_1' = z', \ldots, x_{n-1} = x_{n-2}' = z^{(n-2)}, x_n = x_{n-1}' = z^{(n-1)}$$

Τότε

$$x_n' = z^{(n)} = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \ldots - a_{n-1} x_n + u$$

Διανυσματικά:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_{n-1}' \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

που είναι της μορφής: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + Bu$. Παρατηρούμε:

- Ο πίνακας A είναι σε μορφή Companion. Οι εξισώσεις στις $n-1$ πρώτες γραμμές του συστήματος $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + Bu$ αντιστοιχούν σε διαδοχική ολοκλήρωση των μεταβλητών κατάστασης $x_i = \int x_{i+1} dt$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ και η εξίσωση στην n-στη γραμμή αντιστοιχεί στην διαφορική εξίσωση που προκύπτει απο την σχέση $a(s)\hat{z}(s) = \hat{u}(s)$. Παρατηρούμε επίσης ότι τα στοιχεία στην τελευταία γραμμή του πίνακα A ειναι οι συντελεστές του πολυωνύμου $a(s)$ (εκτός από τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου s^n) με αντεστραμμένη σειρά και αρνητικά πρόσημα. Ο πίνακας B είναι διάνυσμα στήλης (μία είσοδος) και κάθε στοιχείο του είναι 0 εκτός απο το τελευταίο (n-στο) που είναι 1.
- Το ζεύγος (A, B) είναι σε κανονική μορφή ελεγξιμότητας. (Θα ορίσουμε την έννοια της ελεγξιμότητας σε άλλη ενότητα)

Συνεχίζουμε με την ανάλυση της (μη κανονικής) συνάρτησης μεταφοράς $b(s)$ μεταξύ της εισόδου $\hat{z}(s)$ και της εξόδου $\hat{y}(s)$ (δείτε πάλι το Σχήμα 12). Έχουμε:

$$\hat{y}(s) = (b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \ldots + b_1 s + b_0)\hat{z}(s)$$

και επομένως

$$y(t) = b_{n-1}z^{(n-1)} + b_{n-2}z^{(n-2)} + \ldots + b_1 z' + b_0 z$$

Από την προηγούμενη επιλογή μεταβλητών κατάστασης η παραπάνω εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

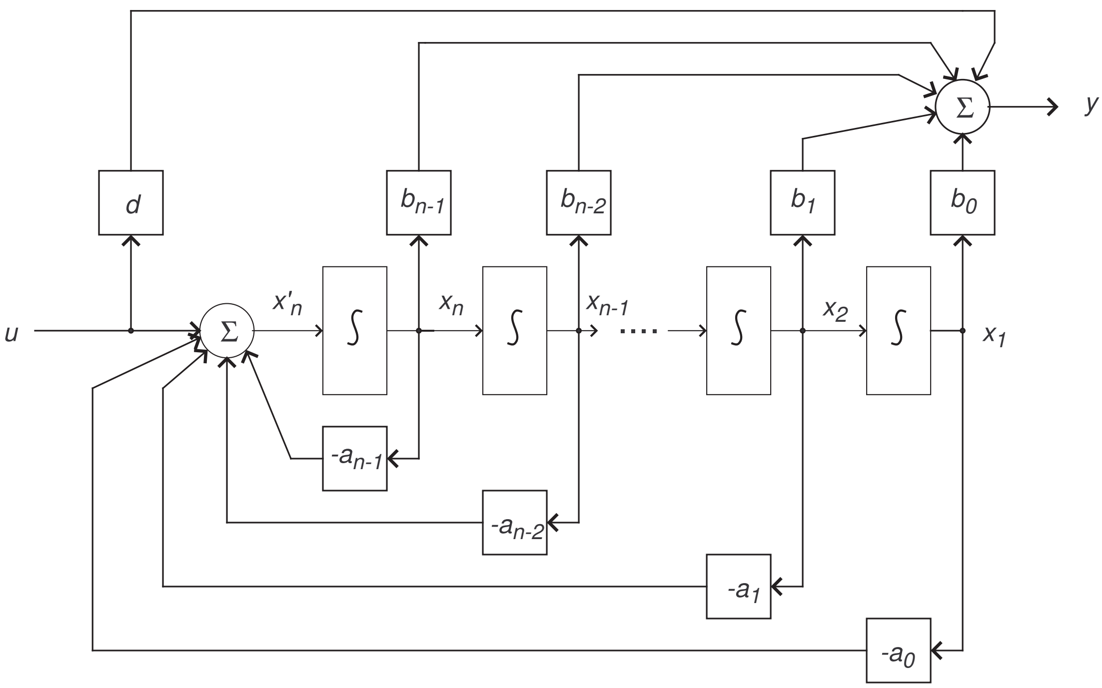
$$y(t) = b_{n-1}x_n(t) + b_{n-2}x_{n-1}(t) + \ldots + b_1 x_2(t) + b_0 x_1(t)$$

Διανυσματικά,

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + [0]u$$

που είναι της μορφής $y = C\mathbf{x} + Du$. Παρατηρούμε ότι αν $\partial b < n-1$ τα τελευταία στοιχεία του πίνακα C είναι μηδενικά. Συμπερασματικά, μία πραγματοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς $\hat{g}(s)$ είναι η τετράδα πινάκων $\Sigma(A, B, C, D)$, όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix}, D = d$$



Σχήμα 16: *Διάγραμμα βαθμίδων πραγματοποίησης*

Το ισοδύναμο διάγραμμα βαθμίδων της πραγματοποίησης δίνεται στο Σχήμα 16:

Το επόμενο Θεώρημα δείχνει ότι αν τα πολυώνυμα $b(s)$ και $a(s)$ είναι πρώτα μεταξύ τους (δηλ. δεν έχουν κοινή ρίζα), τότε η παραπάνω πραγματοποίηση είναι ελάχιστη, δηλ, η διάσταση του πίνακα A είναι η ελάχιστη δυνατή από όλες της πραγματοποιήσεις της συνάρτησης μεταφοράς $\hat{g}(s)$.

Θεώρημα: Έστω $\hat{g}(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \in \mathbb{R}(s)$ ρητή και αυστηρά κανονική συνάρτηση μεταφοράς και όπου τα πολυώνυμα

$$a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0, \;\; b(s) = b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \ldots + b_1 s + b_0$$

είναι πρώτα μεταξύ τους. Τότε η διάσταση καθε ελάχιστης πραγματοποίησης είναι ίση με n. Επιπλέον, η τετράδα $\Sigma(A, B, C, 0) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times 1} \times \mathbb{R}^{1\times n} \times \mathbb{R}$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix}$$

είναι ελάχιστη πραγματοποίηση της $\hat{g}(s)$.

Απόδειξη: Η προηγούμενη ανάλυση έχει ήδη δείξει ότι η τετράδα $\Sigma(A, B, C, 0)$ είναι πραγματοποίηση της $\hat{g}(s)$. Απομένει να δείξουμε ότι είναι ελάχιστη, δηλ ότι δεν υπάρχει πραγματοποίηση με διάσταση μικρότερη του n. Έστω $\Sigma(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, 0)$ μια πραγματοποίηση της $\hat{g}(s)$ με διάσταση l. Τότε

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \hat{g}(s) = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = \frac{1}{\det(sI - \tilde{A})}\tilde{C}\mathrm{adj}(sI - \tilde{A})\tilde{B}$$

και επομένως

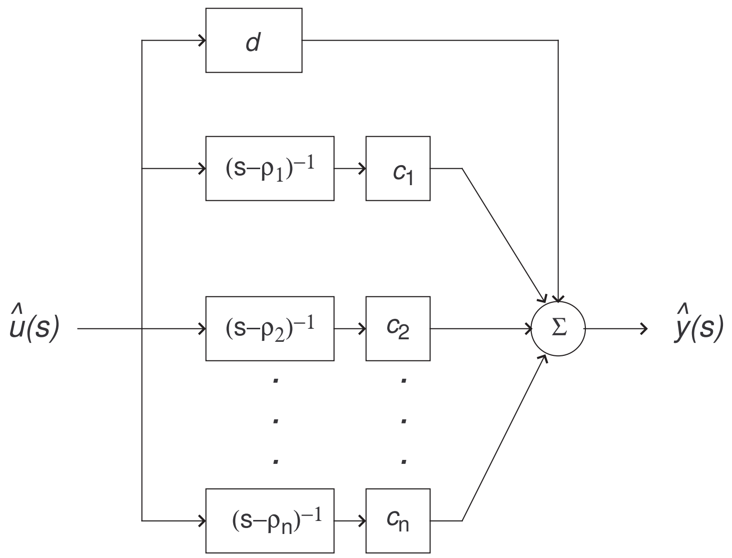
$$\frac{b(s)\det(sI - \tilde{A})}{a(s)} = \tilde{C}\mathrm{adj}(sI - \tilde{A})\tilde{B}$$

Ο όρος δεξιά είναι πολυώνυμο και εφόσον τα πολυώνυμα $(b(s), a(s))$ είναι πρώτα μεταξύ τους, πρέπει να έχουμε ότι $a(s) | \det(sI - \tilde{A})$, δηλαδή πρέπει το πολυώνυμο $a(s)$ να διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $\tilde{A}$ που έχει βαθμό l. Αρα $n \leq l$ και η πραγματοποίηση $(A, B, C, 0)$ είναι ελάχιστη. $\square$

Μία δεύτερη πραγματοποίηση βαθμωτής συνάρτηση μεταφοράς $\hat{g}(s)$ με πραγματικούς διακεκριμμένους πόλους είναι η εξής (Σχήμα 17). Έστω,

$$\hat{g}(s) = \frac{b(s)}{a(s)} + d,\ a(s), b(s) \in \mathbb{R}[s],\ d \in \mathbb{R},\ a(s) = (s - \rho_1)(s - \rho_2) \cdots (s - \rho_n),\ \partial b(s) < n = \partial a(s)$$

όπου $\rho_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots n$ και $\rho_i \neq \rho_j$ αν $i \neq j$.



Σχήμα 17: *Πραγματοποίηση με διαγώνιο πίνακα A*

Αναλύουμε σε απλά κλάσματα:

$$\hat{g}(s) = d + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s - \rho_i},\ c_i = \lim_{s \to \rho_i} \frac{(s - \rho_i) b(s)}{a(s)} = \frac{b(\rho_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{n} (s - \rho_j)}$$

Το $\hat{g}(s)$ γράφεται ως άθροισμα $n + 1$ παράλληλων συστημάτων (Σχήμα 14):

$$\hat{g}_i(s) = \frac{c_i}{s - \rho_i},\ i = 1, 2, \ldots, n \text{ και } \hat{g}_{n+1}(s) = d$$

Επομένως μία πραγματοποίηση του $\hat{g}(s)$ είναι $\Sigma(A, B, C, D)$ όπου:

$$A = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_n \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix},\ D = d$$

Το επόμενο Θεώρημα δείχνει ότι στην γενική περίπτωση η συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$, $\hat{G}(s)$ ρητή και αυστηρά κανονική, έχει πραγματοποίηση $(A, B, C, 0_{p \times m})$. Η απόδειξη του Θεωρήματος ορίζει και μία συγκεκριμένη πραγματοποίηση (η οποία δεν είναι αναγκαστικά ελάχιστη). Θα αναπτύξουμε μεθόδους για την κατασκευή ελάχιστων πραγματοποιήσεων συστημάτων πολλαπλών εισόδων και εξόδων αφού εισάγουμε τις έννοιες της ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας σε επόμενη ενότητα.

Θεώρημα: Κάθε ρητή, αυστηρά κανονική συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}(s)$ έχει πραγματοποίηση, δηλαδή υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και πίνακες $(A, B, C) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^{p\times n}$ τέτοιοι ώστε $\hat{G}(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$.

Απόδειξη: Έστω $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}(s)$ ρητή και αυστηρά κανονική συνάρτηση μεταφοράς και έστω $d(s)$ το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο από όλα τα πολυώνυμα των παρονομαστών των στοιχείων της $\hat{G}(s)$. Χωρίς βλάβη γενικότητας θεωρούμε ότι το $d(s)$ είναι μονικό, δηλαδή είναι της μορφής:

$$d(s) = s^l + d_{l-1}s^{l-1} + \ldots d_1 s + d_0$$

Εφόσον η $\hat{G}(s)$ είναι αυστηρά κανονική,

$$d(s)\hat{G}(s) = N_{l-1}s^{l-1} + N_{l-2}s^{l-2} + \ldots + N_1 s + N_0, \quad N_j \in \mathbb{R}^{p\times m}, \quad j = 0, 1, \ldots l-1$$

Έστω $n = lm$. Ορίζουμε τους πίνακες : $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ και $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 0_m & I_m & 0_m & \cdots & 0_m \\ 0_m & 0_m & I_m & \cdots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & 0_m & 0_m & \cdots & I_m \\ -d_0 I_m & -d_1 I_m & -d_2 I_m & \cdots & -d_{l-1} I_m \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0_m \\ 0_m \\ \vdots \\ 0_m \\ I_m \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} N_0 & N_1 & \cdots & N_{l-1} \end{bmatrix}$$

και όπου 0_m ο μηδενικός πίνακας διαστάσεων $m \times m$. Θα δείξουμε ότι οι πίνακες (A, B, C) ορίζουν μία πραγματοποίηση της συνάρτησης $\hat{G}(s)$. Ορίζουμε:

$$H(s) = \begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \\ \vdots \\ H_{l-1}(s) \\ H_l(s) \end{bmatrix} = (sI_n - A)^{-1}B$$

Τότε $(sI_n - A)H(s) = B$. Ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} sI_m & -I_m & 0_m & \cdots & 0_m \\ 0_m & sI_m & -I_m & \cdots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_m & 0_m & 0_m & sI_m & -I_m \\ d_0 I_m & d_1 I_m & d_2 I_m & \cdots & sI_m + d_{l-1}I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \\ \vdots \\ H_{l-1}(s) \\ H_l(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_m \\ 0_m \\ \vdots \\ 0_m \\ I_m \end{bmatrix}$$

Επομένως:

$$\left.\begin{aligned} sH_1(s) - H_2(s) = 0 \\ sH_2(s) - H_3(s) = 0 \\ \vdots \\ sH_{l-1}(s) - H_l(s) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow H_{j+1}(s) = sH_j(s), \ j = 1, 2, \ldots, l-1 \qquad (*)$$

και

$$sH_l(s) + d_0 H_1(s) + d_1 H_2(s) + \ldots + d_{l-1}H_l(s) = I_m \qquad (**)$$

Εφαρμόζοντας την (*) αναδρομικά έχουμε: $H_j(s) = s^{j-1}H_1(s)$, $j = 1, 2, \ldots, l$. Επομένως η εξίσωση (**) γράφεται

$$\cdot s^l H_1(s) + d_0 H_1(s) + d_1 s H_1(s) + \ldots + d_{l-1}s^{l-1}H_1(s) = I_m$$

που συνεπάγεται ότι:

$$(s^l + d_{l-1}s^{l-1} + \ldots + d_1 s + d_0)H_1(s) = I_m$$

Επομένως $d(s)H_1(s) = I_m$ και

$$\begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \\ \vdots \\ H_{l-1}(s) \\ H_l(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} I_m \\ sI_m \\ \vdots \\ s^{l-2}I_m \\ s^{l-1}I_m \end{bmatrix}$$

και άρα

$$\begin{bmatrix} N_0 & N_1 & \cdots & N_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \\ \vdots \\ H_{l-1}(s) \\ H_l(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} N_0 & N_1 & \cdots & N_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m \\ sI_m \\ \vdots \\ s^{l-2}I_m \\ s^{l-1}I_m \end{bmatrix}$$

και συνεπώς $C(sI_n - A)^{-1}B = \frac{1}{d(s)}(N_0 + N_1 s + \ldots + N_{l-1}s^{l-1}) = \hat{G}(s)$. □

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση μεταφοράς:

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των πολυωνύμων των παρονομαστών είναι:

$$d(s) = s^2(s+1) = s^3 + s^2 + 0s + 0$$

και άρα $l = 3$, $p = m = 2$ και $n = lm = 6$. Επίσης,

$$N(s) = d(s)\hat{G}(s) = s^2(s+1) \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2+s & 0 \\ s+1 & s^2 \end{bmatrix}$$

και επομένως:

$$N(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s^2 := N_0 + N_1 s + N_2 s^2$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο Θεώρημα μία πραγματοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς $\hat{G}(s)$ είναι $\Sigma(A, B, C, 0_2)$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & I_2 \\ 0_2 & 0_2 & -I_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6},\ B = \begin{bmatrix} 0_2 \\ 0_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 2},\ C = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{2\times 6}$$

Πράγματι,

$$(sI_6 - A)^{-1} = \begin{bmatrix} sI_2 & -I_2 & 0 \\ 0 & sI_2 & -I_2 \\ 0 & 0 & (s+1)I_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{I_2}{s} & \frac{I_2}{s^2} & \frac{I_2}{s^2(s+1)} \\ 0 & \frac{I_2}{s} & \frac{I_2}{s(s+1)} \\ 0 & 0 & \frac{I_2}{s+1} \end{bmatrix}$$

και επομένως

$$C(sI_6 - A)^{-1}B = \frac{N_0}{s^2(s+1)} + \frac{N_1}{s(s+1)} + \frac{N_2}{s+1} = \frac{1}{s^2(s+1)} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s & 0 \\ s & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} \right)$$

δηλαδή

$$C(sI_6 - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} = \hat{G}(s)$$

και άρα $\Sigma(A, B, C, 0_2)$ είναι πραγματοποίηση της $\hat{G}(s)$ (αλλά όχι ελάχιστη πραγματοποίηση). Αν ορίσουμε:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

τότε

$$C_1(sI_3 - A_1)^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως,

$$C_1(sI_3 - A_1)^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Ισοδύναμα,

$$C_1(sI_3 - A_1)^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} = \hat{G}(s)$$

και άρα $\Sigma(A_1, B_1, C_1, 0_2)$ είναι επίσης πραγματοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς $\hat{G}(s)$. Εφόσον $A_1 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ η διάσταση της πραγματοποίησης αυτής ($n = 3$) είναι μικρότερη από την διάσταση της πραγματοποίησης $\Sigma(A, B, C, 0_2)$ της $\hat{G}(s)$ ($n = 6$). Θα δούμε σε επόμενη ενότητα ότι το ζεύγος $\Sigma_i(A_1, B_1)$ και $\Sigma_o(A_1, C_1)$ είναι πλήρως ελέγξιμο και πλήρως παρατηρήσιμο, αντίστοιχα, και επομένως η διάσταση της πραγματοποίησης $\Sigma(A_1, B_1, C_1, 0_2)$ ($n = 3$) είναι ελάχιστη (δηλαδή δεν υπάρχει πραγματοποίηση της $\hat{G}(s)$ με διάσταση 2 η μικρότερη).

Γ. Χαλικιάς, 22-3-2026