

# Θεωρία Ελέγχου: Εισαγωγικά

## 1. Μαθηματικά μοντέλα δυναμικών συστημάτων

Ως σύστημα ορίζουμε “ένα σύνολο αλληλοσχετιζόμενων και ανεξάρτητων αντικειμένων που σχηματίζουν μία πολύπλοκη ενότητα”. Μία πρόχειρη ταξινόμηση δυναμικών συστημάτων που περιγράφονται από δυναμικά μοντέλα μέσω μαθηματικών εξισώσεων είναι η παρακάτω:

- 1.1 Ντετερμινιστικά, αιτιοκρατικά (Deterministic): Η αρχική συνθήκη και το εξωτερικό ερέθισμα από το περιβάλλον (συνάρτηση εισόδου) καθορίζουν πλήρως τη έξοδο (απόκριση του συστήματος).
- 1.2 Στοχαστικά (Stochastic): Περιγράφονται από στοχαστικές ανελίξεις.
- 2.1 Συνεχούς χρόνου (continuous-time): Περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις.
- 2.2 Διακριτού χρόνου (discrete-time): Περιγράφονται από εξισώσεις διαφορών.
- 2.3 Υβριδικά (hybrid): Περιγράφονται από μείγμα διαφορικών εξισώσεων, εξισώσεων διαφορών και λογικές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών.
- 3.1 Μη-γραμμικά (non-linear): Περιγράφονται από μη γραμμικές εξισώσεις (διαφορικές η διαφορών)
- 3.2 Γραμμικά (linear): Περιγράφονται από γραμμικές εξισώσεις (διαφορικές η διαφορών)
- 4.1 Χρονικά μεταβαλλόμενα (time-varying): Η μεταβλητή του χρόνου εμφανίζεται στις εξισώσεις ως ανεξάρτητη μεταβλητή.
- 4.2 Χρονικά αναλλοίωτα (time-invariant): Η μεταβλητή του χρόνου δεν εμφανίζεται στις εξισώσεις ως ανεξάρτητη μεταβλητή (η εξάρτηση είναι έμμεση μέσω των μεταβλητών κατάστασης και εισόδου).
- 5.1 Άπειρης διάστασης (distributed, infinite-dimensional): Περιγράφονται από μερικές διαφορικές εξισώσεις.
- 5.2 Πεπερασμένων διαστάσεων (finite-dimensional, lumped): Περιγράφονται από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Τα μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή δυναμικών συστημάτων ελέγχου είναι δύο ειδών: (α) Μοντέλα εισόδου-εξόδου (input-output) και μοντέλα καταστάσεων χώρου (state-space). Εδώ ως είσοδο σε ένα σύστημα εννοούμε το σύνολο των εξωτερικών ερεθισμάτων που ασκούνται στο σύστημα από το εξωτερικό περιβάλλον και ως έξοδο την αντίστοιχη απόκριση του συστήματος στα ερεθίσματα αυτά. Ένα σύστημα χαρακτηρίζεται ως δυναμικό όταν έχει μνήμη, δηλ. όταν η απόκριση του συστήματος σε κάποια χρονική στιγμή δεν εξαρτάται μόνο από την είσοδο εκείνη την συγκεκριμένη χρονική στιγμή αλλά και από την είσοδο του συστήματος σε χρονικές στιγμές του παρελθόντος. (Εφόσον το μοντέλο συνήθως αναπαριστά ένα φυσικό σύστημα, υποθέτουμε ότι είναι αιτιατό, δηλαδή ότι η απόκριση του συστήματος σε μία χρονική στιγμή είναι ανεξάρτητη από την είσοδο του συστήματος σε όλους τους μελλοντικούς χρόνους). Δυναμικά συστήματα συνεχούς χρόνου μοντελοποιούνται συνήθως μέσω διαφορικών εξισώσεων, ενώ δυναμικά συστήματα διακριτού χρόνου από εξισώσεις διαφορών.

Σε μοντέλα εισόδου-εξόδου το σύστημα περιγράφεται μαθηματικά ως ένας τελεστής που απεικονίζει συναρτήσεις εισόδου  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  σε συναρτήσεις εξόδου  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ . Για παράδειγμα, ένα σύστημα εισόδου-εξόδου συνεχούς χρόνου μπορεί να οριστεί από τα σύνολα συναρτήσεων  $\mathcal{U} = C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$  (το σύνολο συνεχών διανυσματικών συναρτήσεων διάστασης  $m$  που ορίζονται στο χρονικό διάστημα  $\mathbb{R}$ ) και  $\mathcal{Y} = C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^p)$ . Στην περίπτωση αυτή η συμπεριφορά του συστήματος ορίζεται από το σύνολο που περιέχει όλα τα επιτρεπτά ζεύγη  $(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{Y}$ .

Τα μοντέλα εισόδου-εξόδου είναι πολύπλοκα και δεν παρέχουν καμία πληροφορία για τον εσωτερικό μηχανισμό του συστήματος και την εξέλιξη των εσωτερικών μεταβλητών κατάστασης με την πάροδο

του χρόνου. Και τα δύο αυτά μειονεκτήματα παύουν να ισχύουν σε μοντέλα καταστάσεων χώρου. Το διάνυσμα κατάστασης την χρονική στιγμή  $t_0$ ,  $\mathbf{x}(t_0)$ , συμπυκνώνει όλη την πληροφορία της εξέλιξης του συστήματος σε παρελθόντες χρόνους ( $t \leq t_0$ ) που χρειάζεται (μαζί με την μελλοντική συνάρτηση εισόδου στο διάστημα  $[t_0, t]$ ,  $\mathbf{u}_{[t_0, t]} = \{\mathbf{u}(\tau) : t_0 \leq \tau \leq t\}$ ) για την πρόβλεψη της μελλοντικής κατάστασης του συστήματος,  $\mathbf{x}(t)$ ,  $t > t_0$ . Επόμενως, η εξέλιξη της εσωτερικής κατάστασης του συστήματος καθορίζεται από μία απεικόνιση της μορφής  $\mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ , όπου  $\mathcal{X}$  ο χώρος καταστάσεων, ενώ η έξοδος του συστήματος από μία απεικόνιση της μορφής  $\mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$ .

## 2.1 Συστήματα ελέγχου καταστάσεων χώρου (state control)

Η Μαθηματική Θεωρία Ελέγχου είναι επέκταση της Θεωρίας των Διαφορικών Εξισώσεων (όπως επίσης των Εξισώσεων Διαφορών και των Δυναμικών Συστημάτων) με εφαρμογές σε σχεδόν όλους τους κλάδους της Μηχανικής, καθώς και των Οικονομικών, της Βιολογίας, της Μαθηματικής Οικολογίας και άλλων Φυσικών Επιστημών. Η θεωρία εξετάζει συστήματα διαφορικών εξισώσεων με βαθμούς ελευθερίας ως προς ορισμένες μεταβλητές. Για παράδειγμα, έστω το σύστημα δ.ε. που γράφεται σε διανυσματική μορφή ως:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$$

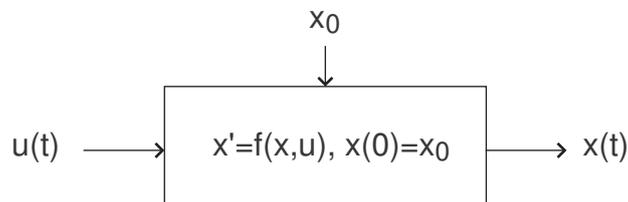
όπου  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  και  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  ορίζονται, αντίστοιχα, ως το διάνυσμα καταστάσεων χώρου και το διάνυσμα εισόδου (ελέγχου). Ισοδύναμα, το σύστημα γράφεται στη μορφή βαθμωτών διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), & x_1(0) &= x_1^0 \in \mathbb{R}, & t &\geq 0 \\ x_2' &= f_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), & x_2(0) &= x_2^0 \in \mathbb{R}, & t &\geq 0 \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), & x_n(0) &= x_n^0 \in \mathbb{R}, & t &\geq 0 \end{aligned}$$

όπου

$$\mathbf{f}^T = [ f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_n ], \quad \mathbf{x}^T = [ x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n ] \quad \text{και} \quad \mathbf{u}^T = [ u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_m ]$$

Η διανυσματική συνάρτηση  $\mathbf{u}$  είναι διάνυσμα βαθμωτών συναρτήσεων  $u_i$  τις οποίες μπορούμε να επιλέξουμε ελεύθερα από κάποιο σύνολο συναρτήσεων  $\mathbf{u} : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ . Κάθε διαφορετική επιλογή των συναρτήσεων αυτών δίνει μια διαφορετική λύση στο αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών ως προς τις μεταβλητές κατάστασης  $x_1, \dots, x_n$ . (Υποθέτουμε ότι όλες οι μεταβλητές ανήκουν σε κατάλληλη κλάση συναρτήσεων που μαζί με τις ιδιότητες των  $f_i$  εγγυώνται ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης του αντίστοιχου Προβλήματος Αρχικών Τιμών (ΠΑΤ) σε όλο το διάστημα  $[0, \infty)$ ). Διαγραμματικά (Σχήμα 1):



Σχήμα 1: Σύστημα καταστάσεων χώρου με έξοδο το διάνυσμα κατάστασης

Το βασικό πρόβλημα της Θεωρίας Ελέγχου (με γενικούς όρους που θα συγκεκριμενοποιηθούν αργότερα) είναι η επιλογή κατάλληλης συνάρτησης εισόδου  $\mathbf{u} : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$  ώστε το διάνυσμα κατάστασης  $\mathbf{x}(t)$  που είναι η λύση του ΠΑΤ να έχει επιθυμητές ιδιότητες (ποιοτικές/ποσοτικές). Παρατηρούμε ότι αυτό είναι πρόβλημα σύνθεσης και αφορά την κατάλληλη επιλογή των συναρτήσεων εισόδου ώστε η λύση του συστήματος να ικανοποιεί τους στόχους σχεδίασης.

**Παράδειγμα:** Έστω ότι ο πληθυσμός ψαριών  $x(t)$  σε κάποιο οικοσύστημα (π.χ. λίμνη) την χρονική στιγμή  $t$  ικανοποιεί την δ.ε. (παραλλαγή του λογιστικού μοντέλου):

$$x'(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{M}\right) - x(t)u(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$$

όπου  $r, M$  θετικές σταθερές και  $u(t)$  η συνάρτηση συγκομιδής (ένταση αλιείας), η οποία είναι η συνάρτηση ελέγχου του συστήματος. Πώς πρέπει να επιλέξουμε την συνάρτηση  $u$  ώστε να έχουμε αρκούντως μεγάλη συγκομιδή αλλά και να εξασφαλίσουμε την βιωσιμότητα του οικοσυστήματος (δηλαδή να μην μειωθεί δραματικά ο πληθυσμός σε κάποιον χρόνο στο μέλλον); Παρατηρούμε ότι στο παράδειγμα οι δύο στόχοι είναι αντίθετοι και επομένως απαιτείται κάποιος συμβιβασμός μεταξύ τους, κάτι που είναι σύνηθες φαινόμενο σε πολλά πρακτικά προβλήματα ελέγχου (π.χ. ύπαρξη αντικρουόμενων στόχων σχεδίασης ως προς την ευστάθεια και την επίδοση του συστήματος).  $\square$

Στη πράξη, ο έλεγχος του συστήματος συνήθως βασίζεται σε μετρήσεις των μεταβλητών κατάστασης  $x_i(t)$  σε πραγματικό χρόνο και την επιλογή του διανύσματος εισόδου  $\mathbf{u}$  ως συνάρτηση του διανύσματος κατάστασης  $\mathbf{x}$ , δηλαδή ως συνάρτηση της μορφής  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$  (και όχι άμεσα ως συνάρτηση του χρόνου  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ ). Αυτή η μορφή ελέγχου λέγεται έλεγχος *ανάδρασης καταστάσεων*. Αντίθετα, έλεγχος όπου η συνάρτηση εισόδου επιλέγεται απευθείας ως συνάρτηση του χρόνου, δηλ.  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$  λέγεται έλεγχος ανοικτού βρόχου και χρησιμοποιείται σπάνια. Τα βασικά μειονεκτήματα αυτής της μορφής ελέγχου είναι η αδυναμία του να οδηγήσει σε αυτοδιόρθωση της τροχιάς του συστήματος κάτω από συνθήκες απουσίας εξωτερικών διαταραχών και σφάλματος στις παραμέτρους των δυναμικών εξισώσεων που περιγράφουν το σύστημα.

## 2.2 Συστήματα ελέγχου εξόδου (output control)

Ένα σημαντικό μειονέκτημα της μορφής ελέγχου μέσω *ανάδρασης καταστάσεων* (ιδίως σε συστήματα με πολλές μεταβλητές κατάστασης) είναι η απαίτηση ότι όλες οι εσωτερικές μεταβλητές κατάστασης είναι μετρήσιμες. Στην πράξη, η απαίτηση αυτή είναι πολύ ισχυρή, καθώς απαιτεί έναν αισθητήρα για κάθε εσωτερική μεταβλητή (state), και επομένως συνεπάγεται αυξημένη πολυπλοκότητα και κόστος για συστήματα με μεγάλη διάσταση του χώρου κατάστασης. Πολλές φορές, μόνο ένας μικρός αριθμός από τις εσωτερικές μεταβλητές αρκεί για τον επιτυχή έλεγχο του συστήματος, ακόμα και αν η διάσταση του χώρου κατάστασης είναι άπειρη, όπως αυτό συμβαίνει, π.χ., σε προβλήματα απόσβεσης ελαστικών μηχανικών ταλαντώσεων που περιγράφονται από μερικές διαφορικές εξισώσεις (partial differential equations).

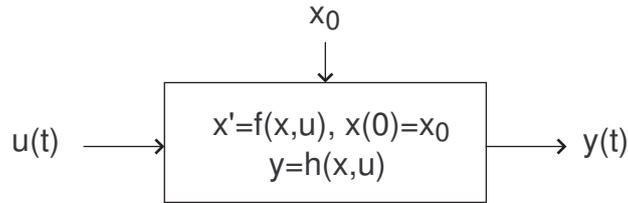
Σε συστήματα εξόδου, υποθέτουμε ότι το διάνυσμα καταστάσεων του συστήματος δεν είναι απαραίτητα προσβάσιμο και η πληροφορία για τον εσωτερικό μηχανισμό του συστήματος δίνεται έμμεσα από κάποιο διάνυσμα εξόδου της μορφής:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad t \geq 0$$

Υποθέτουμε ότι το διάνυσμα εξόδου  $\mathbf{y}(t)$  είναι μετρήσιμο σε πραγματικό χρόνο και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ορίσει κατάλληλο διάνυσμα εισόδου  $\mathbf{u}(t)$  (έλεγχου) έτσι ώστε οι συναρτήσεις  $x_i(t)$  που προκύπτουν από την επίλυση του ΠΑΤ:  $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  και οι αντίστοιχες συναρτήσεις εξόδου  $y_i(t)$  που προκύπτουν από το (αλγεβρικό) σύστημα εξισώσεων  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  να έχουν επιθυμητές ιδιότητες. Διαγραμματικά το σύστημα περιγράφεται ως εξής (Σχήμα 2):

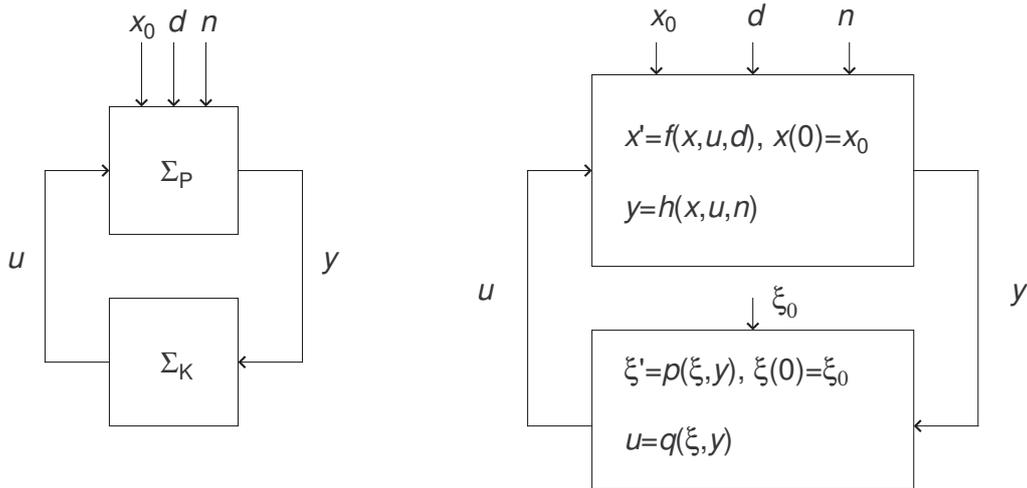
## 2.3 Συστήματα ανάδρασης εξόδου (output feedback) και δυναμικοί αντισταθμιστές

Όπως και στην περίπτωση ανάδρασης καταστάσεων, Γιά λόγους που συνδέονται κυρίως με την ύπαρξη αβεβαιότητας του μοντέλου ( $\Sigma_P$ ), π.χ. αβεβαιότητα στις παραμέτρους των δ.ε. του  $\Sigma_P$ , συνήθως υλοποιούμε το σύστημα ελέγχου μέσω αντισταθμιστή *ανάδρασης εξόδου*, δηλ. δεν εφαρμόζουμε την (προ-υπολογισμένη) συνάρτηση ελέγχου  $\mathbf{u}(t)$  στην είσοδο του  $\Sigma_P$ , αλλά την δημιουργούμε σε πραγματικό χρόνο από την έξοδο δυναμικού συστήματος που σχεδιάζουμε (αντισταθμιστής  $\Sigma_K$ ), η είσοδος του οποίου ( $\mathbf{y}$ )



Σχήμα 2: Σύστημα καταστάσεων χώρου με έξοδο  $\mathbf{y}(t)$

ταυτίζεται με την έξοδο του  $\Sigma_P$ . Με τον τρόπο αυτό, πιθανή απόκλιση των μεταβλητών του συστήματος από την προβλεπόμενη τροχιά τους (που μπορεί να προκύψει, π.χ. λόγω σφαλμάτων των παραμέτρων του μοντέλου, ή λόγω εξωτερικών διαταραχών) παρακολουθείται συνεχώς και μπορεί να διορθωθεί από το σύστημα ανάδρασης. Το σύστημα  $(\Sigma_P, \Sigma_K)$  (Σχήμα 3) που προκύπτει μέσω συνδεσμολογίας ανάδρασης αναφέρεται συνήθως ως σύστημα κλειστού βρόγχου. Σε αντίθεση, το σύστημα ανοιχτού βρόγχου στο οποίο εφαρμόζουμε προ-υπολογισμένη συνάρτηση στην είσοδο του  $\Sigma_P$  είναι τυφλό σε διαταραχές ή λανθασμένες παραμέτρους, εξ' αιτίας των οποίων το σύστημα μπορεί να αποκλίνει από την πορεία του, όπως αυτή καταγράφεται στις προσομοιώσεις, χωρίς να μπορεί να την διορθώσει.



Σχήμα 3: Έλεγχος ανάδρασης εξόδου με δυναμικό αντισταθμιστή

Στις εξισώσεις του συστήματος προσθέσαμε συνάρτησης διαταραχής (disturbance,  $\mathbf{d}(t)$ ) και συνάρτησης θορύβου (noise,  $\mathbf{n}(t)$ ) που προέρχεται από τους αισθητήρες του  $\Sigma_P$ . Οι διαταραχές αναφέρονται σε μη επιθυμητά σήματα είσοδου που προέρχονται από το εξωτερικό περιβάλλον και δεν είναι υπό τον έλεγχο του σχεδιαστή του συστήματος ελέγχου, π.χ. ριπές ανέμου που επηρεάζουν την τροχιά εναέριου οχήματος. Αντισταθμιστής ανάδρασης εξόδου (καταστάσεων χώρου) που ορίζεται από εξίσωση της μορφής  $\mathbf{u} = \mathbf{q}(\mathbf{y})$  ( $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ) ονομάζεται στατικός αντισταθμιστής εξόδου (καταστάσεων).

Το γενικό πρόβλημα της Θεωρίας Ελέγχου επομένως είναι ο σχεδιασμός του αντισταθμιστή  $\Sigma_K$  ώστε να επιτυγχάνεται:

- Δυναμική Ευστάθεια του Συστήματος Κλειστού Βρόγχου  $(\Sigma_P, \Sigma_K)$ .
- Δυναμική Επίδοση του Συστήματος Κλειστού Βρόγχου  $(\Sigma_P, \Sigma_K)$  που συνήθως ορίζεται από τα χαρακτηριστικά των συναρτήσεων  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{y}(t)$  και  $\mathbf{u}(t)$  και αφορά στόχους σχεδίασης όπως: η

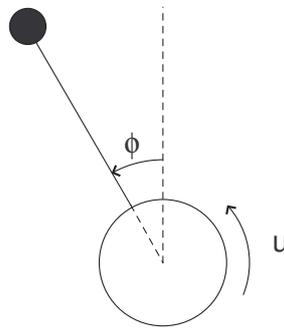
παρακολούθηση (tracking) εξωτερικού σήματος με μικρό σφάλμα, ταχεία απόκριση, ταχεία απόσβεση ταλαντώσεων, μικρός υπερακοντισμός, μικρή ευαισθησία σε εξωτερικές διαταραχές και σήματα θορύβου, κ.λ.π.

- *Ευρωστία*: Μικρή ευαισθησία των παραπάνω δύο ιδιοτήτων σε σφάλματα του μαθηματικού μοντέλου (εύρωστη ευστάθεια, εύρωστη επίδοση).

**Παράδειγμα:** Εξετάζουμε το δυναμικό σύστημα (Σχήμα 4) που ορίζεται από την διαφορική εξίσωση:

$$\phi''(t) - \phi(t) = u(t) + d(t)$$

με αρχικές συνθήκες  $\phi(0) = 1$ ,  $\phi'(0) = -1$  (γραμμικοποιημένο σύστημα αντεστραμμένου εκκρεμούς που ελέγχεται από κινητήρα, όπου  $\phi$  η γωνία που σχηματίζει το εκκρεμές με την κατακόρυφο,  $u$  η συνάρτηση ελέγχου (ροπή που ασκεί ο κινητήρας) και  $d(t)$  η ροπή διαταραχής).



Σχήμα 4: Έλεγχος αντεστραμμένου εκκρεμούς

Ισοδύναμα οι εξισώσεις του συστήματος γράφονται σε μορφή καταστάσεως χώρου:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{B}_d d(t), \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \phi(t) \\ \phi'(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \phi(0) \\ \phi'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Υποθέτουμε ότι η έξοδος του συστήματος ταυτίζεται με το διάνυσμα κατάστασης, δηλαδή ότι και οι δύο μεταβλητές  $\phi$  και  $\phi'$  είναι μετρήσιμες. Έστω επίσης ότι η διαταραχή  $d(t)$  είναι ο παλμός:

$$d(t) = \begin{cases} \epsilon & \text{αν } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Έστω επίσης ότι η συνάρτηση ελέγχου ορίζεται μέσω ανάδρασης καταστάσεων:

$$u(t) = - \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(t) \\ \phi'(t) \end{bmatrix} = -\alpha\phi(t) - \beta\phi'(t) \quad \text{όπου } \alpha = \beta = 3$$

Μπορεί αυτή η συνάρτηση να φέρει το σύστημα ασυμπτωτικά στο σημείο ισορροπίας  $\phi' = \phi = 0$  (παρά την διαταραχή  $d(t)$ );

**Περίπτωση 1 - Έλεγχος μέσω ανάδρασης καταστάσεων,  $d(t) = 0$ :** Αναλύουμε αρχικά το σύστημα με μηδενική διαταραχή. Η εξίσωση κλειστού βρόγχου είναι:

$$\phi'' - \phi = u = -3\phi - 3\phi' \Rightarrow \phi'' + 3\phi' + 2\phi = 0$$

Η εξίσωση είναι ομογενής με χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda = -1, \lambda = -2$$

Άρα η γενική λύση είναι:

$$\phi(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t} \Rightarrow \phi'(t) = -Ae^{-t} - 2Be^{-2t}$$

Επομένως

$$\phi(0) = A + B = 1 \text{ και } \phi'(0) = -A - 2B = -1$$

Προσθέτοντας

$$-B = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow A = 1$$

Άρα

$$\phi(t) = e^{-t}, \phi'(t) = -e^{-t} \text{ και συνεπώς } u(t) = -3(\phi(t) + \phi'(t)) = 0$$

δηλαδή το σύστημα κλειστού βρόγχου είναι (ασυμπτωτικά) ευσταθές και  $\phi(t) \rightarrow 0, \phi'(t) \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

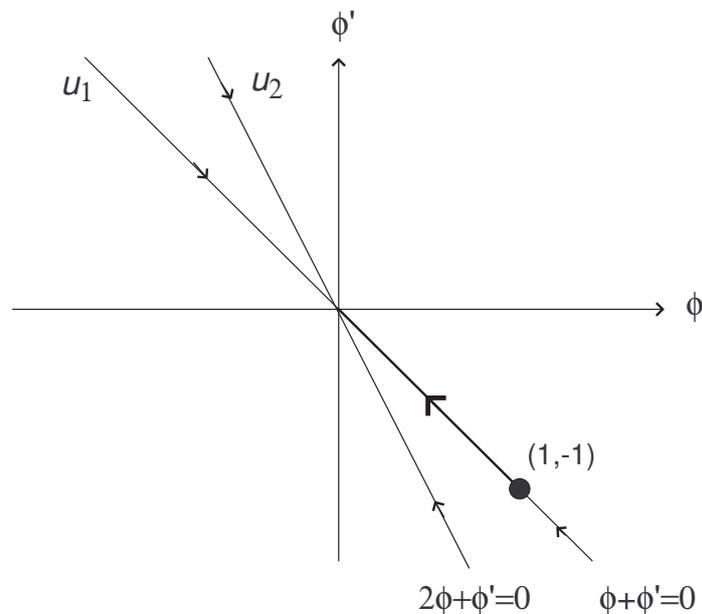
Το σύστημα καταστάσεων χώρου (κλειστού βρόγχου) είναι:

$$\begin{bmatrix} \phi' \\ \phi'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \phi' \end{bmatrix}$$

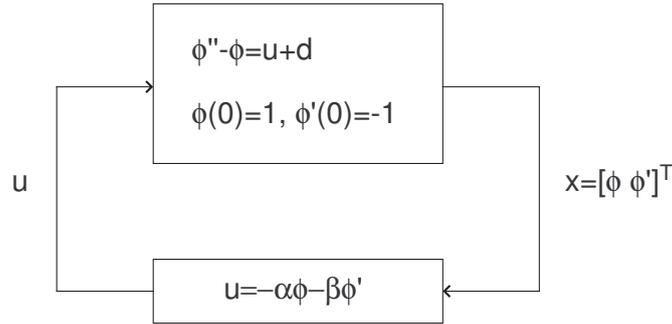
Οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$  και

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα έχει σταθεροποιηθεί μέσω της ανάδρασης. Εφόσον η αρχική κατάσταση κείται πάνω στο ιδιοδιάνυσμα  $u_1$ , όλη η τροχιά στου συστήματος τείνει στο σημείο ισορροπίας από αυτή την διεύθυνση. Το διάγραμμα φάσης του συστήματος είναι ως εξής:



Σχήμα 5: Διαγραμμα φάσης (περίπτωση 1)



Σχήμα 6: Έλεγχος μέσω ανάδρασης καταστάσεων,  $d(t) \neq 0$

**Περίπτωση 2 - Ανάδραση καταστάσεων,  $d(t) \neq 0$ :** Στην συνέχεια αναλύουμε το σύστημα με διαταραχή  $d(t)$  εφαρμόζοντας την ανάδραση καταστάσεων  $u = -\alpha\phi - \beta\phi'$ ,  $\alpha = \beta = 3$ :

A. Διάστημα  $0 \leq t \leq 1$ : Στο διάστημα αυτό  $d(t) = 0$  και επομένως  $\phi(t) = e^{-t}$ ,  $\phi'(t) = -e^{-t}$  και  $u(t) = 0$  όπως προηγουμένως. Στο τέλος του διαστήματος:  $\phi(1) = e^{-1}$ ,  $\phi'(1) = -e^{-1}$ .

B. Διάστημα  $1 \leq t \leq 2$ : Στο διάστημα αυτό  $d(t) = \epsilon$ . Επομένως:

$$\phi'' - \phi = -3\phi - 3\phi' + \epsilon \Rightarrow \phi'' + 3\phi' + 2\phi = \epsilon$$

Γενική λύση ομογενούς εξίσωσης:  $\phi_{\text{ομ}}(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}$ . Ειδική λύση μη-ομογενούς εξίσωσης:  $\phi_{\text{μο}}(t) = \frac{\epsilon}{2}$ . Άρα:

$$\phi(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t} + \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \phi'(t) = -Ae^{-t} - 2Be^{-2t}$$

Λόγω συνέχειας οι αρχικές συνθήκες γράφονται:

$$\phi(1) = Ae^{-1} + Be^{-2} + \frac{\epsilon}{2} = e^{-1} \quad \text{και} \quad \phi'(1) = -Ae^{-1} - 2Be^{-2} = -e^{-1}$$

Προσθέτοντας έχουμε:  $B = \frac{1}{2}\epsilon e^2$  και άρα  $A = 1 - \epsilon e$ . Άρα:

$$\phi(t) = (1 - \epsilon e)e^{-t} + \frac{\epsilon}{2}e^2e^{-2t} + \frac{\epsilon}{2}, \quad \phi'(t) = -(1 - \epsilon e)e^{-t} - \epsilon e^2e^{-2t}$$

Επίσης:

$$u(t) = -3(\phi + \phi') = -3\left(\frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2}e^2e^{-2t}\right) = -\frac{3\epsilon}{2}\left(1 - e^{-2(t-1)}\right)$$

Στο τέλος του διαστήματος ( $t = 2$ ):

$$\phi(2) = (1 - \epsilon e)e^{-2} + \frac{\epsilon}{2}e^{-2} + \frac{\epsilon}{2}, \quad \phi'(2) = -(1 - \epsilon e)e^{-2} - \epsilon e^{-2}, \quad u(2) = -\frac{3\epsilon}{2}(1 - e^{-2})$$

Γ. Διάστημα  $t \geq 2$ : Στο διάστημα αυτό:

$$\phi(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}, \quad \phi'(t) = -Ae^{-t} - 2Be^{-2t}$$

Επομένως (λόγω συνέχειας):

$$\phi(2) = Ae^{-2} + Be^{-4} = (1 - \epsilon e)e^{-2} + \frac{\epsilon}{2}e^{-2} + \frac{\epsilon}{2}, \quad \phi'(2) = -Ae^{-2} - 2Be^{-4} = -(1 - \epsilon e)e^{-2} - \epsilon e^{-2}$$

Προσθέτοντας και αντικαθιστώντας έχουμε:

$$B = -\frac{\epsilon e^2}{2}(e^2 - 1) \quad \text{και} \quad A = \epsilon e^2 - \epsilon e + 1$$

Επομένως:

$$\phi(t) = (\epsilon e^2 - \epsilon e + 1)e^{-t} - \frac{\epsilon}{2}e^2(e^2 - 1)e^{-2t}, \quad \phi'(t) = -(\epsilon e^2 - \epsilon e + 1)e^{-t} + \epsilon e^2(e^2 - 1)e^{-2t}$$

Επίσης

$$u(t) = -3(\phi(t) + \phi'(t)) = -\frac{3\epsilon}{2}e^2(e^2 - 1)e^{-2t} \Rightarrow u(t) = -\frac{3\epsilon}{2}(e^2 - 1)e^{-2(t-1)}$$

και

$$u(t) = -\frac{3\epsilon}{2}(1 - e^{-2})e^{-2(t-2)}, \quad u(2) = -\frac{3\epsilon}{2}(1 - e^{-2})$$

Παρατηρούμε ότι

$$\phi(t) \rightarrow 0, \quad \phi'(t) \rightarrow 0 \text{ και } u(t) \rightarrow 0$$

καθώς  $t \rightarrow \infty$  και επομένως το σύστημα τείνει ασυμπτωτικά στο σημείο ισορροπίας  $\phi = \phi' = 0$ .

Η παραπάνω ανάλυση απλουστεύεται με χρήση μετασχηματισμού Laplace. Η διαφορική εξίσωση γράφεται ως:

$$\phi''(t) + 3\phi'(t) + 2\phi = d(t) \Rightarrow (s^2\hat{\phi}(s) - s\phi(0) - \phi'(0)) + 3(s\hat{\phi}(s) - \phi(0)) + 2\hat{\phi}(s) = \hat{d}(s)$$

Επομένως:

$$(s^2 + 3s + 2)\hat{\phi}(s) = s + 2 + \frac{\epsilon e^{-s}}{s} - \frac{\epsilon e^{-2s}}{s} \Rightarrow \hat{\phi}(s) = \frac{s + 2}{(s + 1)(s + 2)} + \frac{\epsilon(e^{-s} - e^{-2s})}{s(s + 1)(s + 2)}$$

Έχουμε

$$\frac{1}{s(s + 1)(s + 2)} = \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{1}{s + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{s + 2}$$

και επομένως για  $t \geq 2$  έχουμε:

$$\phi(t) = e^{-t} + \left(\frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2}\right) - \epsilon(e^{-(t-1)} - e^{-(t-2)}) + \frac{\epsilon}{2}(e^{-(t-1)} - e^{-(t-2)}) \rightarrow 0$$

καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

Το διάγραμμα φάσης του συστήματος για το διάστημα  $t \in [0, 1]$  (στο οποίο  $d(t) = 0$ ) ταυτίζεται με αυτό της περίπτωσης 1, δηλαδή το διάνυσμα κατάστασης κινείται πάνω στο ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{u}_1$  ( $\phi + \phi' = 0$ ) από το σημείο  $(1, -1)$  προς το σημείο  $(e^{-1}, -e^{-1})$ . Στο διάστημα  $t \in [1, 2]$  το διάνυσμα κατάστασης κινείται στην καμπύλη ΒΓ αν  $\epsilon > 0$ , στην καμπύλη ΒΔ αν  $\epsilon < 0$  και στην καμπύλη ΒΟ αν  $\epsilon = 0$ . Από την προηγούμενη ανάλυση:

$$\phi(2) + \phi'(2) = \frac{\epsilon}{2}(1 - e^{-2}) > 0 \text{ αν } \epsilon > 0 \text{ και } \phi(2) + \phi'(2) < 0 \text{ αν } \epsilon < 0$$

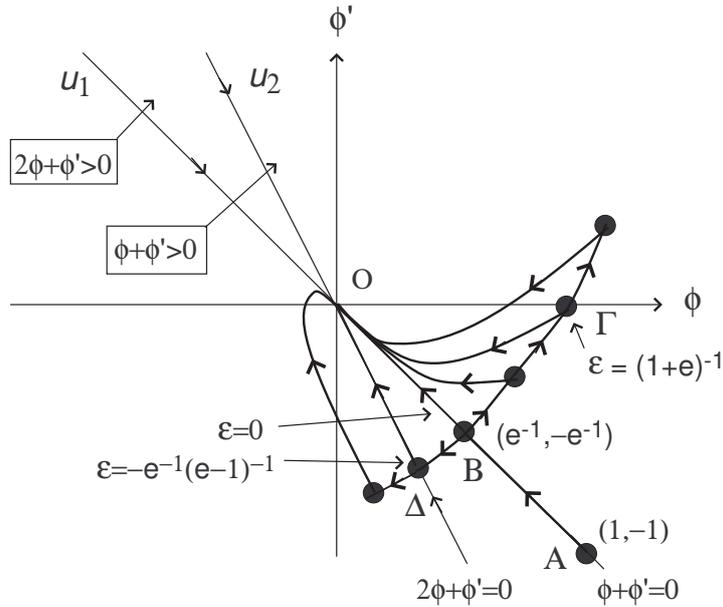
Επίσης

$$2\phi(2) + \phi'(2) = e^{-2} + \epsilon(1 - e^{-1}) > 0 \text{ αν } \epsilon > 0$$

Επομένως για  $\epsilon > 0$ , το σημείο  $\mathbf{x}$  βρίσκεται στην τομή των ημι-επιπέδων  $\phi + \phi' > 0$  και  $2\phi + \phi' > 0$  όπως δείχνει το σχήμα. Στο διάστημα  $t \geq 2$  το διάνυσμα  $x(t)$  κινείται προς το σημείο ισορροπίας στην αρχή των αξόνων, ασυμπτωτικά από την διεύθυνση του ιδιοδιανύσματος  $\mathbf{u}_1$  ( $\phi + \phi' = 0$ ) που αντιστοιχεί στην αργή ιδιοτιμή  $\lambda = -1$ . Για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\epsilon$  έχουμε  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$  και το σύστημα κλειστού βρόγχου είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

**Περίπτωση 3 - Έλεγχος ανοικτού βρόγχου,  $u(t) = 0, d(t) \neq 0$ :** Αν εφαρμόσουμε την υπολογισμένη είσοδο  $u(t) = 0$  (που προκύπτει στην περίπτωση 1) στο  $\Sigma_p$  ταυτόχρονα με την μη-μηδενική διαταραχή  $d(t)$  (Σχήμα 8). Η έξοδος του  $\Sigma_p$  προκύπτει από την λύση της δ.ε.

$$\phi'' - \phi = 0 + d(t) \Rightarrow (s^2\hat{\phi}(s) - s\phi(0) - \phi'(0)) - \hat{\phi}(s) = \hat{d}(s) \Rightarrow (s^2 - 1)\hat{\phi}(s) - s + 1 = \hat{d}(s)$$



Σχήμα 7: Διαγραμμα φάσης (περίπτωση 2)

Επομένως:

$$\hat{\phi}(s) = \frac{s-1}{(s-1)(s+1)} + \frac{\epsilon}{s} \left( \frac{e^{-s}}{(s-1)(s+1)} - \frac{e^{-2s}}{(s-1)(s+1)} \right) = \frac{1}{s+1} + \frac{\epsilon}{s(s-1)(s+1)} (e^{-s} - e^{-2s})$$

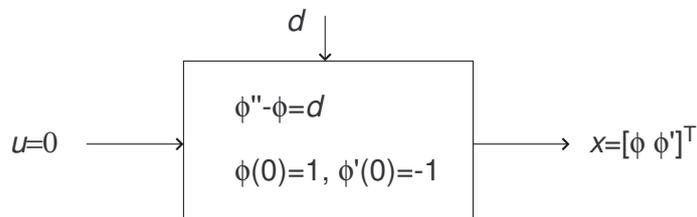
Έχουμε:

$$\mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s+1} \right) = e^{-t} \text{ και } \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s(s-1)(s+1)} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left( -\frac{1}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+1} \right) = -1 + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$$

Επομένως αν  $t \geq 2$ ,

$$\phi(t) = e^{-t} + \frac{\epsilon}{2}e^{t-1} - \frac{\epsilon}{2}e^{t-2} + \frac{\epsilon}{2}e^{-(t-1)} - \frac{\epsilon}{2}e^{-(t-2)} = e^{-t} + \frac{\epsilon}{2}(e^{-1} - e^{-2})e^t + \frac{\epsilon}{2}(e - e^2)e^{-t}$$

και άρα  $|\phi(t)| \rightarrow \infty$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ .



Σχήμα 8: Έλεγχος ανοικτού βρόγχου,  $u(t) = 0$ ,  $d(t) \neq 0$

Το σύστημα καταστάσεων χώρου γράφεται ως:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_d d = \begin{bmatrix} \phi' \\ \phi'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \phi' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d(t) \end{bmatrix}$$

όπου  $d(t) = \epsilon$  αν  $t \in [1, 2]$  και  $d(t) = 0$  αν  $t \notin [1, 2]$ . Οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A$  είναι  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$  και

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και άρα το σημείο ισορροπίας  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  είναι σάγμα. Εφόσον  $\mathbf{x}^T(0) = (\phi(0), \phi'(0)) = (1, -1)$  κείται πάνω στο ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{u}_1$ , η τροχιά του συστήματος παραμένει επί του  $\mathbf{u}_1$  για κάθε  $t \in [0, 1]$ , με κατεύθυνση από το σημείο  $\mathbf{x}^T(0) = (1, -1)$  προς το σημείο  $\mathbf{x}^T(1) = (1, -1)$  και  $\mathbf{x}(t) = (\phi(t), \phi'(t)) = (e^{-t}, -e^{-t})$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Στο διάστημα  $t \in [1, 2]$  το σύστημα περιγράφεται από τη εξίσωση:  $\phi'' - \phi = \epsilon$  με γενική λύση  $\phi(t) = Ae^t + Be^{-t} - \epsilon$ ,  $\phi'(t) = Ae^t - Be^{-t}$ . Λόγω συνέχειας, οι αρχικές συνθήκες είναι:

$$\phi(1) = Ae + Be^{-1} - \epsilon = e^{-1} \quad \text{και} \quad \phi'(1) = Ae - Be^{-1} = -e^{-1}$$

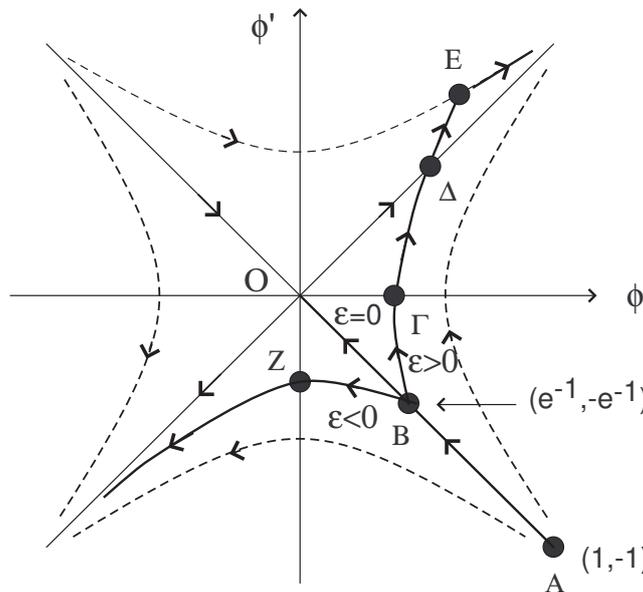
και επομένως  $A = \frac{\epsilon}{2}e^{-1}$  και  $B = \frac{\epsilon e}{2} + 1$ . Άρα στο διάστημα  $t \in [1, 2]$ :

$$\phi(t) = \frac{\epsilon}{2}e^{-1}e^t + \left(\frac{\epsilon e}{2} + 1\right)e^{-t} - \epsilon, \quad \phi'(t) = \frac{\epsilon}{2}e^{-1}e^t - \left(\frac{\epsilon e}{2} + 1\right)e^{-t}$$

Στο τέλος του διαστήματος

$$\mathbf{x}^T(2) = (\phi(2), \phi'(2)) = \left[ \frac{\epsilon(e+e^{-1})}{2} + e^{-2} + \epsilon, \frac{\epsilon(e-e^{-1})}{2} - e^{-2} \right]$$

Παρατηρούμε ότι  $\phi(2) > 0$  και  $\phi(2) + \phi'(2) = \epsilon(e-1) > 0$  αν  $\epsilon > 0$  και  $\phi(2) + \phi'(2) = \epsilon(e-1) < 0$  αν  $\epsilon < 0$ .



Σχήμα 9: Διάγραμμα φάσης (περίπτωση 3)

Τα σημεία  $\Delta$  και  $Z$  αντιστοιχούν στις τιμές  $\epsilon = \frac{2}{e-1}$  και  $\epsilon = -\frac{2e^{-2}}{e+e^{-1}-2}$ , αντίστοιχα. Για κάθε διαταραχή  $\epsilon \neq 0$  το σύστημα κλειστού βρόγχου είναι ασταθές.

**Άσκηση:** Να επαναλάβετε την ανάλυση του Παραδείγματος στις σελίδες 4-7 αν η εξίσωση του συστήματος υπό έλεγχο είναι  $\phi'' - \phi = u(t) + d(t)$  με αρχικές συνθήκες  $\phi(0) = 1$  και  $\phi'(0) = -2$  όπου  $u(t)$  η είσοδος και  $d(t)$  συνάρτηση διαταραχής. Υποθέτουμε ότι: (α) Η είσοδος  $u(t)$  παράγεται από την έξοδο αντισταθμιστή ανάδρασης ως  $u(t) = -\phi(t) - 2\phi'(t)$ , ότι οι μετρήσεις  $\phi(t)$  και  $\phi'(t)$  παρέχονται

στην είσοδο του αντισταθμιστή από την έξοδο του συστήματος και ότι η συνάρτηση διαταραχής είναι πάλι ο παλμός  $d(t) = \epsilon$ ,  $1 \leq t \leq 2$  (και  $d(t) = 0$  διαφορετικά). (β) Υπολογίστε την συνάρτηση  $u(t)$  στο (α) αν  $d(t) = 0$  για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ . (γ) Υπολογίστε την συνάρτηση  $\phi(t)$  αν εφαρμόσουμε την συνάρτηση εισόδου  $u(t)$  που υπολογίσατε στο (β) στην είσοδο του συστήματος με τον αντισταθμιστή αποσυνδεδεμένο, αλλά υπό την επίδραση της (μη-μηδενικής) διαταραχής που περιγράφεται στο (α).

**Άσκηση:** Δείξτε ότι αν η διαφορική εξίσωση  $\phi''(t) - \phi(t) = 3e^{-2t}$  λυθεί με αρχικές συνθήκες  $\phi(0) = 1$  και  $\phi'(0) = -2 + \epsilon$  όπου  $\epsilon$  αυθαίρετα μικρός θετικός αριθμός, τότε  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = +\infty$ , ενώ αν  $\epsilon < 0$  τότε  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = -\infty$ .

## 2.4 Αξιωματική θεμελίωση συστημάτων καταστάσεων χώρου

Στην παρούσα ενότητα δίνεται ένα σύνολο από ορισμούς αυστηρής θεμελίωσης συστημάτων καταστάσεων χώρου (έτσι ώστε να περιλαμβάνει γενικές κατηγορίες, όπως αυτές των γραμμικών και μη γραμμικών συστημάτων, συστημάτων διακριτού και συνεχούς χρόνου, κλπ).

Η χρονική εξέλιξη του συστήματος ορίζεται μέσω ενός συνόλου  $\mathcal{T}$ , όπου  $\mathcal{T} = \mathbb{R}$  ή  $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ . Χρονικά διαστήματα (ανοικτά, κλειστά ή άπειρα) περιορίζονται στο  $\mathcal{T}$ , π.χ  $[a, b) = \{t \in \mathcal{T} : a \leq t < b\}$ . Για κάθε σύνολο  $\mathcal{U}$  και διάστημα  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{T}$  το σύνολο όλων των απεικονίσεων από το  $\mathcal{I}$  στο  $\mathcal{U}$  ορίζεται ως:  $\mathcal{U}^{\mathcal{I}} = \{u : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{U}\}$ . Αν το διάστημα  $\mathcal{I}$  είναι κενό (π.χ.  $\mathcal{I} = [\sigma, \sigma)$ ) γράφουμε συμβατικά  $\mathcal{U}^{\mathcal{I}} = \{\diamond\}$ . Έστω ότι  $\sigma, \tau, \mu \in \mathcal{T}$  τέτοια ώστε  $\sigma \leq \tau \leq \mu$ . Αν  $u_1 \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau)}$  και  $u_2 \in \mathcal{U}^{[\tau, \mu)}$ , η διαδοχική τους συνένωση  $u_1 u_2$  είναι η συνάρτηση  $u \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau)}$  που ορίζεται ως:

$$u(t) := \begin{cases} u_1(t) & \text{αν } t \in [\sigma, \tau) \\ u_2(t) & \text{αν } t \in [\tau, \mu) \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι  $u \diamond = \diamond u = u$ .

Το σύστημα καταστάσεων χώρου ορίζεται ως εξής (στην συνέχεια ο ορισμός θα επεκταθεί για συστήματα με εξόδους):

**Ορισμός:** Ένα σύστημα καταστάσεων χώρου  $\Sigma(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi)$  αποτελείται από:

- Ένα σύνολο χρόνου  $\mathcal{T}$ .
- Ένα σύνολο  $\mathcal{X} \neq \emptyset$  που ονομάζεται χώρος καταστάσεων του  $\Sigma$ .
- Ένα σύνολο  $\mathcal{U} \neq \emptyset$  που ονομάζεται σύνολο τιμών ελέγχου (τιμών εισόδου) του  $\Sigma$ .
- Μία απεικόνιση  $\phi : \mathcal{D}_\phi \rightarrow \mathcal{X}$  που ονομάζεται συνάρτηση μετάβασης του  $\Sigma$ , με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο  $\mathcal{D}_\phi$  του  $\{(\tau, \sigma, x, u) : \sigma \leq \tau, x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau)}\}$

με τις παρακάτω ιδιότητες:

- (Μη-τετριμμένη ιδιότητα): Για κάθε κατάσταση  $x \in \mathcal{X}$ , υπάρχει ένα τουλάχιστον ζεύγος  $(\sigma, \tau)$  με  $\sigma < \tau$  στο  $\mathcal{T}$  και κάποιο  $u \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau)}$  τέτοια ώστε το  $u$  είναι επιτρεπτό για την κατάσταση  $x$ , δηλαδή  $(\tau, \sigma, x, u) \in \mathcal{D}_\phi$
- (Ιδιότητα περιορισμού): Αν  $u \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau)}$  είναι επιτρεπτό για την κατάσταση  $x$ , τότε για κάθε  $\tau \in [\sigma, \mu)$  ο περιορισμός  $u_1 := u|_{[\sigma, \tau)}$  του  $u$  στο διάστημα  $[\sigma, \tau)$  είναι επίσης επιτρεπτός για την κατάσταση  $x$  και ο περιορισμός  $u_2 := u|_{[\tau, \mu)}$  είναι επιτρεπτός για την κατάσταση  $\phi(\tau, \sigma, x, u_1)$ .
- (Ιδιότητα ημιομάδας - μεταβατική): Αν  $\sigma, \tau, \mu \in \mathcal{T}$  με  $\sigma < \tau < \mu$ , αν  $u \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau)}$  και  $u \in \mathcal{U}^{[\tau, \mu)}$  και αν το  $x$  είναι κατάσταση τέτοια ώστε

$$\phi(\tau, \sigma, x, u_1) = x_1 \quad \text{και} \quad \phi(\mu, \tau, \sigma, x_1, u_2) = x_2$$

τότε  $u = u_1 u_2$  είναι επιτρεπτό για την κατάσταση  $x$  και  $\phi(\mu, \sigma, x, u) = x_2$ .

- (Ιδιότητα ταυτότητας): Για κάθε  $\sigma \in \mathcal{T}$  και κάθε  $x \in \mathcal{X}$ , η κενή είσοδος  $\diamond \in \mathcal{U}^{[\sigma, \sigma]}$  είναι επιτρεπτή για την κατάσταση  $x$  και  $\phi(\sigma, \sigma, x, \diamond) = x$ .

Για συστήματα με έξοδο ο ορισμός του συστήματος γενικεύεται ως  $\Sigma(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi, \mathcal{Y}, h)$  όπου

- $\mathcal{Y}$  είναι το σύνολο των τιμών μετρήσεων (χώρος τιμών εξόδου) και
- $h : \mathcal{T} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$  είναι η συνάρτηση μετρήσεων η εξόδου.

**Παρατήρηση:** Ερμηνεύουμε την συνάρτηση μετάβασης  $\phi(\tau, \sigma, x, u)$  ως “η κατάσταση σε χρόνο  $\tau$  που προκύπτει αρχίζοντας σε χρόνο  $\sigma$  στην κατάσταση  $x$  και εφαρμόζοντας την συνάρτηση εισόδου  $u$ ”. Ο ορισμός περιλαμβάνει την περιγραφή μη επιτρεπτών μεταβάσεων μεταξύ καταστάσεων, π.χ. το φαινόμενο έκρηξης της λύσης μη-γραμμικών διαφορικών εξισώσεων σε πεπερασμένο χρόνο.

## References

1. H. Logemann and E.P. Ryan, Ordinary Differential Equations: Analysis, Qualitative Theory and Control, Springer-Verlag, London, 2014
2. E.D. Sontag, Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems, Springer-Verlag, New York, 1998
3. K. Zhou, J.C. Doyle and K. Glover, Robust and Optimal Control, Prentice Hall, New Jersey, 1996
4. C. Heij, A. Ran and F. van Schagen, Introduction to Mathematical Systems Theory, Linear Systems, Identification and Control, Birkhauser-Verlag, Basel, 2007
5. G. Meinsma and A. van der Schaft, A course on Optimal Control, Springer SUMAT, 2023
6. P.J. Antsaklis and A.N. Michel, Linear Systems, McGraw-Hill International Editions, 1998

Γ. Χαλικιάς, 28-2-2026