739 ## Γραμμικά Συστήματα (ΑΚ, κεφ. 6)

Θεωρούμε τό γραμμικό σύστημα

$$\underline{y}' = A(t)\,\underline{y}(t) + \underline{b}(t) \qquad (*)$$

όπου $t \in I = (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$, $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\underline{b}(t) \in \mathbb{R}^n$ καί $[A(t)]_{ij} = a_{ij}(t) \in C(I)$, $[\underline{b}]_i = b_i(t) \in C(I)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$. Αν $\underline{b}(t) = \underline{0}$ $\forall t \in I$ τό σύστημα είναι ομογενές, διαφορετικά μη-ομογενές. [Συμβολισμός: $\underline{a} \equiv \vec{a}$, $C(I)$: συνεχείς συναρτήσεις που ορίζονται στό διάστημα I]

Ορισμός: Λύση του (*) είναι $C^1(I)$ (συνεχώς διαφορίσιμη) διανυσματική συνάρτηση $\varphi(t): I \to \mathbb{R}^n$, τέτοια ώστε: $\varphi' = A(t)\varphi + \underline{b}(t)$. Το αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ) είναι η εύρεση λύσης $\varphi(t)$ που επιπλέον ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\varphi(t_0) = \underline{y}_0$, ($t_0 \in I$, $\underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$)

Θεώρημα: Έστω $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\underline{b}(t) \in \mathbb{R}^n$ συνεχείς στό $I = (\alpha, \beta)$. Τότε το ΠΑΤ: $\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{b}$, $y(t_0) = \underline{y}_0$ ($t_0 \in I$, $\underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$) έχει μοναδική λύση.

(Το θεώρημα είναι ειδική περίπτωση της γενίκευσης του Θεωρήματος Piccard-Lindelöf σε n διαστάσεις. Θά τό αποδείξουμε αργότερα σέ πιο γενική μορφή. Η ύπαρξη λύσης προκύπτει λόγω συνέχειας των $A(t)$, $\underline{b}(t)$. Θά αποδείξουμε μοναδικότητα - μετά τα προκαταρκτικά).

Προκαταρκτικά: Έστω $A(t) = [a_{ij}(t)] \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε

(1) Ο $A(t)$ λέγεται συνεχής σε διάστημα $I = (\alpha, \beta)$ αν

καί μόνο αν $a_{ij}(t) \in C(I)$, δηλ. κάθε στοιχείο είναι συνεχής συνάρτηση στό I.

(ii) Ο $A(t)$ είναι διαφορίσιμος (ολοκληρώσιμος) στό I αν κάθε στοιχείο του είναι διαφορίσιμο (ολοκληρώσιμο) στο I. Ορίζουμε

$$A'(t) = \left[a'_{ij}(t)\right] \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \int_\alpha^\beta A(t)\,dt = \left[\int_\alpha^\beta a_{ij}(t)\,dt\right].$$

Ισχύει (γιά $\underline{y}(t) \in \mathbb{R}^n$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ διαφορίσιμα στό I):

$$(1) \quad (A(t)\underline{y}(t))' = A'\underline{y} + A\underline{y}'$$
$$(2) \quad (AB)' = A'B + AB'$$

(π.χ γιά τό (1): $(A\underline{y})' = \left[\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j\right)'\right] =$

$$= \left[\sum_{j=1}^n a'_{ij}y_j + \sum_{j=1}^n a_{ij}y'_j\right] = A'\underline{y} + A\underline{y}').$$

Αν $\underline{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\|\underline{y}\| = \sqrt{\underline{y}^T\underline{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \quad \text{(ευκλείδια νόρμα)}$$

καί αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = [a_{ij}]$,

$$\|A\| = \sqrt{\text{trace}(A^TA)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

(ευκλείδια η Frobenius νόρμα του πίνακα A).

(Αργότερα αξιωματικός γενικός ορισμός νόρμας).

Πρόταση: Ισχύουν:

(α) $\|\underline{y}\| \geq 0 \quad \forall \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, $\|\underline{y}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{y} = \underline{0}$

(β) $\|\underline{y}_1 + \underline{y}_2\| \leq \|\underline{y}_1\| + \|\underline{y}_2\|$, $\underline{y}_1, \underline{y}_2 \in \mathbb{R}^n$ (τριγωνι ανισότητα).

(γ) $\|c\underline{y}\| = |c| \cdot \|\underline{y}\| \quad \forall c \in \mathbb{R}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

(δ) Αν $\underline{y}(t)$ συνεχής στο $I = (\alpha, \beta)$:

$$\left\| \int_\alpha^\beta \underline{y}(s)\, ds \right\| \leq \int_\alpha^\beta \|\underline{y}(s)\|\, ds.$$

(ε) Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$, τότε $\|A\underline{y}\| \leq \|A\| \cdot \|\underline{y}\|$.

Απόδειξη:

(α) Προφανής.

(β) Προκύπτει από την ανισότητα Hölder: ($|\underline{x}^T\underline{y}| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$). Έχουμε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \|\underline{x} - \lambda\underline{y}\|^2 = (\underline{x}^T - \lambda\underline{y}^T)(\underline{x} - \lambda\underline{y}) =$$

$$= \|\underline{x}\|^2 - 2\lambda\, \underline{x}^T\underline{y} + \lambda^2\|\underline{y}\|^2$$

Ο όρος δεξιά ελαχιστοποιείται όταν

$$\frac{d}{d\lambda}(\cdot) = 0 \Rightarrow -2\underline{x}^T\underline{y} + 2\lambda\|\underline{y}\|^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda := \lambda^* = \frac{\underline{x}^T\underline{y}}{\|\underline{y}\|^2}$$

Άρα:

$$0 \leq \|\underline{x}\|^2 - 2\frac{(\underline{x}^T\underline{y})^2}{\|\underline{y}\|^2} + \frac{(\underline{x}^T\underline{y})^2}{\|\underline{y}\|^2} = \|\underline{x}\|^2 - \frac{(\underline{x}^T\underline{y})^2}{\|\underline{y}\|^2}$$

$$\Rightarrow (\underline{x}^T\underline{y})^2 \leq \|\underline{x}\|^2 \cdot \|\underline{y}\|^2 \Rightarrow |\underline{x}^T\underline{y}| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$$

(Σημ 1: Υποθέσαμε $\underline{y} \neq \underline{0}$, αν $\underline{y} = \underline{0}$ η απόδειξη είναι προφανής. Σημ 2: Η ανισότητα ισχύει και γιά γενικά $\|\cdot\|_p$ νόρμες).

Επομένως (τριγωνική ανισότητα):

$$\|\underline{x}+\underline{y}\|^2 = (\underline{x}^T+\underline{y}^T)(\underline{x}+\underline{y}) = \|\underline{x}\|^2 + 2\underline{x}^T\underline{y} + \|\underline{y}\|^2$$

$$\leq \|\underline{x}\|^2 + 2|\underline{x}^T\underline{y}| + \|\underline{y}\|^2 \leq \|\underline{x}\|^2 + 2\|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\| + \|\underline{y}\|^2$$

$$= (\|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|)^2 \Rightarrow \|\underline{x}+\underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|.$$

(γ) Προφανής

(δ) Έστω $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \int_\alpha^\beta \underline{y}(s)\,ds = \int_\alpha^\beta \begin{pmatrix} y_1(s) \\ \vdots \\ y_n(s) \end{pmatrix} ds$

δηλ. $v_j = \int_\alpha^\beta y_j(s)\,ds$. Τότε

$$\|\underline{v}\|^2 = \sum_{j=1}^n v_j^2 = \sum_{j=1}^n v_j \int_\alpha^\beta y_j(s)\,ds =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sum_{j=1}^n v_j y_j(s)\,ds = \int_\alpha^\beta \underline{v}^T\underline{y}\,ds.$$

$$\leq \int_\alpha^\beta \|\underline{v}\|\cdot\|\underline{y}(s)\|\,ds = \|\underline{v}\| \int_\alpha^\beta \|\underline{y}(s)\|\,ds$$

$$\Rightarrow \|\underline{v}\| = \left\|\int_\alpha^\beta \underline{y}(s)\,ds\right\| \leq \int_\alpha^\beta \|\underline{y}(s)\|\,ds.$$

(ε) $\|A\underline{y}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (A_{ij} y_j)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\underline{a}_i^T \underline{y})^2$

(όπου $\underline{a}_i^T$ η i-γραμμη του πίνακα A). Άρα,

$$\|A\underline{y}\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \|\underline{a}_i^T\|^2 \cdot \|\underline{y}\|^2 = \|\underline{y}\|^2 \sum_{i=1}^{n} \|\underline{a}_i\|^2$$

$$= \|\underline{y}\|^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \|\underline{y}\|^2 \|A\|^2$$

$$\Rightarrow \|A\underline{y}\| \leq \|A\| \cdot \|\underline{y}\|$$

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $A(t)$, $\underline{b}(t)$ συνεχείς (πινακο)συναρτήσεις στο $I=(\alpha,\beta)$, με $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$. Τότε το ΠΑΤ : $\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{b}$, $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$ ($t_0 \in I$, $\underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$) έχει μοναδική λύση.

<u>Απόδειξη:</u> Θα αποδείξουμε μόνο την μοναδικότητα της λύσης. Έστω $\underline{\varphi}_1(t)$, $\underline{\varphi}_2(t)$ δύο λύσεις, δηλαδή ισοδύναμα:

$$\underline{\varphi}_1(t) = \underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \left(A(s)\underline{\varphi}_1(s) + \underline{b}(s)\right) ds$$

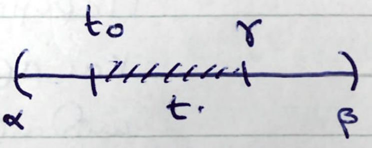
$$\underline{\varphi}_2(t) = \underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \left(A(s)\underline{\varphi}_2(s) + \underline{b}(s)\right) ds$$

Αφαιρώντας κατά μέλη:

$$\underline{\varphi}_1(t) - \underline{\varphi}_2(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\left(\underline{\varphi}_1(s) - \underline{\varphi}_2(s)\right) ds$$

$$\Rightarrow \|\underline{\varphi}_1(t) - \underline{\varphi}_2(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)\left(\underline{\varphi}_1(s) - \underline{\varphi}_2(s)\right) ds \right\|.$$

Έστω $\gamma \in I$, $t_0 \leq \gamma < \beta$, $t \in [t_0, \gamma]$



Η συνάρτηση $\|A(s)\|$ είναι συνεχής στό συμπαγή διάστημα $[t_0, \gamma]$ καί επομένως

$$M := \max_{s\in[t_0,\gamma]} \|A(s)\|$$

Είναι καλά ορισμένο. Αρα (με τον παραπάνω περιορισμό της μεταβλητής t)

$$\underbrace{\|\underline{\varphi}_1(t)-\underline{\varphi}_2(t)\|}_{:=u'(t)} \leq \int_{t_0}^{t} \|A(s)(\underline{\varphi}_1(s)-\underline{\varphi}_2(s))\| \, ds$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| \cdot \|\underline{\varphi}_1(s)-\underline{\varphi}_2(s)\| \, ds$$

$$\leq M \underbrace{\int_{t_0}^{t} \|\underline{\varphi}_1(s)-\underline{\varphi}_2(s)\| \, ds}_{:=u(t)}.$$

Εστω $u(t)=\int_{t_0}^{t} \|\underline{\varphi}_1(s)-\underline{\varphi}_2(s)\| ds \Rightarrow u'(t) = \|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\|$ καί

$$u'(t) \leq M\, u(t) \quad , \quad t\in[t_0,\gamma].$$

$$\Rightarrow e^{-Mt}u'(t) - Me^{-Mt}u(t) \leq 0 \quad , \quad t\in[t_0,\gamma]$$

$$\Rightarrow (e^{-Mt}u(t))' \leq 0 \quad , \quad t\in[t_0,\gamma].$$

Αρα: $e^{-Mt}u(t)$ φθίνουσα συνάρτηση στό διάστημα $[t_0,\gamma]$ καί αρα $e^{-Mt}u(t) \leq e^{-Mt_0}\underbrace{u(t_0)}_{0} = 0 \quad \forall t\in[t_0,\gamma]$
$\Rightarrow u(t) \leq 0 \quad \forall t\in[t_0,\gamma]$.
Ομως εξ' ορισμού $u(t)\geq 0$. Καί αρα $u(t)=0 \quad \forall t\in[t_0,\gamma]$
$\Rightarrow \|\varphi_1(s)-\varphi_2(s)\| = 0 \quad \forall s\in[t_0,\gamma] \Rightarrow \underline{\varphi}_1(t)=\underline{\varphi}_2(t) \quad \forall t\in[t_0,\gamma]$
Παρόμοια γιά ~~στο~~ διάστημα $[\delta, t_0]$, $\alpha<\delta\leq t_0$.
Καί αρα $\underline{\varphi}_1(t)=\underline{\varphi}_2(t) \quad \forall t\in[\delta,\gamma]$. Εφόσον δ καί γ αυθαίρετα έχουμε οτι $\underline{\varphi}_1(t)=\underline{\varphi}_2(t) \quad \forall t\in(\alpha,\beta)$. □

Έστω $\mathcal{L}_0$ τό σύνολο λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος: $\underline{y}'(t) = A(t)\,\underline{y}(t)$. Τότε ισχύει τό παρακάτω Θεώρημα.

<u>Θεώρημα</u>: Το σύνολο λύσεων $\mathcal{L}_0$ είναι διανυσματικός χώρος (επί του $\mathbb{R}$) διάστασης n.

<u>Απόδειξη</u>: Λόγω γραμμικότητας αν $\underline{\varphi}_1(t)$ και $\underline{\varphi}_2(t)$ είναι λύσεις, τότε $c_1\underline{\varphi}_1(t) + c_2\underline{\varphi}_2(t)$ είναι επίσης λύση για κάθε $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Άρα $\mathcal{L}_0$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$. Η ιδιότητα $\dim(\mathcal{L}_0) = n$ προκύπτει από την μοναδικότητα λύσης του αντίστοιχου ΠΑΤ. (δείτε [ΑΚ]).

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\mathcal{B} = \{\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2, \dots \underline{\varphi}_n\}$ βάση του $\mathcal{L}_0$. Λέμε ότι $\mathcal{B}$ είναι ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων και ότι $\Phi(t) = [\underline{\varphi}_1(t) \cdots \underline{\varphi}_n(t)] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι ένας θεμελιώδης πίνακας λύσεων. Έχουμε:

$$\Phi'(t) = [\underline{\varphi}_1'(t)\ \underline{\varphi}_2'(t) \cdots \underline{\varphi}_n'(t)] = [A\underline{\varphi}_1(t) \cdots A\underline{\varphi}_n(t)]$$

$$= A[\underline{\varphi}_1(t) \cdots \varphi_n(t)] = A\,\Phi(t)$$

Αντίστροφα, αν $\Phi'(t) = A\Phi(t)$ οι στήλες του $\Phi(t)$ είναι λύσεις του συστήματος $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$.

Παρατηρούμε ότι αν $\Phi(t)$ είναι θ.π.λ., τότε

$$\mathcal{L}_0 = \{\Phi(t)\underline{c} : \underline{c} \in \mathbb{R}^n\}.$$

~~Ποιά είναι η λύση $\underline{\varphi}(t) \in \mathcal{L}_0$ που επιπλέον ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\underline{\varphi}(t_0) = \underline{y}_0$ (δηλ. λύνει τό ΠΑΤ: $\underline{y}' = A\underline{y}$, $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$);~~

~~Πρέπει να ισχύει: $\Phi(t)$;~~

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\{\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2, \dots \underline{\varphi}_n\}$ λύσεις του συστήματος $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$. Τότε η ορίζουσα

$$W[\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2 \dots \underline{\varphi}_n](t) = \det[\underline{\varphi}_1(t) \dots \underline{\varphi}_n(t)]$$

ονομάζεται ορίζουσα Wronski των $\{\underline{\varphi}_1, \dots \underline{\varphi}_n\}$.

<u>Θεώρημα</u>: Οι λύσεις $\{\underline{\varphi}_1, \dots \underline{\varphi}_n\}$ αποτελούν θ.σ.λ. (και ο αντίστοιχος πίνακας $\Phi = [\underline{\varphi}_1 \dots \underline{\varphi}_n]$ θ.π.λ) αν και μόνο αν $W[\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2 \dots \underline{\varphi}_n](t) \neq 0$ γιά κάθε $t \in I$.

<u>Θεώρημα</u> (Liouville): Έστω $\{\underline{\varphi}_1(t), \dots, \underline{\varphi}_n(t)\}$ λύσεις της $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$ και $t_0 \in I$. Τότε, γιά κάθε $t \in I$,

$$W[\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2, \dots \underline{\varphi}_n](t) = W[\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2 \dots \underline{\varphi}_n](t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{trace}(A(s))\right.$$

<u>Απόδειξη</u>: (γιά $n=2$, η γενική περίπτωση παρόμοια)

Έστω $\underline{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, $\underline{\varphi}_2(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$

Τότε:

$$W[\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2] = \det \begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{bmatrix}$$

Και

$$W'[\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2] = \det \begin{bmatrix} x_1' & z_1' \\ x_2 & z_2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2' & z_2' \end{bmatrix}$$

Όμως $\underline{\varphi}_1' = A(t)\underline{\varphi}_1$ και $\underline{\varphi}_2' = A(t)\underline{\varphi}_2$. Αν $A = [a_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2}$

Άρα,

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 & \quad z_1' = a_{11} z_1 + a_{12} z_2 \\ x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 & \quad z_2' = a_{21} z_1 + a_{22} z_2 \end{matrix}\right\}.$$

Η πρώτη ορίζουσα:

$$\det \begin{bmatrix} x_1' & z_1' \\ x_2 & z_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{11}z_1 + a_{12}z_2 \\ x_2 & z_2 \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & a_{11}z_1 \\ x_2 & z_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\det \begin{bmatrix} a_{12}x_2 & a_{12}z_2 \\ x_2 & z_2 \end{bmatrix}}_{0}$$

$$= a_{11} \det \begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{bmatrix} = a_{11}(t)\, W[\underline{\varphi_1}, \underline{\varphi_2}](t)$$

Παρόμοια:

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2' & z_2' \end{bmatrix} = a_{22}(t)\, W[\varphi_1, \varphi_2](t)$$

Συνεπώς:

$$W'(t) = (a_{11}(t) + a_{22}(t))\, W(t) = (\text{trace } A(t))\, W(t).$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{dW}{W} = \int_{t_0}^{t} \text{trace}\,[A(s)]\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W(t) = W(t_0) \cdot \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} \text{trace}\,[A(s)]\, ds \right\}$$

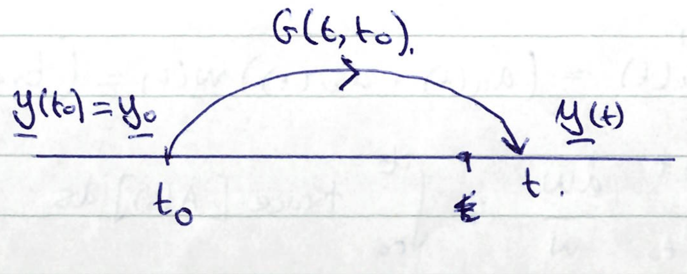
<u>Θεώρημα</u>: Οι λύσεις $\{\underline{\varphi}_1(t), \dots, \underline{\varphi}_n(t)\}$ αποτελούν θ.σ.λ. του $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$ αν και μόνο αν $W[\underline{\varphi}_1, \dots \underline{\varphi}_n](t_0) \neq 0$ γιά κάποιο $t_0 \in I$.

<u>Απόδειξη</u>: Εφόσον $\exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{trace}(A(s))\,ds\right) > 0$ η ορίζουσα Wronski $W(t)$ είναι ομόσημη γιά κάθε $t \in I$. Αρα $\{\underline{\varphi}_1, \dots \underline{\varphi}_n\}$ είναι θ.σ.λ αν και μόνο αν $W[\underline{\varphi}_1, \dots \underline{\varphi}_n](t_0) \neq 0$ γιά κάποιο $t_0 \in I$.

<u>Θεώρημα</u>: Εστω $\underline{\Phi}(t) = [\underline{\varphi}_1(t), \dots, \underline{\varphi}_n(t)]$ θ.π.λ. του συστήματος $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$. Τότε η λύση του αντίστοιχου ΠΑΤ: $\underline{y}' = A\underline{y}$, $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$ ($t_0 \in I$, $\underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$) είναι $\underline{\varphi}(t) = \underline{\Phi}(t)\underline{\Phi}^{-1}(t_0)\underline{y}_0$.

<u>Απόδειξη</u>: Κάθε λύση $\underline{\varphi}(t) \in \mathcal{L}_0$ της $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$ είναι της μορφής $\underline{\varphi}(t) = \underline{\Phi}(t)\underline{c}$ γιά κάποιο $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$. Η λύση ικανοποιεί τήν αρχική συνθήκη $\underline{\varphi}(t_0) = \underline{y}_0$, αρα $\underline{\varphi}(t_0) = \underline{y}_0 = \underline{\Phi}(t_0)\underline{c} \Rightarrow \underline{c} = \underline{\Phi}^{-1}(t_0)\underline{y}_0$ και επομένως η λύση του ΠΑΤ είναι $\underline{\varphi}(t) = \underline{\Phi}(t)\underline{\Phi}^{-1}(t_0)\underline{y}_0$

<u>Ορισμός</u>: Ο πίνακας $G(t, t_0) := \underline{\Phi}(t)\underline{\Phi}^{-1}(t_0)$ ονομάζεται πίνακας μεταφοράς κατάστασης γιά τό σύστημα $\underline{y}'(t) = A(t)\underline{y}(t)$.



$$\underline{y}(t) = G(t, t_0)\underline{y}(t_0).$$

Θεώρημα: Αν $\Phi(t)$ είναι θ.π.λ. της $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$ καί $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(C) \neq 0$, τότε $\Phi(t)C$ είναι επίσης θ.π.λ. Επιπλέον, αν $\Phi_1(t)$ είναι επίσης θ.π.λ. γιά τήν ίδια εξίσωση, τότε υπάρχει $C_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(C_1) \neq 0$: $\Phi_1(t) = \Phi(t) C_1$.

Απόδειξη: Θά δείξουμε πρώτα ότι $\Phi(t)C$ είναι θ.π.λ.
Έχουμε:

(α) $\left(\Phi(t)C\right)' = \Phi'(t)C = A(t)\Phi(t)C = A(t)\left(\Phi(t)C\right)$
καί άρα $\Phi(t)C$ είναι πίνακας λύσεων.

(β) $\det[\Phi(t)C] = \det[\Phi(t)] \cdot \det(C) \neq 0$ (αφού $\det(C) \neq 0$ καί $\Phi(t)$ θ.π.λ.). Άρα $\Phi(t)C$ είναι επίσης θ.π.λ.

Έστω ότι $\Phi_1(t)$ είναι επίσης θ.π.λ. Ορίζουμε: $Y(t) = \Phi^{-1}\Phi_1$
Ο πίνακας $\Phi^{-1}(t)$ είναι καλά ορισμένος γιά κάθε $t \in I$.
Επομένως:

$$\Phi(t)\, Y(t) = \Phi_1(t) \Rightarrow \Phi' Y + \Phi Y' = \Phi_1'$$

$$\Rightarrow \cancel{A(t)\,\Phi(t)\,Y(t)} + \Phi(t)\,Y'(t) = A(t)\,\Phi_1(t) = \cancel{A(t)\,\Phi(t)\,Y(t)}$$

$$\Rightarrow \Phi(t)\,Y'(t) = 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow Y'(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

$$\Rightarrow Y(t) = C_1 \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ (σταθερός πίνακας)}.$$

Επίσης: $\det(C) = \det[\Phi^{-1}(t)] \cdot \det[\Phi(t)] \neq 0$.

Πρόταση: Έστω $G(t, t_0)$ πίνακας μεταφοράς συστήματος $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$. Τότε:

(α) Ο $G(t, t_0)$ είναι ανεξάρτητος από τόν θ.π.λ $\Phi(t)$ ο οποίος τον ορίζει.

(β) $\forall t, t_0 \in I$: $\dfrac{\partial}{\partial t} G(t, t_0) = A(t)\, G(t, t_0)$.

(γ) $G(t,t) = I_n \quad \forall t \in I$

(δ) $G^{-1}(t,t_0) = G(t_0,t) \quad \forall t, t_0 \in I.$

(ε) $G(t_2,t_0) = G(t_2,t_1)\, G(t_1,t_0) \quad \forall t_0, t_1, t_2 \in I$

Απόδειξη.

(α) Ο $G(t,t_0)$ ορίστηκε ως $G(t,t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$, όπου $\Phi(t)$ ένας θ.π.λ. Αν $\Phi_1(t)$ είναι άλλος θ.π.λ. τότε $\Phi_1(t) = \Phi(t)C$ γιά κάποιον $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(C) \neq 0$. Επομένως

$$G_1(t,t_0) = \Phi_1(t)\Phi_1^{-1}(t_0) = [\Phi(t)C][\Phi(t_0)C]^{-1}$$

$$= \Phi(t)CC^{-1}\Phi^{-1}(t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) =$$

$$= G(t,t_0)$$

(β). $\frac{\partial}{\partial t}[G(t,t_0)] = \frac{\partial}{\partial t}[\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)] = \Phi'(t)\Phi^{-1}(t_0)$

$= A(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) = A(t)\,G(t,t_0) \quad \forall t, t_0 \in I.$

(γ) $G(t,t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t) = I_n \quad \forall t \in I.$

(δ) $G^{-1}(t,t_0) = [\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)]^{-1} = \Phi(t_0)\Phi^{-1}(t)$

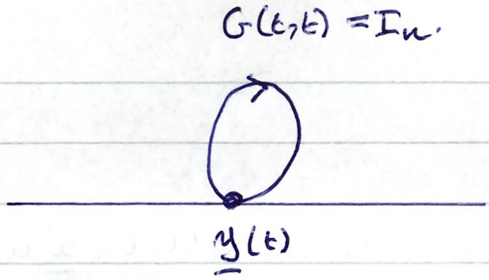
$= G(t_0,t). \quad \forall t, t_0 \in I.$

(ε). Γιά κάθε $t_0, t_1, t_2 \in I$:

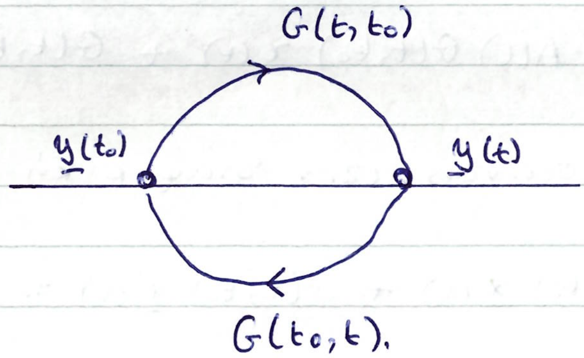
$$G(t_2,t_0) = \Phi(t_2)\Phi^{-1}(t_0) = \Phi(t_2)\Phi^{-1}(t_1)\Phi(t_1)\Phi^{-1}(t_0)$$

$$= G(t_2,t_1)\cdot G(t_1,t_0) \qquad \square$$

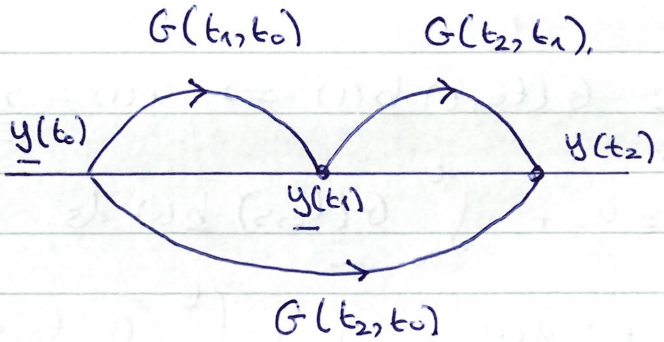
(γ)



(δ)



(ε).



Ο τύπος μεταβολής παραμέτρων.

Τό αντίστοιχο Π.Α.Τ της μή ομογενούς εξίσωσης είναι:

$$\underline{y}'(t) = A(t)\,\underline{y}(t) + \underline{b}(t) \quad , t\in I,\ \underline{y}(t_0)=\underline{y}_0$$

Αν $\underline{b}(t)=0\ \forall t\in I$ η λύση είναι $\underline{y}(t)=G(t,t_0)\,\underline{y}_0$.
Στήν μή ομογενή περίπτωση εξετάζουμε λύσεις της μορφής:

$$\underline{y}(t) = G(t,t_0)\,\underline{x}(t)$$

Γιά $t=t_0$ έχουμε: $\underline{y}(t_0) = \underbrace{G(t_0,t_0)}_{I_n}\,\underline{x}(t_0) \Rightarrow \underline{\underline{x}(t_0)=\underline{y}_0}$

Επίσης:

$$\underline{y}'(t) = G'(t,t_0)\,\underline{x}(t) + G(t,t_0)\,\underline{x}'(t)$$

$$= A(t)\,G(t,t_0)\,\underline{x}(t) + G(t,t_0)\,\underline{x}'(t).$$

Αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση:

$$A(t)\,\cancel{G(t,t_0)}\,\underline{x}(t) + G(t,t_0)\,\underline{x}'(t) = A(t)\,\cancel{G(t,t_0)}\,\underline{x}(t) + \underline{b}(t)$$

$$\Rightarrow G(t,t_0)\,\underline{x}'(t) = \underline{b}(t) \Rightarrow \underline{x}'(t) = G^{-1}(t,t_0)\,\underline{b}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{x}'(t) = G(t_0,t)\,\underline{b}(t) \Rightarrow \underline{x}(t) = \underbrace{\underline{x}(t_0)}_{\underline{y}_0} + \int_{t_0}^{t} G(t_0,s)\,\underline{b}(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = \underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} G(t_0,s)\,\underline{b}(s)\,ds$$

$$\Rightarrow G^{-1}(t,t_0)\,\underline{y}(t) = \underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} G(t_0,s)\,\underline{b}(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \underline{y}(t) = G(t,t_0)\,\underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{G(t,t_0)\,G(t_0,s)}_{G(t,s)}\,\underline{b}(s)\,ds.$$

$$\Rightarrow \underline{y}(t) = G(t,t_0)\,\underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} G(t,s)\,\underline{b}(s)\,ds.$$

που είναι η (μοναδική) λύση του μη ομογενούς ΠΑΤ. □

Παρατηρούμε ότι $\underline{y}(t) = \underline{y}_h(t) + \underline{y}_p(t)$ όπου

$$\underline{y}_h(t) = G(t,t_0)\,\underline{y}_0 \quad , \quad \underline{y}_p(t) = \int_{t_0}^{t} G(t,s)\,\underline{b}(s)\,ds$$

Η $\underline{y}_h(t)$ είναι η λύση του ΠΑΤ που αντιστοιχεί στο ομογενές σύστημα με αρχική συνθήκη $\underline{y}_0$ και η $\underline{y}_p(t)$ είναι μία ειδική (αυθαίρετη) λύση

του μή ομογενούς συστήματος (particular integral).
Πράγματι (εφαρμόζοντας τον κανόνα του Leibnitz):

$$\underline{y}_p'(t) = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} G(t,s)\,\underline{b}(s)\,ds =$$

$$= \underbrace{G(t,t)}_{I_n}\,\underline{b}(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t}\left(G(t,s)\,\underline{b}(s)\right) ds$$

$$= \underline{b}(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\,\underline{b}(s)\,ds$$

$$= \underline{b}(t) + \int_{t_0}^{t} A(t)\,G(t,s)\,\underline{b}(s)\,ds.$$

$$= \underline{b}(t) + A(t)\int_{t_0}^{t} G(t,s)\,\underline{b}(s)\,ds$$

$$= A(t)\,\underline{y}_p(t) + \underline{b}(t)$$

και άρα $\underline{y}_p(t)$ είναι ειδική λύση του (μή-ομογενούς) συστήματος.

Η εκθετική συνάρτηση e^{At}

Εξειδικεύουμε την λύση του ομογενούς συστήματος στην περίπτωση που ο A είναι σταθερός πίνακας, δηλ:

$$\underline{y}'(t) = A\,\underline{y}(t) + \underline{b}(t)\,, \quad t\in I,\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$$

Στην βαθμωτή περίπτωση ($A = a \in \mathbb{R}$) η λύση του αντίστοιχου Π.Α.Τ. ($y' = ay + b(t)$, $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$) είναι:

$$y(t) = e^{a(t-t_0)}y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-s)}\,b(s)\,ds.$$

Στην περίπτωση $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ η λύση γενικεύεται ως εξής:

$$\underline{y}(t) = e^{A(t-t_0)} \underline{y_0} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} \underline{b}(s)\, ds$$

οπου ο εκθετικός πίνακας e^{At} ορίζεται στην συνέχεια:

<u>Ορισμός:</u> Έστω $\Phi(t)$ θεμελιώδης πίνακας λύσεων της εξίσωσης $\underline{y}' = A\underline{y}$ (οπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ σταθερός) Ορίζουμε τον πίνακα:

$$e^{At} := \Phi(t)\, \Phi^{-1}(0) := G(t,0)$$

οπου $G(t,0)$ ο αντίστοιχος πίνακας μεταφοράς. Από τις γνωστές ιδιότητες θ.π.λ (και πινάκων μεταφοράς) γνωρίζουμε οτι:

- Ο e^{At} είναι ανεξάρτητος από τον $\Phi(t)$ ο οποίος τον ορίζει.
- Ο e^{At} ικανοποιεί τις εξισώσεις: (i) $(e^{At})' = A e^{At}$ και (ii) $e^{A0} = I_n$.

<u>Λήμμα:</u> Ο πίνακας e^{At} έχει τις εξής (επιπλέον) ιδιότητες:

(α) $e^{A(t+s)} = e^{At} \cdot e^{As}$

(β) $(e^{At})^{-1} = e^{A(-t)}$

(γ) $(e^{At})' = A e^{At} = e^{At} A$

(δ) $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n$. Κάθε στοιχείο της σειράς συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $(-a,a) \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

(α) Θέτουμε $X(t) = e^{A(t+s)}$, $Y(t) = e^{At} e^{As}$ με το s σταθεροποιημένο. Ισχύει:

$$\frac{d}{dt} X(t) = \frac{d}{d(t+s)} e^{A(t+s)} = A e^{A(t+s)} = A X(t)$$

$$X(0) = e^{As}$$

Επίσης: $$\frac{d}{dt} Y(t) = (e^{At})' e^{As} = A e^{At} e^{As} = A Y(t)$$

$$Y(0) = e^{As}$$

Από το μονοσήμαντο λύσης ΠΑΤ ισχύει ότι $X(t) = Y(t)$

(β) Επιλέγουμε $s = -t$ στο (α), οπότε:

$$I_n = e^{At} \cdot e^{A(-t)} \Rightarrow (e^{At})^{-1} = e^{A(-t)}$$

(γ) Η πρώτη ισότητα ισχύει από τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης ως ειδικής περίπτωσης δ.π.λ. γιά A σταθερό πίνακα. Η δεύτερη προκύπτει από τον υπολογισμό:

$$\frac{d}{dt}(A e^{At}) = A \frac{d}{dt}(e^{At}) = A(A e^{At}).$$

$$\frac{d}{dt}(e^{At} A) = \frac{d}{dt}(e^{At}) A = (A e^{At}) A = A(e^{At} A)$$

Επίσης $A e^{At}\big|_{t=0} = e^{At} A\big|_{t=0} = A$. Κατά συνέπεια οι πίνακες $A e^{At}$ και $e^{At} A$ είναι λύσεις του ΠΑΤ: $B'(t) = A B(t)$, $B(0) = A$ και επομένως ταυτίζονται λόγω μονοσήμαντου.

(δ) [AK, κεφ 6].

Υπολογισμός εκθετικής συνάρτησης

Προκαταρκτικά: Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα πίνακα

Ορισμός: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τό ζεύγος $(\lambda, \underline{u})$ οπου $\lambda \in \mathbb{C}$ $\underline{u} \in \mathbb{C}^n$, $\underline{u} \neq \underline{0}$, είναι ζεύγος ιδιοτιμής - ιδιοδιανύσματος του πίνακα A αν καί μόνο αν $A\underline{u} = \lambda \underline{u}$ (ισοδύναμα $(\lambda I - A)\underline{u} = 0$).

Τό σύστημα $(\lambda I - A)\underline{u} = \underline{0}$ εχει μή μηδενική λύση ως προς $\underline{u}$ αν καί μόνο αν $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

Ορισμός: Το πολυώνυμο $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ λέγεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. Η εξίσωση $\varphi(\lambda) = 0$ λέγεται χαρακτηριστική εξίσωση του A. Τό σύνολο ιδιοτιμών $\sigma(A) = \{\lambda_i \in \mathbb{C} : \varphi(\lambda_i) = 0\}$ είναι τό φάσμα του A.

Ορισμός: Αν $\lambda_i \in \sigma(A)$, τότε ο χώρος $\mathcal{N}(\lambda_i) = \{\underline{u} \in \mathbb{C}^n : (\lambda_i I - A)\underline{u} = 0\}$ ορίζεται ως ο ιδιοχωρος του A πού αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i. Ο μέγιστος αριθμός d_i των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων πού αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i (ισοδύναμα $d_i = \dim \mathcal{N}(\lambda_i)$) ονομάζεται γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i.

Ορισμός: Η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i ως ρίζας του $\varphi(\lambda)$ ονομάζεται αλγεβρική πολλαπλότητα της λ_i. Έστω:

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (\lambda - \lambda_1)^{\tau_1} (\lambda - \lambda_2)^{\tau_2} \cdots (\lambda - \lambda_\rho)^{\tau_\rho}$$

οπου $\lambda_i \neq \lambda_j$ για $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, \rho)$. Ο ακέραιος τ_i είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i καί $d_i = \dim \mathcal{N}(\lambda_i) (:= n - r_i)$ η γεωμετρική πολλαπλότητα της λ_i

Ισχύει: $1 \leq d_i \leq \tau_i \quad \forall i=1,2,\ldots,e$

Αν $d_i = \tau_i \ \forall i=1,2,\ldots,e$ ο πίνακας A είναι "απλής δομής". Διαφορετικά ($d_i < \tau_i$ γιά ενα τουλάχιστον i) ο A είναι "μη απλής δομής". Αν $d_i < \tau_i$ η βάση του ιδιόχωρου που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i, $\mathcal{N}(\lambda_i)$, συμπληρώνεται μέ $\tau_i - d_i$ "γενικευμένα ιδιοδιανύσματα".

Εκθετική συνάρτηση γιά πίνακες απλής δομής.

Αν ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι απλής δομής μέ ιδιοτιμές $\{\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n\}$ (όχι απαραίτητα διακεκριμένες) τότε μπορούμε να ορίσουμε n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2 \ldots, \underline{u}_n\}$ Επομένως:

$$AP = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) \quad , \quad P = [\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots \underline{u}_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

με $\det(P) \neq 0$. Άρα $AP = P\Lambda$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$. Ισοδύναμα. $P^{-1}AP = \Lambda$, δηλαδή ο A διαγωνιοποιείται με μετασχηματισμό ομοιότητας.

Εστω ομογενές σύστημα $\underline{y}' = A\underline{y}$ οπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ απλής δομης. Ορίζουμε μετασχηματισμό $\underline{y}(t) = P\underline{x}(t) \Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{x}(t) = P^{-1}\underline{y}(t)$. Τότε

$$\underline{x}'(t) = P^{-1}\underline{y}'(t) = P^{-1}A\,\underline{y}(t) = P^{-1}AP\,\underline{x}(t) = \Lambda\,\underline{x}(t)$$

$$\Rightarrow x_i' = \lambda_i x_i \quad (i=1,2,\ldots,n) \Rightarrow x_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}$$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = [c_1 e^{\lambda_1 t} \ldots c_n e^{\lambda_n t}]^T = e^{\Lambda t}\underline{c} \ , \ \underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Επομένως:

$$\underline{y}(t) = [\underline{u}_1\ \underline{u}_2 \cdots \underline{u}_n] \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} \underline{u}_i$$

Παρατηρούμε ότι αν ο A είναι απλής δομής, τότε

$$A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow A^2 = P\Lambda P^{-1} \cdot P\Lambda P^{-1} = P\Lambda^2 P^{-1}$$

και γενικά: $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$ $(k \in \mathbb{N})$. Επομένως:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Lambda^k t^k\right) P^{-1}$$

$$= P \operatorname{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\} P^{-1}$$

$$= P e^{\Lambda t} P^{-1}$$

Επομένως η λύση του ΠΑΤ: $\underline{y}' = A\underline{y}$, $\underline{y}(0) = \underline{y}_0$ είναι:

$$\underline{y}(t) = e^{At}\underline{y}_0 = P e^{\Lambda t} P^{-1} \underline{y}_0$$

και η γενική λύση του συστήματος $\underline{y}' = A\underline{y}$:

$$\underline{y}(t) = P e^{\Lambda t} \underbrace{P^{-1} \underline{y}_0}_{\underline{c}} = P e^{\Lambda t} \underline{c}, \quad \underline{c} \in \mathbb{R}^n$$

(αν $\underline{y}_0$ αυθαίρετο, τότε $\underline{c} = P^{-1}\underline{y}_0$ επίσης αυθαίρετο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$).

Η ~~γενική~~ λύση του ΠΑΤ που αντιστοιχεί στο μή-ομογενές σύστημα $\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{b}(t)$, $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$, είναι:

$$\underline{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\underline{b}(s)\,ds.$$

Μιγαδικές ρίζες

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει πραγματικούς συντελεστές και οι μιγαδικές ρίζες (αν υπάρχουν) είναι συζυγείς. (με την ίδια αλγεβρική πολλαπλότητα). Έστω ζεύγος ιδιοτιμής-ιδιοδιανύσματος $(\lambda, \underline{u})$ όπου $\lambda = \sigma + i\omega$ $(\sigma, \omega \in \mathbb{R}, \omega \neq 0)$ και $\underline{u} = \underline{x} + i\underline{y}$ $(\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n)$. Τότε:

$$A\underline{u} = \lambda\underline{u} \Rightarrow \overline{A\underline{u}} = \overline{\lambda\underline{u}} \Longrightarrow A\overline{\underline{u}} = \bar{\lambda}\overline{\underline{u}}$$, δηλ. $(\bar{\lambda}, \overline{\underline{u}})$ είναι

επίσης ζεύγος ιδιοδιανύσματος - ιδιοτιμής. Επίσης:

$$A\underline{u} = \lambda\underline{u} \Rightarrow A(\underline{x} + i\underline{z}) = (\sigma + i\omega)(\underline{x} + i\underline{z})$$

$$\Rightarrow A\underline{x} = \sigma\underline{x} - \omega\underline{z} \quad \text{και} \quad A\underline{z} = \omega\underline{x} + \sigma\underline{z}$$

$$\Rightarrow A[\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] = [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]\left[\begin{array}{c|c} \sigma & \omega \\ \hline -\omega & \sigma \end{array}\right].$$

Παρατήρηση: Τα διανύσματα $\underline{x}$ και $\underline{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στον $\mathbb{R}^n$ (επί του $\mathbb{R}$): Γιατί αν υπήρχαν $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 c_2 \neq 0$ τέτοια ώστε $c_1\underline{x} + c_2\underline{z} = \underline{0}$, τότε $\underline{z} = -\frac{c_1}{c_2}\underline{x}$ (γιατί αν $c_2 = 0$, τότε $c_1 = 0$, άτοπο). Επομένως:

$$A\left(1 - i\frac{c_1}{c_2}\right)\underline{x} = (\sigma + i\omega)\left(1 - i\frac{c_1}{c_2}\right)\underline{x} \Rightarrow A\underline{x} = (\sigma + i\omega)\underline{x}$$

πού είναι άτοπο γιατί $A\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ και $(\sigma + i\omega)\underline{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$.

~~Επίσης~~:

Στην περίπτωση όπου $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με ιδιοτιμές $\sigma \pm i\omega$ και ~~$A\underline{u} = \lambda$~~ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\underline{x} \pm i\underline{y}$ έχουμε:

$$A[\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] = [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}, \quad P = [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$\det(P) \neq 0 \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}.$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τον εκθετικό πίνακα e^{At} στην περίπτωση αυτή. Εφόσον οι ιδιοτιμές $\sigma \pm i\omega$ είναι διακεκριμένες ο $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ είναι απλής δομής και άρα

$$A[\underline{u} \,\vdots\, \underline{\bar{u}}] = [\underline{u} \,\vdots\, \underline{\bar{u}}]\begin{bmatrix} \sigma + i\omega & 0 \\ 0 & \sigma - i\omega \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow A = [\underline{u} \,\vdots\, \underline{\bar{u}}]\begin{bmatrix} \sigma + i\omega & 0 \\ 0 & \sigma - i\omega \end{bmatrix}[\underline{u} \,\vdots\, \underline{\bar{u}}]^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{At} = [\underline{u} \,\vdots\, \underline{\bar{u}}]\begin{bmatrix} e^{(\sigma + i\omega)t} & 0 \\ 0 & e^{(\sigma - i\omega)t} \end{bmatrix}[\underline{u} \,\vdots\, \underline{\bar{u}}]^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{At} = e^{\sigma t}[\underline{u} \,\vdots\, \underline{\bar{u}}]\begin{bmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{bmatrix}[\underline{u} \,\vdots\, \underline{\bar{u}}]^{-1}$$

Επίσης: $[\underline{u} \,\vdots\, \underline{\bar{u}}] = [\underline{x} + i\underline{z} \,\vdots\, \underline{x} - i\underline{z}] =$

$$= [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}.$$

Άρα:

$$e^{At} = e^{\sigma t}\,[\underline{x} \vdots \underline{z}] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}^{-1} [\underline{x} \vdots \underline{z}]^{-1}$$

Έχουμε ~~Now~~:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2i}$$

και

$$\frac{1}{2i} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\omega t} & e^{-i\omega t} \\ ie^{i\omega t} & -ie^{-i\omega t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2i}$$

$$= \begin{bmatrix} ie^{i\omega t} + ie^{-i\omega t} & e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} \\ -e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} & ie^{i\omega t} + ie^{-i\omega t} \end{bmatrix} \frac{1}{2i}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}$$

και επομένως:

$$e^{At} = e^{\sigma t}\,[\underline{x} \vdots \underline{z}] \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix} [\underline{x} \vdots \underline{z}]^{-1}$$

~~The cale~~ Ο παραπάνω υπολογισμός μπορεί να επεκταθεί στην περίπτωση που $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και το φάσμα του A περιέχει τις ιδιοτιμές $\sigma \pm i\omega$ (με αλγεβρική πολλαπλότητα ένα). Έστω ότι ο πίνακας είναι απλής δομής: Τότε,

$$A\,[\underline{u} \vdots \underline{\bar{u}} \vdots U_2] = [\underline{u} \vdots \underline{\bar{u}} \vdots U_2] \begin{bmatrix} \sigma + i\omega & 0 & 0 \\ 0 & \sigma - i\omega & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix}$$

όπου $\underline{u} = \underline{x} + i\underline{z} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και $\underline{\bar{u}} = \underline{x} - i\underline{z} \in \mathbb{C}^n$ είναι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\sigma + i\omega$ και $\sigma - i\omega$, αντίστοιχα,

$\Lambda_2 = diag(\Lambda_2)$ ο διαγώνιος πίνακας που περιέχει τις υπόλοιπες ιδιοτιμές του A και ~~U_2~~ οι στήλες του U_2 περιέχουν τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Γράφουμε:

$$[\underline{u} \vdots \bar{\underline{u}}] = [\underline{x} \vdots \underline{z}] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}.$$

Και επομένως:

$$A[\underline{x} \vdots \underline{z} \vdots U_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{bmatrix} = [\underline{x} \vdots \underline{z} \vdots U_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma+i\omega & 0 & 0 \\ 0 & \sigma-i\omega & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = [\underline{x}\ \underline{z}\ U_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma+i\omega & 0 & 0 \\ 0 & \sigma-i\omega & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{bmatrix}^{-1} [\underline{x} \vdots \underline{z} \vdots U_2]^{-1}$$

και

$$e^{At} = [\underline{x} \vdots \underline{z} \vdots U_2] \begin{bmatrix} e^{\sigma t}\cos\omega t & e^{\sigma t}\sin\omega t & 0 \\ -e^{\sigma t}\sin\omega t & e^{\sigma t}\cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & e^{\Lambda_2 t} \end{bmatrix} [\underline{x} \vdots \underline{z} \vdots U_2]^{-1}$$

Πίνακες μή απλής δομής

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ πίνακας μή απλής δομής.

Ορισμός: Το διάνυσμα $\underline{v} \in \mathbb{C}^n$ ονομάζεται γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξης m πού αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(A)$ αν και μόνο αν

$$(\lambda I - A)^m \underline{v} = \underline{0} \quad \text{καί} \quad (\lambda I - A)^{m-1} \underline{v} \neq \underline{0}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό ενα (απλό) ιδιοδιάνυσμα είναι γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξης $m=1$.

Μια αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων μήκους k πού παράγεται από (απλό) ιδιοδιάνυσμα $\underline{v}_1$ είναι τό σύνολο $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k\}$ ώστε :

$$\left.\begin{aligned} (A-\lambda I_n)\,\underline{v}_k &= \underline{v}_{k-1} \\ (A-\lambda I_n)\,\underline{v}_{k-1} &= \underline{v}_{k-2} \\ &\vdots \\ (A-\lambda I_n)\,\underline{v}_2 &= \underline{v}_1 \\ (A-\lambda I_n)\,\underline{v}_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Γενικά έχουμε :

$$(A-\lambda I_n)^j\,\underline{v}_j = 0$$

$$\left[(A-\lambda I_n)^2\,\underline{v}_2 = (A-\lambda I)(A-\lambda I)\,\underline{v}_2 = (A-\lambda I)\,v_1 = 0, \text{ κλπ}\right]$$

Οι σχέσεις (*) γράφονται σε μορφή πινακοεξίσωσης :

$$A\,[\underline{v}_1\ \underline{v}_2 \cdots \underline{v}_{k-1}\ \underline{v}_k] = [\underline{v}_1\ \underline{v}_2 \cdots \underline{v}_{k-1}\ \underline{v}_k]\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda \end{bmatrix}}_{J(\lambda)}$$

Όταν ο πίνακας είναι μη-απλής δομής δεν διαγωνιοποιείται (μέσω μετασχηματισμού ομοιότητας) αλλά μπορεί νά μετασχηματισθεί σε κανονική μορφή Jordan. Τά βασικά ερωτήματα πού προκύπτουν είναι:

(α) Πόσες αλυσίδες δημιουργούνται από τό σύνολο των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν σέ μία ιδιοτιμή λ;

(β) Ποιό είναι τό μήκος των αλυσίδων;

Έστω $\lambda_i \in \sigma(A) =: \{\lambda \in \mathbb{C} : \varphi(\lambda) = 0\}$. Ορίζουμε γιά κάθε λ_i:

$$r_{ki} = \mathrm{Rank}(A - \lambda_i I_n)^k \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Η ακολουθία ακεραίων $(r_{ki})_k$ είναι φθίνουσα. Η γεωμετρική πολλαπλότητα $d_i = n - r_{1i}$ δίνει τόν αριθμό αλυσίδων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i. Το μήκος της μέγιστης αλυσίδας είναι ο ελάχιστος ακέραιος ℓ_i γιά τόν οποίο $r_{\ell_i i} = r_{\ell_i+1, i}$. Στήν ιδιοτιμή λ_i αντιστοιχούν γενικευμένα ιδιοδιανύσματα μέχρι τάξης ℓ_i (οχι μεγαλύτερης τάξης). Τά απλά ιδιοδιανύσματα είναι πλήθους $r_{1i} - r_{2i}$, τά γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα τάξης ℓ_i είναι πλήθους $r_{\ell_i-1, i} - r_{\ell_i, i}$, κλπ.

Η χαρακτηριστική Segré ορίζεται ως

$$S_i = [\underbrace{n - r_{1i}}_{d_i},\ r_{1i} - r_{2i}, \ldots, r_{\ell_i-1, i} - r_{\ell_i, i}]$$

καί περιέχει το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων καθε τάξης. Ο αριθμός γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων κάθε αλυσίδας δίνεται από τό διάγραμμα Ferrer.

Παράδειγμα.

Εστω ιδιοτιμή πίνακα $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ γιά την οποία:

$$\nu_1 = 5,\ \nu_2 = 3,\ \nu_3 = 2,\ \nu_4 = 1,\ \nu_5 = 1$$

Η γεωμετρική πολλαπλότητα της λ_0 είναι $10 - \nu_1 = 5$. Ο ελάχιστος $\ell \in \mathbb{N}$ γιά τόν οποίο $\nu_\ell = \nu_{\ell+1}$ είναι $\ell = 4$. Αρα έχουμε γενικευμένα ιδιοδιανύσματα μέχρι $4^{ης}$ τάξης. Η χαρακτηριστική Segré είναι:

$$S = [n-\nu_1,\ \nu_1-\nu_2,\ \nu_2-\nu_3,\ \nu_3-\nu_4] = [5, 2, 1, 1]$$

καί επομένως εχουμε 5 (απλά) ιδιοδιανύσματα, 2 γενικευμένα ιδιοδιανύσματα $2^{ης}$ τάξης, 1 γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα $3^{ης}$ τάξης καί 1 γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα $4^{ης}$ τάξης. Τό διάνυσμα Ferrer:

$$\begin{array}{lccccc}
n-\nu_1 = 5 \ \rightarrow & * & * & * & * & * \\
\nu_1-\nu_2 = 2 \ \rightarrow & * & * & & & \\
\nu_2-\nu_3 = 1 \ \rightarrow & * & & & & \\
\nu_3-\nu_4 = 1 \ \rightarrow & * & & & & \\
\hline
 & 4 & 2 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

καί επομένως εχουμε 1 αλυσίδα μήκους 4, 1 μήκους 2, καί 3 μήκους 1. Η μορφή Jordan πού αντιστοιχεί στό λ_0:

$$J(\lambda_0) = \mathrm{diag}\left\{ \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}, \lambda_0, \lambda_0, \lambda_0 \right\}.$$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ μέ e διακεκριμένες ιδιοτιμές $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_e\}$ καί αντίστοιχα Jordan blocks διαστάσεων $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_e\}$ αντίστοιχα. (οι ακέραιοι τ_i είναι οι αλγεβρικές πολλαπλότητες). Έστω U ο πίνακας γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων, έτσι ώστε:

$$A = U \,\mathrm{diag}\{J_1, J_2, \dots, J_e\} U^{-1} := U J U^{-1}$$

Τότε $e^{At} = U e^{Jt} U^{-1}$ όπου $e^{Jt} = \mathrm{diag}\{e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \dots, e^{J_e t}\}$

Αν $J_i = \mathrm{diag}\{J_{i1}, J_{i2}, \dots, J_{id_i}\}$, $i = 1, 2, \dots, e$, καί

$$J_{ij} = J_{ij}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k_{ij} \times k_{ij}}$$

τότε:

$$e^{J_{ij} t} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! & \cdots & t^{k_{ij}-1}/(k_{ij}-1)! \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Απόδειξη</u> Βασίζεται στά παρακάτω βήματα

(i) $$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(UJU^{-1})^k t^k}{k!} = U\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k t^k}{k!}\right) U^{-1}$$

$$= U e^{Jt} U^{-1}$$

(ii) $J^k = \text{diag}\{J_1, J_2, \dots J_e\}^k = \text{diag}\{J_1^k, J_2^k, \dots, J_e^k\}$.

(iii) $e^{Jt} = I + \text{diag}\{J_1, \dots J_e\}\, t + \frac{1}{2!}\, \text{diag}\{J_1^2, \dots, J_e^2\}$

$$+ \dots + \frac{1}{k!}\, \text{diag}\{J_1^k, \dots, J_e^k\}\, t^k + \dots$$

$$= \text{diag}\{e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \dots, e^{J_e t}\}$$

Παρόμοια, $e^{J_i t} = \text{diag}\{e^{J_{i1} t}, e^{J_{i2} t}, \dots, e^{J_{id_i} t}\}$.

(iv) Έστω:

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & - & - & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} = \lambda_i I_{k_{ij}} + N_{k_{ij}}$$

όπου $N_{m_{ij}}$ είναι μηδενοδύναμος (nillpotent) πίνακας. Επειδή $\lambda_i I_{k_{ij}}$ και $N_{k_{ij}}$ αντιμετατίθενται έχουμε

$$e^{J_{ij} t} = e^{\lambda_i t I_{k_{ij}} + N_{k_{ij}} t} \overset{(*)}{=} e^{\lambda_i t} e^{N_{k_{ij}} t}$$

και

$$e^{N_{k_{ij}} t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_{k_{ij}}^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m_{ij}-1} \frac{N_{k_{ij}}^k t^k}{k!}$$

(δηλ. $N_{k_{ij}}^k = 0$ γιά $k \geq k_{ij}$)

Η ισότητα (*) προκύπτει από το παρακάτω Λήμμα:

<u>Λήμμα</u>: Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $AB = BA$, τότε $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$.

Απόδειξη:

Θέτουμε $\Phi(t) = e^{(A+B)t} \cdot e^{-At} \cdot e^{-Bt}$. Τότε

$$\Phi'(t) = e^{(A+B)t}(A+B)e^{-At}e^{-Bt} + e^{(A+B)t}(-A)e^{-At}e^{-Bt} + e^{(A+B)t}e^{-At}(-B)e^{-Bt}$$

$$= e^{(A+B)t}\{(\cancel{A}+B)e^{-At} - \cancel{Ae^{-At}} - e^{-At}B\}e^{-Bt}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $AB = BA$ έχουμε ότι $e^{-At}B = Be^{-At}$ που ισχύει διότι:

$$e^{-At}B = \{I - At + \frac{A^2t^2}{2!} - \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots\}B$$

$$= B - ABt + \frac{A^2Bt^2}{2!} - \frac{A^3Bt^3}{3!} + \cdots$$

$$= B\left(I - At + \frac{A^2t^2}{2!} - \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= Be^{-At}$$

Επομένως: $\Phi'(t) = 0 \Rightarrow \Phi(t) = \Phi(0) = I_n$

$$\Rightarrow e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$$

Παράδειγμα:

Έστω $J = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] = \mathrm{diag}\{J_1, J_2\}$.

Έχουμε: $\varphi(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda-2)$

$\lambda_1 = 1: \quad \tau_1 = 3, \quad$ έστω $d_1 = 1$

$\lambda_2 = 2: \quad \tau_2 = d_2 = 1$

$$e^{Jt} = \operatorname{diag}\{e^{J_1 t}, e^{J_2 t}\}$$

$$e^{J_1 t} = e^{\lambda_1 t I_3 + N_3 t} = e^{\lambda_1 t} e^{N_3 t}$$, όπου

$$N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_3^3 = N_3^4 = \cdots = 0_{3,3}$$

Επομένως

$$e^{N_3 t} = I_3 + N_3 t + \frac{1}{2} N_3^2 t^2 = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και επομένως

$$e^{J_1 t} = e^t \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^{J_2 t} = e^{2t}$$

Άρα

$$e^{Jt} = \left[\begin{array}{ccc|c} e^t & te^t & \frac{1}{2}t^2 e^t & 0 \\ 0 & e^t & te^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{array}\right]$$

Παράδειγμα

Νὰ λυθεῖ τὸ ΠΑΤ :

$$\underline{y}'(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underline{y}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{b}} , \quad \underline{y}(0) = \underline{y}_0 = \underline{0}$$

Η λύση εἶναι τῆς μορφῆς

$$\underline{y}(t) = e^{At}\underline{y}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\underline{b}\, d\tau = \left(\int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau\right)\underline{b}$$

Ἔχουμε:

$$e^{At} = e^t \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{A(t-\tau)} = \begin{bmatrix} e^{t-\tau} & (t-\tau)e^{t-\tau} \\ 0 & e^{t-\tau} \end{bmatrix}$$

Ἐπομένως

$$e^{A(t-\tau)}\underline{b} = \begin{bmatrix} e^{t-\tau} & (t-\tau)e^{t-\tau} \\ 0 & e^{t-\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t-\tau} \\ 0 \end{bmatrix}$$

καί

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t e^{t-\tau} d\tau \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \int_0^t e^{-\tau} d\tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^t \left[e^{-\tau}\right]_t^0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t(1-e^{-t}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^t - 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Μιγαδική ιδιοτιμή

Έστω αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων μήκους 2k πού αντιστοιχούν σέ μιγαδική ιδιοτιμή $\lambda = \sigma + i\omega$ ($\omega, \sigma \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$), δηλ.

$$\left\{\begin{array}{l} A\underline{u}_k = \lambda \underline{u}_k + \underline{u}_{k-1} \\ A\underline{u}_{k-1} = \lambda \underline{u}_{k-1} + \underline{u}_{k-2} \\ \vdots \\ A\underline{u}_2 = \lambda \underline{u}_2 + \underline{u}_1 \\ A\underline{u}_1 = \lambda \underline{u}_1 \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} A\bar{\underline{u}}_k = \bar{\lambda} \bar{\underline{u}}_k + \bar{\underline{u}}_{k-1} \\ A\bar{\underline{u}}_{k-1} = \bar{\lambda} \bar{\underline{u}}_{k-1} + \bar{\underline{u}}_{k-2} \\ \vdots \\ A\bar{\underline{u}}_2 = \bar{\lambda} \bar{\underline{u}}_2 + \bar{\underline{u}}_1 \\ A\bar{\underline{u}}_1 = \bar{\lambda} \bar{\underline{u}}_1 \end{array}\right\}$$

Αναλυτικά γράφουμε: $\underline{u}_i = \underline{x}_i + i\underline{z}_i \quad (\underline{x}_i, \underline{z}_i \in \mathbb{R}^n)$.

$$A(\underline{x}_1 + i\underline{z}_1) = (\sigma + i\omega)(\underline{x}_1 + i\underline{z}_1)$$

$$A(\underline{x}_2 + i\underline{z}_2) = (\sigma + i\omega)(\underline{x}_2 + i\underline{z}_2) + (\underline{x}_1 + i\underline{z}_1)$$

$$\vdots$$

$$A(\underline{x}_{k-1} + i\underline{z}_{k-1}) = (\sigma + i\omega)(\underline{x}_{k-1} + i\underline{z}_{k-1}) + (\underline{x}_{k-2} + i\underline{z}_{k-2})$$

$$A(\underline{x}_k + i\underline{z}_k) = (\sigma + i\omega)(\underline{x}_k + i\underline{z}_k) + (\underline{x}_{k-1} + i\underline{z}_{k-1})$$

Ισοδύναμα:

$$A\underline{x}_1 = \sigma\underline{x}_1 - \omega\underline{z}_1, \quad A\underline{z}_1 = \omega\underline{x}_1 + \sigma\underline{z}_1$$

$$A\underline{x}_2 = \sigma\underline{x}_2 - \omega\underline{z}_2 + \underline{x}_1, \quad A\underline{z}_2 = \omega\underline{x}_2 + \sigma\underline{z}_2 + \underline{z}_1$$

$$\vdots$$

$$A\underline{x}_{k-1} = \sigma\underline{x}_{k-1} - \omega\underline{z}_{k-1} + \underline{x}_{k-2}, \quad A\underline{z}_{k-1} = \omega\underline{x}_{k-1} + \sigma\underline{z}_{k-1} + \underline{z}_{k-2}$$

$$A\underline{x}_k = \sigma\underline{x}_k - \omega\underline{z}_k + \underline{x}_{k-1}, \quad A\underline{z}_k = \omega\underline{x}_k + \sigma\underline{z}_k + \underline{z}_{k-1}$$

Πού γράφεται σε μορφή πινακοεξίσωσης

$$A\,[\,\underline{x}_1\ \underline{z}_1 \,\vdots\, \underline{x}_2\ \underline{z}_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \underline{x}_k\ \underline{z}_k\,] =$$

$$= [\,\underline{x}_1\ \underline{z}_1 \,\vdots\, \underline{x}_2\ \underline{z}_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \underline{x}_k\ \underline{z}_k\,] \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} \sigma & \omega & 1 & 0 & & & & \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 & & & & \\ \hline & & \sigma & \omega & 1 & 0 & & \\ & & -\omega & \sigma & 0 & 1 & & \\ \hline & & & & \ddots & & \ddots & \\ \hline & & & & \sigma & \omega & 1 & 0 \\ & & & & -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ \hline & & & & & & \sigma & \omega \\ & & & & & & -\omega & \sigma \end{array}\right]}_{J(\sigma,\omega)}.$$

Επίσης τα $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots \underline{u}_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ~~ότι~~ · συνεπάγεται ότι $\{\underline{x}_1, \underline{z}_1, \underline{x}_2, \underline{z}_2, \ldots \underline{x}_k, \underline{z}_k\}$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα (στον $\mathbb{R}^n$ επί του $\mathbb{R}$).

Απλοποιούμε για την περίπτωση $k=2$ (η γενική λύση παρόμοια). Έχουμε:

$$A\,[\,\underline{u}_1\ \overline{\underline{u}}_1 \,\vdots\, \underline{u}_2\ \overline{\underline{u}}_2\,] = [\,\underline{u}_1\ \overline{\underline{u}}_1 \,\vdots\, \underline{u}_2\ \overline{\underline{u}}_2\,] \left[\begin{array}{cc|cc} \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda} \end{array}\right]$$

Ισοδύναμα έχουμε:

Άρα,

$$e^{At} = U Q_1 \underbrace{Q_2 \overbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{\bar\lambda t} & te^{\bar\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{array}\right]}^{\Phi_0} Q_2^{-1}}_{\Phi_1} Q_1^{-1} U^{-1}$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\bar\lambda t} & te^{\bar\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\bar\lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 & te^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\bar\lambda t} & 0 & te^{\bar\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\bar\lambda t} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} e^{\lambda t} & 0 & te^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\bar\lambda t} & 0 & te^{\bar\lambda t} \\ \hline 0 & 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{e^{\bar\lambda t}}\ 0 & e^{\bar\lambda t} \end{array}\right]$$

$$\Phi_2 = Q_1 \Phi_1 Q_1^{-1} = Q_1 Q_2 \Phi_0 Q_2^{-1} Q_1^{-1} =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & -i \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} e^{\lambda t} & 0 & te^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\bar\lambda t} & 0 & te^{\bar\lambda t} \\ \hline 0 & 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\bar\lambda t} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & -i \end{array}\right]^{-1}$$

$$A\left[\underbrace{\underline{u}_1\ \ \underline{u}_2 \ \vdots\ \bar{\underline{u}}_1\ \ \bar{\underline{u}}_2}\right] = \left[\underbrace{\underline{u}_1\ \ \underline{u}_2 \ \vdots\ \bar{\underline{u}}_1\ \ \bar{\underline{u}}_2}_{P}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \bar{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A = P \left[\begin{array}{cc|cc} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \bar{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda} \end{array}\right] P^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{At} = P \left[\begin{array}{cc|cc} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{\bar{\lambda} t} & t e^{\bar{\lambda} t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\bar{\lambda} t} \end{array}\right] P^{-1}$$

όπου $e^{\lambda t} = e^{(\sigma + i\omega)t} = e^{\sigma t} e^{i\omega t}$, $e^{\bar{\lambda} t} = e^{\sigma t} e^{-i\omega t}$.

Επίσης

$$\left[\underbrace{\underline{u}_1\ \ \underline{u}_2 \ \vdots\ \bar{\underline{u}}_1\ \ \bar{\underline{u}}_2}_{P}\right] = \left[\underline{x}_1 + i\underline{z}_1 \ \vdots\ \underline{x}_2 + i\underline{z}_2 \ \vdots\ \underline{x}_1 - i\underline{z}_1 \ \vdots\ \underline{x}_2 - i\underline{z}_2\right]$$

$$= \left[\underline{x}_1 \ \vdots\ \underline{z}_1 \ \vdots\ \underline{x}_2 \ \ \underline{z}_2\right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$= \left[\underbrace{\underline{x}_1 \ \vdots\ \underline{z}_1 \ \vdots\ \underline{x}_2 \ \vdots\ \underline{z}_2}_{u}\right] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & -i \end{bmatrix}}_{Q_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q_2}$$

Επίσης:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2i}\begin{bmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} +i & 1 \\ +i & -1 \end{bmatrix}.$$

και επομένως

$$\Phi_2(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\bar\lambda t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{2i}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & e^{\bar\lambda t} \\ ie^{\lambda t} & -ie^{\bar\lambda t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{2i}$$

$$= \begin{bmatrix} ie^{\lambda t}+ie^{\bar\lambda t} & e^{\lambda t}-e^{\bar\lambda t} \\ -e^{\lambda t}+e^{\bar\lambda t} & ie^{\lambda t}+ie^{\bar\lambda t} \end{bmatrix}\frac{1}{2i}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{\lambda t}+e^{\bar\lambda t}) & \frac{1}{2i}(e^{\lambda t}-e^{\bar\lambda t}) \\ -\frac{1}{2i}(e^{\lambda t}-e^{\bar\lambda t}) & \frac{1}{2}(e^{\lambda t}+e^{\bar\lambda t}) \end{bmatrix}$$

$$\left(e^{\lambda t} = e^{(\sigma+i\omega)t} = e^{\sigma t}e^{i\omega t}\right) \quad = \begin{bmatrix} e^{\sigma t}\cos\omega t & e^{\sigma t}\sin\omega t \\ -e^{\sigma t}\sin\omega t & e^{\sigma t}\cos\omega t \end{bmatrix} = \Phi_2(2,2)$$

$$\Phi_2(1,2) = \begin{bmatrix} te^{\sigma t}\cos\omega t & te^{\sigma t}\sin\omega t \\ -te^{\sigma t}\sin\omega t & te^{\sigma t}\cos\omega t \end{bmatrix}, \quad \Phi_2(2,1) = 0$$

Και επομένως:

$$e^{At} = [\underline{x}_1\ \underline{z}_1 \,\vdots\, x_2\ z_2]\left[\begin{array}{cc|cc} e^{\sigma t}\cos\omega t & e^{\sigma t}\sin\omega t & te^{\sigma t}\cos\omega t & te^{\sigma t}\sin\omega t \\ -e^{\sigma t}\sin\omega t & e^{\sigma t}\cos\omega t & -te^{\sigma t}\sin\omega t & te^{\sigma t}\cos\omega t \\ \hline 0 & 0 & e^{\sigma t}\cos\omega t & e^{\sigma t}\sin\omega t \\ 0 & 0 & -e^{\sigma t}\sin\omega t & e^{\sigma t}\cos\omega t \end{array}\right] \cdot$$

$$\cdot\, [\underline{x}_1\ \underline{z}_1 \,\vdots\, \underline{x}_2\ \underline{z}_2]^{-1}$$

Διακριτά Συστήματα (γραμμικά μέ σταθερούς συντελεστές)

Συστήματα εξισώσεων διαφορών $1^{ης}$ τάξης:

$$\underline{y}_{k+1} = A\underline{y}_k + \underline{b}_k \qquad (A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \underline{b}_k, \underline{y}_k \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{N}_0)$$

Αν $\underline{b}_k \neq 0$ τό σύστημα είναι μή ομογενές (διαφορετικά ομογενές).

$$k=0 \Rightarrow \underline{y}_1 = A\underline{y}_0 + \underline{b}_0$$

$$k=1 \Rightarrow \underline{y}_2 = A\underline{y}_1 + \underline{b}_1 = A(A\underline{y}_0 + \underline{b}_0) + \underline{b}_1$$

$$= A^2\underline{y}_0 + A\underline{b}_0 + \underline{b}_1 .$$

Επαγωγικά: $\underline{y}_k = A^k\underline{y}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1}\underline{b}_j \qquad k \in \mathbb{N}_0$

Ισοδύναμα:

$$\underline{y}_k = A^k\underline{y}_0 + \left[A^{k-1} \,\vdots\, A^{k-2} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A \,\vdots\, I\right] \begin{bmatrix} \underline{b}_0 \\ \underline{b}_1 \\ \vdots \\ \underline{b}_{k-1} \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος ($A^k\underline{y}_0$) εξαρτάται αποκλειστικά από την αρχική συνθήκη (αρχική "κατάσταση") $\underline{y}_0$ καί ο δεύτερος από τα $\underline{b}_k$. Ενδιαφερόμαστε νά υπολογίσομε τον A^k με τρόπο που δίνει πληροφορία για την συμπεριφορά της λύσης (ευστάθεια).

Εστω ότι ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι πίνακας απλής δομής μέ ιδιοτιμές $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ καί αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\{\underline{u}_i\}_{i=1}^n$ (γραμμικά ανεξάρτητα).

Αν $P = [\underline{u}_1\ \underline{u}_2 \cdots \underline{u}_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τότε $\det(P) \neq 0$ καί

$$P^{-1}AP = \Lambda, \quad \Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

$$\Rightarrow (P^{-1}AP)^k = \underbrace{P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP \cdots P^{-1}AP}_{k \text{ φορές}} = P^{-1}A^kP = \Lambda^k$$

$$= diag\{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k\}.$$

Η λύση του ομογενούς συστήματος είναι της μορφής:

$$\underline{y}_k = A^k \underline{y}_0 = P\Lambda^k P^{-1} \underline{y}_0$$

Αν $P^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1^T \\ \vdots \\ \underline{v}_n^T \end{bmatrix}$ ο πίνακας των αριστερών ιδιοδιανυσμάτων

τότε $\underline{y}_k = [\underline{u}_1\ \underline{u}_2 \cdots \underline{u}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_1^T \\ \underline{v}_2^T \\ \vdots \\ \underline{v}_n^T \end{bmatrix} \underline{y}_0$

$$\Rightarrow \underline{y}_k = \sum_{i=1}^{n} (\underline{v}_i^T \underline{y}_0)\lambda_i^k \underline{u}_i$$

Όλες οι λύσεις του συστήματος είναι της μορφής:

$$\underline{y}_k = P\Lambda^k \underline{c} = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k \underline{u}_i, \qquad \underline{c} \in \mathbb{R}^n$$

Ενώ η λύση του αντίστοιχου Π.Α.Τ ($\underline{y}_{k+1} = A\underline{y}_k$, $\underline{y}_0$ δοσμένο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$) είναι μοναδική.

Έστω ότι ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ δεν είναι απλής δομής και έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (\lambda-\lambda_1)^{\tau_1}(\lambda-\lambda_2)^{\tau_2}\cdots(\lambda-\lambda_e)^{\tau_e}$$

($\lambda_i \neq \lambda_j$ αν $i \neq j$).

Έχουμε $d_i = \dim \operatorname{Ker}(\lambda_i I - A) = n - r_i$, όπου $r_i = \operatorname{Rank}(\lambda_i I - A)$, όπου d_i η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i, $i = 1, 2, \ldots, e$. Εφόσον ο A είναι μή απλής δομής έχουμε $d_i < \tau_i$ γιά ένα τουλάχιστον $i = 1, 2, \ldots, e$. Η μορφή Jordan του πίνακα A είναι:

$$J = \operatorname{diag}\{J_1; J_2, \ldots, J_e\} \quad \text{όπου} \quad J_i = J_i(\lambda_i)$$

Κάθε διαγώνιο block J_i είναι της μορφής:

$$J_i = \operatorname{diag}\{J_{i1}, J_{i2}, \ldots, J_{id_i}\} \qquad i = 1, 2, \ldots, e$$

Οι διαστάσεις των πινάκων J_{ij} καθορίζονται από την χαρακτηριστική Segré καί τό διάγραμμα Ferrer (κατά τά γνωστά!).

Αν P ο πίνακας γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων, τότε $\det(P) \neq 0$ καί:

$$P^{-1}AP = J = \operatorname{diag}\{J_1, J_2, \ldots, J_e\}$$

$$P^{-1}A^kP = J^k = \operatorname{diag}\{J_1^k, J_2^k, \ldots, J_e^k\}$$

$$J_i^k = \operatorname{diag}\{J_{i1}^k, J_{i2}^k, \ldots, J_{id_i}^k\}$$

όπου:

$$J_{ij}^{k} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}^{k}$$

Έστω $J_{ij} \in \mathbb{R}^{m_{ij} \times m_{ij}}$ (η διάσταση m_{ij} προκύπτει από την χαρακτηριστική Segré). Τότε:

$$J_{ij}^{k} = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \frac{1}{2!}k(k-1)\lambda_i^{k-2} & \cdots & \frac{k(k-1)\cdots(k-m_{ij}+1)\lambda^{k-m_{ij}+1}}{(m_{ij}-1)!} \\ 0 & \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \lambda_i^k & \ddots & \frac{k(k-1)\lambda_i^{k-2}}{2!} \\ \vdots & & & \ddots & k\lambda_i^{k-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

Γιά παράδειγμα, αν $m_{ij}=3$

$$J_{ij} = \lambda_i I_3 + N_3 \quad , \quad N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο N_3 είναι μηδενοδύναμος μέ $N_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

καί $N_3^3 = 0$. Άρα τό διωνυμικό ανάπτυγμα:

$$J_{ij}^k = (\lambda_i I_3 + N_3)^k = \lambda_i^k I_3 + \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} N_3 + \binom{k}{2}\lambda_i^{k-2} N_3^2$$

Καί

$$J_{ij}^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & k\lambda_i^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & k\lambda_i^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k(k-1)}{2!}\lambda_i^{k-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \frac{1}{2!}k(k-1)\lambda_i^{k-2} \\ 0 & \lambda_i^k & k\lambda_i^k \\ 0 & 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

Μιγαδικές ιδιοτιμές

Έστω $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με ιδιοτιμές $\lambda = \rho e^{i\theta}$ και $\bar{\lambda} = \rho e^{-i\theta}$ $(\theta \neq n\pi)$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\underline{u} = \underline{x} + i\underline{z}$, $\underline{\bar{u}} = \underline{x} - i\underline{z}$.
Ο A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές και άρα είναι απλής δομής.
Γράφουμε:

$$A = [\underline{u} \,\vdots\, \underline{\bar{u}}] \begin{bmatrix} \rho e^{i\theta} & 0 \\ 0 & \rho e^{-i\theta} \end{bmatrix} [\underline{u} \,\vdots\, \underline{\bar{u}}]^{-1}$$

$$= [\underline{x} + i\underline{z} \,\vdots\, \underline{x} - i\underline{z}] \begin{bmatrix} \rho e^{i\theta} & 0 \\ 0 & \rho e^{-i\theta} \end{bmatrix} [\underline{x} + i\underline{z} \,\vdots\, \underline{x} - i\underline{z}]^{-1}$$

$$= [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho e^{i\theta} & 0 \\ 0 & \rho e^{-i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}^{-1} [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]^{-1}$$

$$= \ldots = [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] \begin{bmatrix} \rho^k \cos(k\theta) & \rho^k \sin(k\theta) \\ -\rho^k \sin(k\theta) & \rho^k \cos(k\theta) \end{bmatrix} [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]^{-1}$$

Μέ παρόμοιο τρόπο αναλύουμε πίνακες μή απλής δομής. Εστω $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ μέ χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda^2 - 2\rho\cos\theta \cdot \lambda + \rho^2)^2$$

καί ιδιοτιμές $\lambda = \rho e^{i\theta}$ (μέ $\tau=2$ καί έστω $d=1$) καί $\bar{\lambda} = \rho e^{-i\theta}$ (μέ $\tau=2$ καί $d=1$). Εστω $\underline{u}_1 = \underline{x}_1 + i\underline{z}_1$, $\underline{u}_2 = \underline{x}_2 + i\underline{z}_2$ τά γενικευμένα ιδιοδιανύσματα $1^{ης}$ καί $2^{ης}$ τάξης που αντιστοιχούν στήν ιδιοτιμή λ (καί επομένως $\bar{\underline{u}}_1$ καί $\bar{\underline{u}}_2$ τά γενικευμένα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στήν ιδιοτιμή $\bar{\lambda}$). Οι δύο αλυσίδες γεν. ιδιοδιανυσμάτων γράφονται:

$$A\underline{u}_2 = \lambda\underline{u}_2 + \underline{u}_1 \qquad A\bar{\underline{u}}_2 = \bar{\lambda}\bar{\underline{u}}_2 + \bar{\underline{u}}_1$$
$$A\underline{u}_1 = \lambda\underline{u}_1 \qquad A\bar{\underline{u}}_1 = \bar{\lambda}\bar{\underline{u}}_1$$

Εχουμε:

$$A\left[\underline{x}_1 + i\underline{z}_1 \quad \underline{x}_1 - i\underline{z}_1 \;\vdots\; \underline{x}_2 + i\underline{z}_2 \quad \underline{x}_2 - i\underline{z}_2\right] =$$

$$= \left[\underline{x}_1 + i\underline{z}_1 \quad \underline{x}_1 - i\underline{z}_1 \;\vdots\; \underline{x}_2 + i\underline{z}_2 \quad \underline{x}_2 - i\underline{z}_2\right] \cdot$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \rho e^{i\theta} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \rho e^{-i\theta} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \rho e^{i\theta} & \\ 0 & 0 & 0 & \rho e^{-i\theta} \end{array}\right] \cdot$$

$$\Rightarrow A^k = \left[\underline{x}_1 \quad \underline{z}_1 \;\vdots\; \underline{x}_2 \quad \underline{z}_2\right] \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & -i \end{array}\right] \cdot$$

$$\cdot \left[\begin{array}{cc|cc} \rho e^{ik\theta} & 0 & k\rho^{k-1} e^{i(k-1)\theta} & 0 \\ 0 & \rho e^{-ik\theta} & 0 & k\rho^{k-1} e^{-i(k-1)\theta} \\ \hline 0 & 0 & \rho^k e^{ik\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho^k e^{-ik\theta} \end{array}\right]$$

$$\cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & -i \end{array}\right]^{-1} \quad [\underline{x}_1\ \underline{z}_1 \mid \underline{x}_2\ \underline{z}_2]^{-1}$$

και επομένως

$$A^k = [\underline{x}_1\ \underline{z}_1 \mid \underline{x}_2\ \underline{z}_2] \begin{bmatrix} \rho^k\cos(k\theta) & \rho^k\sin(k\theta) & k\rho^{k-1}\cos(k-1)\theta & k\rho^{k-1}\sin(k-1)\theta \\ -\rho^k\sin(k\theta) & \rho^k\cos(k\theta) & -k\rho^{k-1}\sin(k-1)\theta & k\rho^{k-1}\cos(k-1)\theta \\ 0 & 0 & \rho^k\cos(k\theta) & \rho^k\sin(k\theta) \\ 0 & 0 & -\rho^k\sin(k\theta) & \rho^k\cos(k\theta) \end{bmatrix}$$

$$\cdot\ [\underline{x}_1\ \underline{z}_1 \mid \underline{x}_2\ \underline{z}_2]^{-1}$$

που γενικεύεται γιά Jordan blocks μεγαλύτερων διαστάσεων (ασκηση!).

Δυναμικά συστήματα στην Θεωρία Ελέγχου.

Στην Θεωρία ελέγχου τά δυναμικά συστήματα έχουν "είσοδο" και "έξοδο", δηλαδή περιγράφονται από διαφορικά συστήματα της μορφής (στη μη γραμμική περίπτωση)

$$\underline{x}'(t) = f(\underline{x}(t), \underline{u}(t)), \quad \underline{y}(t) = h(x(t))$$

η (στην γραμμική περίπτωση) ως $\underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u}$, $\underline{y} = C\underline{x}$.

(Αντίστοιχα γιά διακριτά συστήματα έχουμε:

$$\underline{x}_{k+1} = f(\underline{x}_k, \underline{u}_k), \quad \underline{y}_k = h(\underline{x}_k)$$

ή

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k, \quad \underline{y}_k = C\underline{x}_k$$

στήν μή-γραμμική καί γραμμική περίπτωση, αντίστοιχα).

Το "διάνυσμα κατάστασης" ($\underline{x}(t)$ η $\underline{x}_k$) δεν είναι προσβάσιμο (μετρήσιμο). Οι μετρήσιμες μεταβλητές αντιστοιχούν στό διάνυσμα εξόδου $\underline{y}(t)$ ενώ υποθέτουμε ότι οι μεταβλητές εισόδου μπορούν νά επιλεγούν από τον σχεδιαστή του συστήματος. Γιά μια σειρά λόγων είναι προτιμότερο οι μεταβλητές αυτές νά μην επιλέγονται ως αυθαίρετες συναρτήσεις χρόνου ("open-loop") αλλά μέσω "ανάδρασης" (feedback), δηλαδή ως συναρτήσεις των μετρήσιμων μεταβλητών

$$\underline{u} = g(\underline{y}(t)) = g(h(x(t)))$$

όπου $g(\cdot)$ είναι η συνάρτηση ελέγχου. Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\underline{x}'(t) = f(x(t), g \circ h \circ x(t)) = \hat{f}(x(t))$$

πού είναι αυτόνομο σύστημα "κλειστού βρόγχου" (closed loop). Το πρόβλημα ελέγχου είναι η κατάλληλη επιλογή της συνάρτησης ανάδρασης $u = g(y)$ ώστε το σύστημα $\underline{x}' = \hat{f}(\underline{x})$ νά έχει επιθυμητές ιδιότητες (π.χ ευστάθεια). Στήν περίπτωση γραμμικών συστημάτων / γραμμικού ελέγχου οι αντίστοιχες εξισώσεις είναι της μορφής:

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}' &= A\underline{x} + B\underline{u}\\ \underline{y} &= C\underline{x}\\ \underline{u} &= G\underline{y}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{x}' = (A+BGC)\,\underline{x} := A_c\,\underline{x}$$

καί τό πρόβλημα ανάγεται στήν επιλογή του πίνακα G ώστε ο πίνακας $A_c := A + BGC$ νά έχει κατάλληλες ιδιότητες (π.χ. ιδιοτιμές καί ιδιοδιανύσματα).

Οι αντίστοιχες εξισώσεις για διακριτά συστήματα είναι:

$$\underline{x}_{k+1} = f(\underline{x}_k, g(h(x_k))) := \hat{f}(\underline{x}_k) \quad , \quad \kappa$$

$$\underline{x}_{k+1} = (A + BGC)\,\underline{x}_k := A_c\,\underline{x}_k$$