ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑ

Θεωρία Ελέγχου (814): Θέματα Εξετάσεων, Φεβρουάριος 2026

Έχετε ελεύθερη επιλογή θεμάτων. Ο τελικός βαθμός σας υπολογίζεται ως $\min(B, 10)$ όπου B ($0 \leq B \leq 13$) είναι το άθροισμα των μονάδων που θα συγκεντρώσετε. Καλή επιτυχία!

Θέμα 1: Δίνεται το ηλεκτρικό κύκλωμα που απεικονίζεται στο Σχήμα 1. Η είσοδος του συστήματος είναι η τάση της πηγής u και η έξοδος y η διαφορά δυναμικού μεταξύ των ακροδεκτών της αντίστασης R_2 όπως δείχνει το σχήμα. Όλα τα ηλεκτρικά στοιχεία του κυκλώματος έχουν θετικές τιμές. Οι εξισώσεις του κυκλώματος είναι:

$$u - V_c = i_1 R_1 + L_1 i_1', \ CV_c' = i_1 - i_2, \ V_c - L_2 i_2' = i_2 R_2, \ y = R_2 i_2$$

(i) Χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές κατάστασης: $x_1 = i_1$ (ηλεκτρικό ρεύμα διαμέσω αντίστασης R_1), $x_2 = i_2$ (ηλεκτρικό ρεύμα διαμέσω αντίστασης R_2) και $x_3 = V_c$ (ηλεκτρική τάση μεταξύ των ακροδεκτών του πυκνωτή C), βρείτε το σύστημα καταστάσεων χώρου $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u$, $y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ του κυκλώματος. [1 **βαθμός**]

(ii) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα σας στο ερώτημα (i), βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος. [1 **βαθμός**]

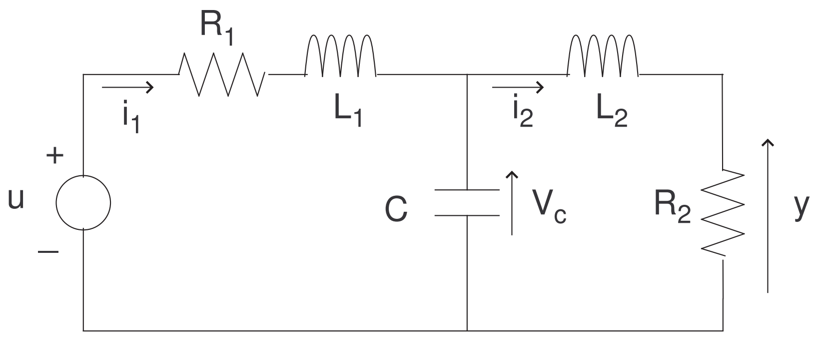
(iii) Έστω $\hat{g}(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, όπου $a(s)$ πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Δείξτε ότι οι τρείς ρίζες του πολυωνύμου $a(s)$ έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. *Υπόδειξη:* Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε χωρίς απόδειξη ότι οι ρίζες του πολυωνύμου $s^3 + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0$, $\gamma_i > 0$, $i = 0, 1, 2$, έχουν ρίζες με αρνητικό πραγματικό μέρος αν και μόνο αν $\gamma_2\gamma_1 > \gamma_0$. [1 **βαθμός**]

(iv) Χρησιμοποιώντας ως υποψήφια συνάρτηση Lyapunov την ηλεκτρική ενέργεια του κυκλώματος,

$$V(i_1, i_2, V_c) = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + \frac{1}{2}CV_c^2$$

δείξτε ότι το σημείο ισορροπίας $(i_1^*, i_2^*, V_c^*) = (0, 0, 0)$ του συστήματος καταστάσεων χώρου $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ (δηλαδή του συστήματος στο (i) με μηδενική είσοδο) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. [1 **βαθμός**]

(v) Υπολογίζοντας τους πίνακες ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας δείξτε ότι το σύστημα $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u$, $y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ στο (i) είναι πλήρως ελέγξιμο και πλήρως παρατηρήσιμο. [1 **βαθμός**]



Σχήμα 1: Θέμα 1

Λύση: (i) Οι εξισώσεις Kirchhoff γράφονται ως:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \dot{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ V_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \ \ y = \begin{bmatrix} 0 & R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ V_c \end{bmatrix}$$

(ii) Έχουμε:

$$sI - A = \begin{bmatrix} s + \frac{R_1}{L_1} & 0 & \frac{1}{L_1} \\ 0 & s + \frac{R_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ -\frac{1}{C} & \frac{1}{C} & s \end{bmatrix}$$

Ο αντίστροφος πίνακας $(sI-A)^{-1}$ υπολογίζεται ως:

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\phi(s)}\text{adj}(sI-A)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\phi(s) = s^3 + \left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2}\right)s^2 + \left(\frac{1}{L_1C} + \frac{1}{L_2C} + \frac{R_1R_2}{L_1L_2}\right)s + \frac{R_1+R_2}{L_1L_2C}$$

Λόγω της δομής των διανυσμάτων $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}^T$ ενδιαφερόμαστε μόνο για το στοιχείο $(2,1)$ του πίνακα $\text{adj}(sI-A)$, δηλαδή:

$$[\text{adj}(sI-A)]_{21} = (-1)^3\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{L_2} \\ -\frac{1}{C} & s \end{vmatrix} = \frac{1}{L_2C}$$

Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$\hat{g}(s) = \frac{R_2/(L_1L_2C)}{s^3 + \left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2}\right)s^2 + \left(\frac{1}{L_1C} + \frac{1}{L_2C} + \frac{R_1R_2}{L_1L_2}\right)s + \frac{R_1+R_2}{L_1L_2C}}$$

(iii) Από την υπόδειξη έχουμε:

$$\begin{aligned} L_1^2L_2^2C(\gamma_2\gamma_1 - \gamma_0) &= (R_1L_2 + R_2L_1)(L_1 + L_2 + CR_1R_2) - (R_1+R_2)L_1L_2 \\ &= R_1L_2^2 + R_2L_1^2 + CR_1R_2(R_1L_2 + R_2L_1) > 0 \end{aligned}$$

και επομένως όλες οι ρίζες του πολυωνύμου $\phi(s)$ είναι στο $\mathbb{C}_-$.

(iv) Η συνάρτηση V είναι κλάσης $\mathcal{C}^1$ και θετικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$ ως προς το σημείο ισορροπίας $(i_1^*, i_2^*, V_c^*) = (0,0,0)$. Η παράγωγος της V κατά μήκος της τροχιάς του συστήματος είναι:

$$\dot{V}(i_1,i_2,V_c) = L_1i_1\left(-\frac{R_1}{L_1}i_1 - \frac{1}{L_1}V_c\right) + L_2i_2\left(-\frac{R_2}{L_2}i_2 + \frac{1}{L_2}V_c\right) + CV_c\left(\frac{1}{C}i_1 - \frac{1}{C}i_2\right)$$

Επομένως

$$\dot{V}(i_1,i_2,V_c) = -R_1i_1^2 - R_2i_2^2 \leq 0$$

Επιπλέον,

$$\dot{V}(i_1,i_2,V_c) = 0 \;\text{ για κάθε }\; t\in\mathbb{R} \;\;\Rightarrow i_1 = i_2 \text{ και } V_c = i_2R_2 = -i_1R_1 \;\text{ για κάθε }\; t\in\mathbb{R}$$

Άρα $i_1 = i_2 = 0$ και $V_c = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Από τα Θεωρήματα Lyapunov και Lasalle το σημείο ισορροπίας $(i_1^*, i_2^*, V_c^*) = (0,0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (και μάλιστα ολικά αφού η V είναι ακτινικά μη-φραγμένη).

(v) Οι πίνακες ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας είναι:

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1^2} & \frac{R_1^2}{L_1^3} + \frac{1}{L_1^2C} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_1L_2C} \\ 0 & \frac{1}{L_1C} & -\frac{R_1}{L_1^2C} \end{bmatrix}$$

και

$$\Gamma_o = \begin{bmatrix} 0 & R_1 & 0 \\ 0 & -\frac{R_2^2}{L_2} & \frac{R_2}{L_2} \\ \frac{R_2}{L_2C} & * & * \end{bmatrix}$$

αντίστοιχα, με ορίζουσες:

$$\det(\Gamma_c) = -\frac{1}{L_1^3L_2C^2} \neq 0 \;\text{ και }\; \det(\Gamma_o) = \frac{R_1R_2^2}{L_2^2C} \neq 0$$

και επομένως το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο και πλήρως παρατηρήσιμο.

Θέμα 2: Γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς: $\hat{g}(s) = \frac{s^2+s+3}{s^3+3s^2+2s}$. Να βρεθούν δύο πραγματοποιήσεις του συστήματος, $\Sigma(A,B,C,D)$, όπου, (i) το ζεύγος (A,B) είναι σε κανονική μορφή ελεγξιμότητας, και (ii) ο πίνακας A είναι διαγώνιος. [1 **βαθμός**]

Λύση: (i) Έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ D = 0$$

Διαχωρίζοντας σε μερικά κλάσματα:

$$\frac{s^2+s+3}{s^3+3s^2+2s} = \frac{s^2+s+3}{s(s+1)(s+2)} = \frac{3/2}{s} - \frac{3}{s+1} + \frac{5/2}{s+2}$$

και επομένως μία πραγματοποίηση με διαγώνιο πίνακα A είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -3 \\ 5/2 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ D = 0$$

Θέμα 3: Έστω το σύστημα $\Sigma_i(A, \mathbf{b})$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \ \text{και} \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(i) Εξετάστε αν το σύστημα $\Sigma_i(A, \mathbf{b})$ είναι πλήρως ελέγξιμο. Να βρεθεί ο ελέγξιμος υπόχωρος $\mathcal{X}_c$ του συστήματος. [1 **βαθμός**]

(ii) Να βρεθεί πίνακας $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\det(Q) \neq 0$, και μετασχηματισμός ισοδυναμίας $\Sigma_i(A, \mathbf{b}) \to \Sigma_i(Q^{-1}AQ, Q^{-1}\mathbf{b})$ τέτοιος ώστε το ζεύγος $(Q^{-1}AQ, Q^{-1}\mathbf{b})$ να είναι σε κανονική μορφή ελεγξιμότητας Kalman, δηλαδή:

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \ Q^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου $\Sigma_i(\hat{A}_{11}, \hat{\mathbf{b}}_1)$ πλήρως ελέγξιμο. [1 **βαθμός**]

(iii) Δείξτε ότι για κάθε $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^3$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A_c = A + \mathbf{b}\mathbf{f}^T$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\lambda = 1$ και ότι επομένως το σύστημα $\Sigma_i(A, b)$ δεν είναι σταθεροποιήσιμο μέσω ανάδρασης καταστάσεων. [1 **βαθμός**]

Λύση: (i) Ο πίνακας ελεγξιμότητας είναι:

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Η πρώτη και τρίτη γραμμή είναι ίσες. (Επίσης η τρίτη στήλη είναι ίση με το άθροισμα της δεύτερης επί 2 μείον την πρώτη). Άρα έχουμε $\text{rank}\Gamma_c = 2 < 3$ και άρα το $\Sigma_i(A, b)$ δεν είναι πλήρως ελέγξιμο. Ο ελέγξιμος υπόχωρος είναι:

$$\mathcal{X} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$$

(ii) Επιλέγουμε

$$Q = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow Q^{-1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Τότε

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \ \hat{b} = Q^{-1}b = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

που είναι σε κανονική μορφή ελεγξιμότητας Kalman.

(iii) Το χαρακτηρηστικό πολυώνυμο του πίνακα $A+\mathbf{b}\mathbf{f}^T$ είναι της μορφής $\phi(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda^2+\alpha\lambda+\beta)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ αυθαίρετα. Επομένως η μία ιδιοτιμή $\lambda=1$ του A δεν είναι ελέγξιμη και παραμένει ιδιοτιμή του A_c για κάθε $\mathbf{f}\in\mathbb{R}^3$. Επομένως το σύστημα $\Sigma_i(A,\mathbf{b})$ δεν είναι σταθεροποιήσιμο μέσω ανάδρασης καταστάσεων.

Θέμα 4: Εξετάστε το μη-γραμμικό δυναμικό σύστημα:

$$x_1'=g_1(x_1,x_2,u):=(x_1-1)(x_1+x_2)-u,\ \ x_2'=g_2(x_1,x_2,u):=x_2-x_1^2+u$$

όπου u είναι συνάρτηση εισόδου κλάσης $\mathcal{C}^1$.

(i) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας της μορφής (x_1^*,x_2^*,u^*) όπου $u^*=0$. Γραμμικοποιώντας το σύστημα γύρω από κάθε σημείο ισορροπίας εξετάστε τις ιδιότητες ευστάθειας κάθε ενός από αυτά. [1 **βαθμός**]

(ii) Εξετάστε το σύστημα $\mathbf{x}'=A\mathbf{x}+\mathbf{b}u$ που προκύπτει από την γραμμικοποίηση του μη-γραμμκού συστήματος γύρω από το σημείο ισορροπίας $(x_1^*,x_2^*,u^*)=(0,0,0)$. Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης του γραμμικοποιημένου συστήματος με $u=0$, (δηλ. του συστήματος $\mathbf{x}'=A\mathbf{x}$) υποδεικνύοντας την ασυμπτωτική του συμπεριφορά καθώς $t\to+\infty$. [1 **βαθμός**]

Σχεδιάστε ανάδραση καταστάσεων της μορφής $u=f_1x_1+f_2x_2$ ώστε ο πίνακας κλειστού βρόγχου του γραμμικοποιημένου συστήματος, $A_c:=A+\mathbf{b}\mathbf{f}^T$, $\mathbf{f}^T=[f_1\ \ f_2]$, να έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\phi(s)=\det(sI_2-A_c)=(s+\gamma)^2$, $\gamma>0$. Θα μπορούσε αυτό το χαρακτηριστικό πολυώνυμο να επιλεγεί αυθαίρετα; Δικαιολογήστε την απάντηση σας. [1 **βαθμός**]

(iii) Εφαρμόζοντας την ανάδραση καταστάσεων που σχεδιάσατε στο ερώτημα (ii) στο μη-γραμμικό σύστημα, δείξτε ότι το σημείο ισορροπίας $(x_1^*,x_2^*)=(0,0)$ είναι τώρα ασυμπτωτικά ευσταθές. *Υπόδειξη:* Οι εξισώσεις το συστήματος κλειστού βρόγχου που προκύπτουν από την εφαρμογή της ανάδρασης καταστάσεων είναι:

$$x_1'=g_1(x_1,x_2,f_1x_1+f_2x_2),\ x_2'=g_2(x_1,x_2,f_1x_1+f_2x_2)$$

Δείξτε επίσης ότι ο πίνακας Jacobian του συστήματος κλειστού βρόγχου υπολογισμένος στο σημείο ισορροπίας $(x_1^*,x_2^*)=(0,0)$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\phi(s)=(s+\gamma)^2$. [1 **βαθμός**]

Λύση: (i) Αν $u=u^*=0$ τα σημεία ισορροπίας αντιστοιχούν στην λύση των εξισώσεων ($x_1=1$ η $x_2=-x_1$) και $x_2=x_1^2$. Ο συνδιασμός $x_1=1$ και $x_2=x_1^2$ δίνει το σημείο ισορροπίας $(x_1^*,x_2^*,u^*)=(1,1,0)$. Ο συνδιασμός $x_2=-x_1$ και $x_2=x_1^2$ δίνει $x_1(x_1+1)=0$ και επομένως τα δύο σημεία ισορροπίας $(x_1^*,x_2^*,u^*)=(0,0,0)$ και $(x_1^*,x_2^*,u^*)=(-1,1,0)$.

Γραμμικοποιώντας το σύστημα έχουμε:

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}2x_1+x_2-1 & x_1-1\\ -2x_1 & 1\end{bmatrix},\ B=\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial u}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

Άρα, στο πρώτο σημείο ισορροπίας:

$$A_1=\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right)_{(0,0)}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\sigma(A_1)=\{-1,1\}$$

και επομένως το σημείο $(0,0)$ είναι ασταθές. Επίσης,

$$A_2=\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right)_{(1,1)}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\sigma(A_2)=\{2,1\}$$

και επομένως και το σημείο ισορροπίας $(1,1)$ είναι ασταθές. Επίσης,

$$A_3=\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right)_{(-1,1)}=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\det(sI-A_3)=\det\begin{bmatrix}s+2 & 2\\ -2 & s-1\end{bmatrix}=s^2+s+2$$

και επομένως το σημείο ισορροπίας $(-1,1)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (τοπικά).

(ii) Διάγραμμα φάσης του συστήματος $\dot{\mathbf{x}}=A_1\mathbf{x}$: Σαγματικό σημείο ισορροπίας με ασύμπτωτους τις ευθείες $x_2=0$ (x_1-άξονας) και $x_2=-2x_1$. Αρχικές καταστάσεις επί του x_1-άξονα παράγει τροχιές που παραμένουν στον x_1-άξονα για κάθε $t\geq 0$ και συγκλίνουν στην αρχή των αξόνων. Τροχιές που παράγονται από άλλες αρχικές καταστάσεις τείνουν στο άπειρο από την κατεύθυνση που ορίζει το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα, δηλ. παράλληλα με την ευθεία $x_2 = -2x_1$.

Πίνακας καταστάσεων A_c συστήματος κλειστού βρόγχου:

$$A_c = A + \mathbf{b}\mathbf{f}^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-f_1 & -1-f_2 \\ f_1 & 1+f_2 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$\det(sI - A_c) = \det \begin{bmatrix} s+(1+f_1) & 1+f_2 \\ -f_1 & s-(1+f_2) \end{bmatrix} = s^2 + (f_1 - f_2)s - 1 - f_2 = s^2 + 2\gamma s + \gamma^2$$

και άρα

$$f_2 = -(\gamma^2+1) \;\text{ και }\; f_1 = f_2 + 2\gamma = -\gamma^2 + 2\gamma - 1 = -(\gamma-1)^2$$

Επομένως

$$u = -(\gamma-1)^2 x_1 - (\gamma^2+1)x_2$$

(iii) Εφαρμόζοντας την συνάρτηση εισόδου u του μέρους (ii) στις εξισώσεις κλειστού βρόγχου:

$$\begin{aligned} x_1' &= g_1(x_1, x_2, -(\gamma-1)^2 x_1 - (\gamma^2+1)x_2) = (x_1-1)(x_1+x_2) + (\gamma-1)^2 x_1 + (\gamma^2+1)x_2 \\ x_2' &= g_2(x_1, x_2, -(\gamma-1)^2 x_1 - (\gamma^2+1)x_2) = x_2 - x_1^2 - (\gamma-1)^2 x_1 - (\gamma^2+1)x_2 \end{aligned}$$

η

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1^2 + x_1 x_2 + (\gamma^2 - 2\gamma)x_1 + \gamma^2 x_2 \\ x_2' &= -(\gamma-1)^2 x_1 - \gamma^2 x_2 - x_1^2 \end{aligned}$$

και άρα

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 + \gamma^2 - 2\gamma, \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = x_1 + \gamma^2$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1} = -(\gamma-1)^2 - 2x_1, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = -\gamma^2$$

Γραμμικοποιημένο σύστημα κλειστού βρόγχου:

$$\mathbf{x}' = A_c \mathbf{x} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{(0,0)} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \gamma(\gamma-2) & \gamma^2 \\ -(\gamma-1)^2 & -\gamma^2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Άρα

$$\det(sI - A_c) = \det \begin{bmatrix} s - \gamma(\gamma-2) & -\gamma^2 \\ (\gamma-1)^2 & s+\gamma^2 \end{bmatrix} = s^2 + \gamma^2 s - \gamma^2 s + 2\gamma s - \gamma^3(\gamma-2) + \gamma^2(\gamma-1)^2$$

η

$$\det(sI - A_c) = s^2 + 2\gamma s + \gamma^2 = (s+\gamma)^2$$

όπως περιμένουμε. Επομένως το σημείο ισορροπίας στην αρχή των αξόνων είναι ασυπτωτικά ευσταθές.

Πίνακας μετασχηματισμών Laplace

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
1	$1/s$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
t	$1/s^2$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
t^2	$2/s^3$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t^{n-1}e^{-at}$	$\frac{(n-1)!}{(s+a)^n}$